泰和匡文濤編譯

球面三角法講義

商務印書館出版

球面三角法講義

目　　次

第　一　編　大圓及小圓 (1–3)

第　二　編　球面三角形之決定 (12–18)

第三編 直角三角形之解法 (36－51)

第四編 球面三角形一般之解法 (52－75)

第五編 關於E之公式 (76－92)

第六編 雜定理 (93－97)

三線坐標 (97－99) 球面之平均中心 (99－100)

內切圓及外接圓 (100－115)

第七編 關於小圓之定理 (116－136)

第八編 關於多面體之定理(137－154)

第九編 相似之中心及軸(155－159)

倒形(159－163)　射影(163－172)

第十編 引球面上定點之弧(173－179)

第十一編 球面三角形之算數解法(180－188)

第十二編 球面三角法之應用(189－195)

第十三編 球面星學 射影(196–206)

第十四編 球面星學之問題(207–233)

弦尺，正弦尺及正切尺之製法

以適當之長畫圓周.其對於60°之弦,等於圓之半徑.故決定此長度.由是可作得50°,40°等相應之弦.然90°之正弦.適等於圓之半徑.故以半徑之長爲90°之正弦.由是得80°,70°等相應之正弦之値.

又45°之正切,等於圓之半徑.故以半徑表45°之正切.以下仿正弦之法定之.

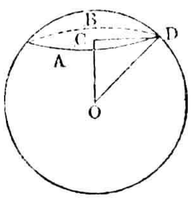
球面三角法講義

第一編

大圓及小圓

1. 從一定點至一定距離之面爲界之體,曰**球**.其表面,曰**球面**.其一定點,曰**球之中心**.由此中心至球面之距離,曰**半徑**.通過中心之直線,其兩端交於球面,則此部分曰**直徑**.

2. 依平面而截球.則其截口常爲圓.



AB 爲球面之截口.O爲球之中心.OC 爲自 O 至 AB 之垂直線.從截口之一點 D.各至 C, O 結成直線.則

$\angle DCO = R\angle$, $\quad\therefore\quad CD = \sqrt{(OD^2 - OC^2)}$.

然 OC, OD 爲一定.故 CD 亦爲一定.而 D 點至定點 C 有一定之距離.卽知 AB 之截口,爲自 C 至定距離之一圓周.

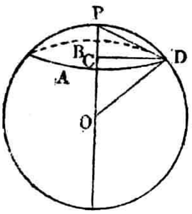
3. 以過中心之平面截球.則其截口爲大圓.反之.不過中心之平面截球.則其截口爲小圓.

大圓得依過球面上之二點以決定之.因通球面上之二點,及球之中心.共有三點.得以決定一平面故也.然球面上之二點.若在直徑之兩端.則三點同在一直線上.而包含無數平面.從而發生無數大圓.由是不能決定.

小圓得依球面上三點以決定之.因小圓不過球之中心故也.

4. 分球之某圓軸曰垂直於此圓之直徑.此直徑之兩端,關於圓而稱極.

5. 圓之極至圓之周爲等距離.

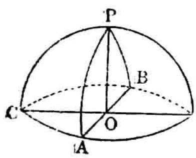


如圖. O爲球之中心. AB爲小圓. C爲小圓中心. P爲小圓之極. 今連結O, P. 則OP通過C. 從小圓周上任意取一點D. 連結PD, OD, CD. 則$PC=PO-CO$. 然PO, CO爲一定. 故PC亦爲一定. 又CD爲小圓之半徑, 亦爲一定. 由是

$PD=\sqrt{(PC^2+CD^2)}$, 卽 PD爲一定之長.

故從極至圓周之距離, 皆相等.

6. 從大圓之極至其大圓周上任意一點作大圓. 則其大圓之弧爲四分圓.



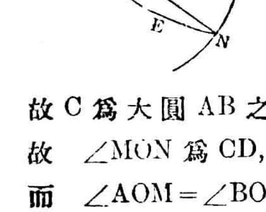
令P爲ABC大圓之極. 則PA爲四分圓.

O爲球之中心. 引PO. 則PO垂直於ABC大圓上. 含PO之大圓APB, 亦垂直於ABC大圓上.

故 $\angle POA=R\angle$.

由是知PA爲四分圓.

7. 二大圓之傾度. 等於其極相結之大圓弧.



O爲球之中心. CD, CE爲二大圓. A, B各爲大圓之極. 則立於弧AB上之中心角AOB, 等於CD, CE之傾度.

今通過AB畫大圓. 交CD於M, 交CE於N, 則從A至C, 從B至C之弧, 均爲四分圓.

故C爲大圓AB之極.

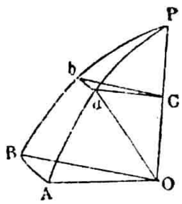
故 $\angle MON$爲CD, CE之傾度.

而 $\angle AOM=\angle BON=R\angle$,

$\angle AOM-\angle BOM=\angle BON-\angle BOM$,

卽 $\angle AOB=\angle MON$.

8. 小圓之弧.得以其相對之中心角,及同中心角之大圓弧,與至小圓之極距之中心角.而決定之.



ab 爲小圓之弧. C, P 爲其中心及極. 連結 PC. 且延長 C 端. 必通過球之中心 O. 而 aCb 面與 PO 互爲直交. PA, PB 爲一象限. 過 AB 畫大圓. 則 AOB 與 PO 直交. 由是 aCb 面與 AOB 面平行.

故　$\angle aCb = \angle AOB$,

$\therefore\ \widehat{ab} : \widehat{AB} = aC : AO, = aC : aO$,

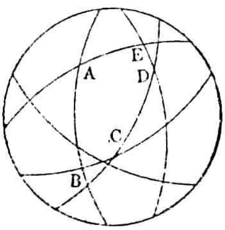
$\therefore\ \widehat{ab} : \widehat{AB} = sin Poa$.

9. 球面上二點間之最短距離爲大圓弧.

今連結二點引直線. 爲凡過此二點之各圓之共通弦. 而弦最切近之弧爲大圓弧.

球面三角形

10. 球面多角形. 乃多數大圓弧所包圍之部分之名稱.



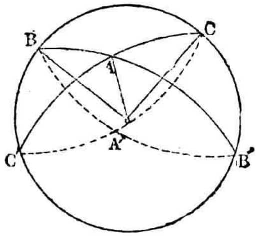
令此多角形爲 ABCDE. 則 AB, BC, CD, DE, EA. 名多角形之邊. $\angle ABC$, $\angle BCD$. .... 等. 名多角形之角.

引長球面多角形之各邊. 其所生之各大圓. 任以其一而亦分其球面. 且多角形之各邊在半球上. 則此名**凸多角形**.

11. 凸多角形之各邊, 比大圓之半周小.

如前圖. 設 AB 比半周大 則 AB 之上. 於 A 與 B 二點之間. 取一點 P. 令 AP 等於半周. 然合邊 AE 之大圓過 P 點. 故此多角形不在半球上. 是與假設相反. 故各邊均應比半周小.

球面三角形.乃三大圓弧所包圍之三角形.三大圓之直徑不相同.則其三大圓相交.而得八個球面三角形.此八個球面三角形之中.選其二邊或三邊.比四分圓小.則便於推究.因避兩意之式故也.



ABC 爲球面三角形.O 爲球之中心.以平面 OAB, OBC, OCA 作立體角 O－ABC.其平面爲球面三角△ABC之三邊之測度.而其二面角.等於球面三角形之角.故知球面三角形之一.其他卽可由球面三角形之性質導出.

A'B'C' 在 ABC 所對角頂直徑之兩端.此等球三角.稱爲對稱三角形.

12. 球面三角形.其任意二邊之和,比第三邊小.又三邊之和,比大圓周小.

球面三角形之角頂.與球之中心O連結.畫 OA, OB, OC.則與此對應之三角形 O－ABC, 其三個平面角 AOB, BOC, COA, 任取其中二個平面角之和,比第三平面角小.又此三個平面之和.比四直角小.故測平面角之弧,卽 ABC 之三邊和,比大圓周小.而二邊之和,比第三邊大.

13. 球面三角形 ABC, 在 BC 之極 A 之同方.AB 之極 C 之同方.CA 之極 B 之同方.各取 A' B', C'.各取二點相連.發生 A'B'C' 三角形.此 A'B'C' 三角形.名曰 ABC 三角形之極三角形.

14. 球面三角形之邊.與其極三角形對應之角之和,等於二直角.

引長 A'B', A'C', 切邊 BC 於 E, F, 則點 C 爲弧 A'B' 之極.

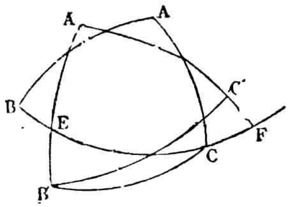
故　$EC=90°$,　　同樣, BF 亦等於 $90°$,

$\therefore\quad EC+BF=180°$.

15. 球面三角形之角度.

二角之和,比第三角及180°之和小.

三角之和,比二直角大而比六直角小.



令原三角形爲ABC,其A,B,C對應之邊爲a,b,c,極三角形爲$A'B'C'$,其A',B',C'對應之邊爲a',b',c'.則

$a'=180°-A,\quad A'=180°-a,$

$b'=180°-B,\quad B'=180°-b,$

$c'=180°-C,\quad C'=180°-c.$

然極三角形之邊爲$a'+b'>c'$,

故 $180°\times2-(A+B)>180°-C$, 卽 $180°+C>A+B$,

又 $a'+b'+c'=180°\times3-(A+B+C)$,

故 $A+B+C=180°\times3-(a'+b'+c')$,

$\therefore\ A+B+C<180°\times3$, $\quad\therefore\ A+B+C<90°\times6$,

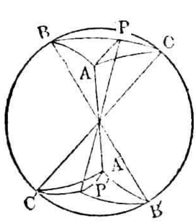
又 $a'+b'+c'<360°$,

故 $A+B+C>180°\times3-360°$, $\quad\therefore\ A+B+C>180°$.

16. 球面三角形,從三角之和減去180°所餘之差稱球面過剩.

17. 二個三角形ABC,$A'B'C'$爲對稱,則其積相等.

各相應之邊相等.而爲兩個等邊三角形.故能重合.卽一定三角形ABC.關於球之中心.而迴轉$A'B'C'$.重合於ABC之上.則AB與$A'C'$相合.AC與$A'B'$相合.而對應之邊各各相合.

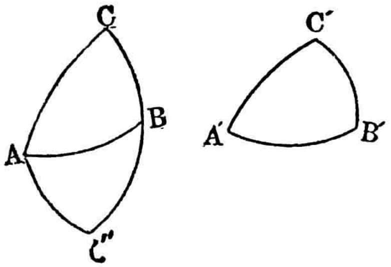


今證明其面積相等. 過A,B,C三點晝一小圓.其極爲P.又過A',B',C'三點晝一小圓其極爲P'.則PP'爲直徑.而PAB,$P'B'A'$; PBC,$P'C'B'$; PCA,$P'A'C'$,各爲對稱兩個等邊三角形.今此一對之三角形APB,$A'P'B'$,相重合.同樣.他之一對等邊三角形亦相重合.由是知三角形ABC與$A'B'C'$相等.

18. 二個三角形同在球面上.若相對應之各部相等.則合次列四種之一.其兩三角形亦全相等.

1. 二邊及其夾角相等.
2. 一邊及二隣角相等.
3. 三邊相等.
4. 三角相等.

1. 之證明. $AB=A'B'$, $AC=A'C'$, $\angle BAC=\angle B'A'C'$.



$A'B'$ 重於 AB 之上.因夾角相等.故 $A'C'$ 與 AC 相合. B', C' 各與 B, C 相合.故 $B'C'$ 與 BC 相合.由是 ABC 與 $A'B'C'$ 全相合而相等.

2. 之證明.依極三角形之理.得由1.導出.

3. 之證明.以弧 $A'B'$ 置於 AB 之上.則點 C' 爲 A. B 之極,以 AC, BC 爲半徑,畫二個小圓.其交點當重合於 C 之上.設若不相合.則取 C 反對之極 C'' 之位置, ABC 卽 ABC'' 對稱之位置,然 $AC=AC''$, $BC=BC''$,由是關於球之中心.而迴轉三角形 ABC'',置於 ABC 之上,全不相合.此由前對稱之證明而知其相等.

4. 之證明 依極三角形之理.得從3.導來.

19. 球面三角形之二邊相等.則兩底角亦相等,此二邊所夾之角頂.結對邊之中點.則分頂角爲二等分.

因頂角與對邊中點相連結.則爲三邊相等之對稱三角形.

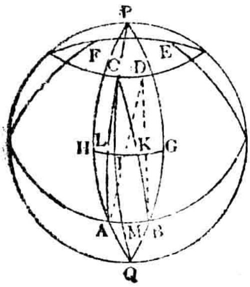
故分爲相等之二個三角形.

故兩底角相等.及頂角爲二等分.

20. 二個球面三角形.其底邊同.其各頂點在過底邊兩端對稱點之小圓周上.則此二個三角形等積.

兩三角形 ABC, ABD. A 之對稱點爲 E. B 之對稱點爲 F. 頂角 C, D 在通過上二對稱點之圓周上. 則 ABC 與 ABD 爲等積.

證　平行於 CEF 圓, 作大圓 KLG. 交 CA 於 L. 交 CB 於 K.



自極 P, Q. 過底之兩端 A, B 畫大圓 PAQ, PBQ. 並過 C 畫 PCQ. 則 PE, AQ 爲對稱而相等, 又 PC 等於 PE, 而 AQ = PC.

∠CPH = ∠AQM, 故 PA, QC 顚倒而重合. 則 C 與 A 合. 又 PI = QH = 90°. 以 I 與 H 相合 故 L 自 I 重合, 而 AHL = CIL.

同樣. PB, QC 顚倒而重合之. 自其相重合而知

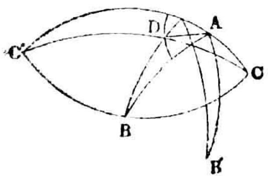
$$BGK = CIK, \qquad \therefore \quad AHL + BKG = CLK.$$

由是所設之球面三角形 ABC. 與球面四角形 ABGH 等積.

同樣. ABD 三角形與球面四角形 ABGH 等積.

∴　三角形 ABC = 三角形 ABD.

21.　立於定底邊上之球面三角形. 其兩底角之和. 一定不易. 則其頂角及頂角之外角之二等分弧. 各過一定點.



設 ABC 爲球面三角形. BC 爲定底邊.

∠ABC + ∠ACB 爲一定.

則 $\angle B + \angle C = \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) + \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$,

$\therefore \quad \frac{1}{2}(\angle B + \angle C) - \angle B = \angle C - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$.

今自底邊之兩端 B, C, 以 $\frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$ 二等分之角作 BD, CD. 相交於 D. 因 $\frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$ 爲一定, 故 D 點亦爲一定. 又 BD = CD.

$\frac{1}{2}(\angle B + \angle C) - \angle B = \angle C - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$.

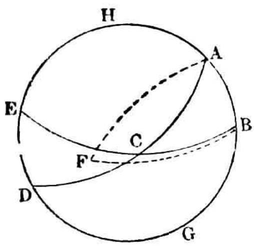
由是 ∠ABD = ∠ACD.　　　∴ 月形 ABDB′ = 月形 ACDC′.

故自 D 引 CAC′ 之垂線, 與自同點引 BAB′ 之垂線, 必相等.

故 A 之外角之二等分線必過 D 點.

球面三角形之面積

22. 有三角形 ABC. 引長底邊 AB. 又引長 BC, AC, 截底之引長線於 E, D. 再引長 CA, CB 交於 F. 則三角形 BAF, 與三角形 EDC 爲對稱. 而其面積相等.



又

月形 $ABDC = ABC + BCD$,

月形 $BAEC = ABC + ACE$,

月形 $CBFA = ABC + CED$,

此三月形相加, 則

半球之面積 $+ 2ABC = 2Ar^2 + 2Br^2 + 2Cr^2$.

$\therefore \quad 2\pi r^2 + 2\Delta = 2Ar^2 + 2Br^2 + 2Cr^2$,

$\therefore \quad \Delta = r^2(A + B + C - \pi)$,

令 $A + B + C - \pi = E$,

則 $\Delta = Er^2$,

但 Δ 爲三角形 ABC,

r 爲球之半徑.

月形 $ABDC = 2Ar^2$,

月形 $BAEC = 2Br^2$,

月形 $CBFA = 2Cr^2$.

求此月形之面積. 則取有 $\angle A$ 之月形如次.

月形之面積 : 球之全面積

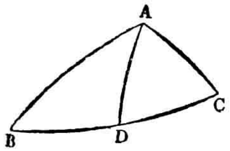
:: 月形之角 A : 2π.

$\therefore$ 月形之面積 $= \dfrac{4\pi r^2 . A}{2\pi} = 2Ar^2$.

問 題 一

1. 直徑三角形.其直徑邊所對之角,等於餘二角之和.且比直角大.試證之.

三角形.其外接圓之中心在一邊上.稱直徑三角形.其一邊稱直徑邊.



三角形 ABC. 其 BC 邊之中點 D. 爲外接圓之中心. 則

$$\widehat{BD}=\widehat{AD}=\widehat{DC},$$

∴ $\triangle ADB$, $\triangle ADC$ 爲二等邊三角形. 而

$$\angle DAC=\angle DCA,\quad \angle DAB=\angle DBA,$$

$$\therefore\quad \angle ABD+\angle ACD=\angle BAD+\angle CAD=\angle BAC.$$

而三角形之三角和.比二直角大.

故其半角 BAC 比直角大.

2. 設大圓周上之四點爲 A, B, C, D. 則

i $\quad \sin BC\sin AD+\sin CA\sin BD+\sin AB\sin CD=0,$

ii $\quad \sin BC\cos AD+\sin CA\cos BD+\sin AB\cos CD=0.$

試證之.

i 之證. $\sin BC\sin AD+\sin AB\sin CD$

$$=\tfrac{1}{2}[2\sin BC\sin AD+2\sin AB\sin CD]$$

$$=\tfrac{1}{2}[\cos(AB+CD+2BC)-\cos(AB+CD)+\cos(AB+CD)-\cos(AB-CD)]$$

$$=\tfrac{1}{2}[\cos(AB+CD+2BC)-\cos(AB-CD)]$$

$$=\tfrac{1}{2}[2\sin(AB+BC)\sin(CD+BC)]$$

$$=\sin AC\sin BD.$$

然弧 AC 自 A 向 C 之方向迴轉,則爲負.自 C 向 A 之方向迴轉,則爲正.故上式之右端爲 $\quad -\sin CA\sin BD.$

ii 之證. $\sin BC\cos AD+\sin AB\cos CD$

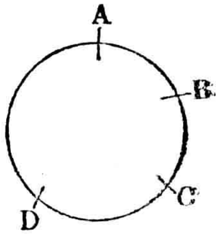
$=\frac{1}{2}[2\sin BC\cos AD+2\sin AB\cos CD]$

$=\frac{1}{2}[\sin(AB+CD+2BC)-\sin(AB+CD)+\sin(AB+CD)$

$-\sin(AB-CD)]$

$=\frac{1}{2}[2\cos(AB+BC)\sin(CD+BC)]$

$=\cos AC\sin BD.$



故與i同樣得 $-\cos AC\sin DB$,

由是

i $\sin BC\sin AD+\sin AB\sin CD=-\sin CA\sin BD$,

$\therefore$ $\sin BC\sin AD+\sin AB\sin CD+\sin CA\sin BD=0.$

ii $\sin BC\cos AD+\sin AB\cos CD=-\cos AC\sin DB$,

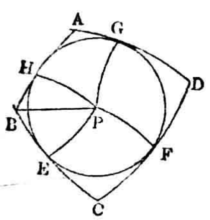
$\therefore$ $\sin BC\cos AD+\sin AB\cos CD+\cos AC\sin DB=0.$

3. 球面四角形,外切於小圓,則其兩兩對邊之和相等.

P 爲小圓之中心. ABCD 爲球面四角形外切於小圓之四角.

則 $AB+CD=BC+AD$.

設切點爲 E, F, G, H. 而此切點,各與中心 P 相連. 又 P 與 B



連結. 則弧 AB 與 PH 成直角. BC 與 PE 成直角.

而 $PH=EP$,

$\therefore$ $\triangle PHB=\triangle PEB$, $BH=BE$,

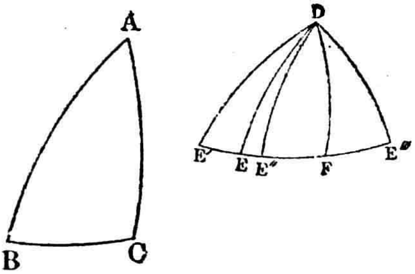
同樣. $CE=CF$, $DF=DG$, $AG=AH$,

$\therefore$ $BH+AH+CF+DF=AG+DG+BE+CE$,

卽 $AB+CD=BC+AD$.

補題.

ABC, DEF 爲二個直角三角形. 而 $AB=DE$,

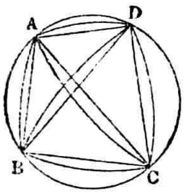


AC=DF,(比象限弧小)則△ABC與△DEF相等.

今以ABC重於DEF之上.則先以A置於D之上.AC重於DF之上.則C與F合.CB落於FE之上.設AB與DE不相合.則當落於DE,DF之間或外.然任何亦爲不同之長.而與假設相反.只限於DFE‴之對稱形.始能相等.故AB與DF苟相等.則必相合.或爲對稱之形.故BC等於EF.

4. 設A,B,C,D同在一小圓周上.則

$\sin\frac{1}{2}CA\sin\frac{1}{2}BD=\sin\frac{1}{2}BC\sin\frac{1}{2}AD+\sin\frac{1}{2}AB\sin\frac{1}{2}CD$. 試證之.



內切於圓之四角形爲ABCD.引弦AB,BC,CD,AD,從球之中心.向各弦作垂線.各分弦爲二等分.同樣.對角線AC,BD之弦.亦爲二等分.而此各垂線與半徑所成之角.各爲AB,BC,CD,DA,AC,BD之弧之半.又由德列密氏之定理.知

弦　$AB.CD+AD.BC=BD.AC$,

$\therefore\ \frac{1}{2}AB.\frac{1}{2}CD+\frac{1}{2}AD.\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}BD.\frac{1}{2}AC$.

命外切圓之半徑爲R.則上式爲

$R\sin\frac{1}{2}AB.R\sin\frac{1}{2}CD+R\sin\frac{1}{2}AD.R\sin\frac{1}{2}BC$

$=R\sin\frac{1}{2}BD.R\sin\frac{1}{2}AC$,

(AB, BC, CD, AD, AC, BD乃表弧之長)

$\therefore\ \sin\frac{1}{2}AB.\sin\frac{1}{2}CD+\sin\frac{1}{2}AD\sin\frac{1}{2}BC$

$=\sin\frac{1}{2}BD\sin\frac{1}{2}AC$.

以下凡言圓.皆指大圓而言.

又單稱弧.亦指大圓之弧.