GAODENGSHUXUE
QUANCHENGFUDAO

全 高等数学 程辅导 上

高文杰 李艳梅
张立圃 王鲁静 编
陈秀岐 丁 杰 主审

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

高等数学全程辅导

（上册）

高文杰　李艳梅
张立圃　王鲁静　编

陈秀岐　丁　杰　主审

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书是根据编者多年的教学实践，按照通行的高等数学课程内容编写的一本学习辅导书. 全书分上、下册出版. 上册内容为函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分、定积分和定积分的应用；下册内容为空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数和微分方程. 每章均设有知识网络与知识要点、释疑解难、错解分析、典型题型例题选解、检测题与参考答案五部分.

本书内容丰富、深入浅出、适用面广. 可作为高职高专和本科层次学生的辅导用书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学全程辅导/高文杰编. —天津：天津大学出版社，2005.10

ISBN 7-5618-2209-X

Ⅰ.高...　Ⅱ.高...　Ⅲ.高等数学 - 自学参考资料
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 115444 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨欢
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编：300072)
电　　话　发行部：022-27403647　邮购部：022-27402742
网　　址　www.tjup.com
印　　刷　迁安万隆印刷有限责任公司
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　185mm×260mm
印　　张　24
字　　数　600 千
版　　次　2005 年 10 月第 1 版
印　　次　2005 年 10 月第 1 次
印　　数　1 - 5 000
定　　价　72.00 元(上、下册)

前　　言

高等数学是各类高等院校许多专业的一门重要基础课程,它对培养、提高学生的素质有着重要的作用,但现行的数学课程愈来愈普遍地表现出两方面的问题:一方面是授课时间不断被压缩,学生很难完全理解该学科的本质内涵,解题能力欠缺;另一方面,各类后续专业课程对高等数学的要求日益提高,同时,各类升学考试对高等数学的要求也在提高.鉴于此我们编写了此书,其目的在于帮助学生学好高等数学的基本概念、基本理论和方法,以全面提高学生的高等数学素养.

编者在编写中注意了如下几个方面:一是内容的逻辑结构、知识的深度和宽度与同济大学《高等数学》第五版取得一致;二是较宽阔的读者覆盖面,使其既适合高职高专也适合本科层次;三是将每章的知识作为一个整体,适度整合构成一个辅导单元,这样有利于读者从更加综合完整的角度把握内容;四是辅导角度丰富,既有典型问题讲解,又有错解分析,可以从不同侧面强化内容.

全书共十二章,每章均依次设有知识网络与知识要点、释疑解难、错解分析、典型题型例题选解和检测题与参考答案五部分.其中,释疑解难部分将高等数学中理解困难、易于混淆的重要概念、命题和解题方法一一予以详解,有助于正确掌握数学问题的实质和方法.错解分析部分将发生频率较高的典型错解错证逐一展示,逐一剖析,有助于纠正解题中的错误做法.典型题型例题选解部分把常见的数学问题归纳成不同类型的题型,介绍解题思路,给出解题示例,并将其从浅到深、由简至繁编排,这种题型归纳虽未能全面而微,但便于分类指导.在检测题与参考答案部分中,将检测题按照由易到难分成A、B两类,A类题大抵在高职高专层次,B类题大抵在本科层次,各类题的选择力争具有代表性,其中许多是各类考试或竞赛的优秀试题.

本书内容涵盖面广,深入浅出,模块组合,读者可根据自己的需要进行选取.同时,本书也可作为各类高等数学教学参考资料使用.

本书由高文杰、李艳梅、张立圃、王鲁静共同编写,由高文杰统稿.

本书由陈秀岐、丁杰担任主审.

给予本书很大帮助并提出宝贵意见的有杜俊文、陈洁、刘振云、崔媛、李国辉、徐向东、李仲佳、周爱丽、蒋风光;给予编者很大支持的还有张立军、佟卫东和李翠萍等老师.编者在此一并致谢!

限于编者水平,加之编写时间也比较仓促,因而本书中一定存在疏漏和错误,恳请读者指正.

编者

2005年8月

目　　录

第一章　函数与极限

一、知识网络与知识要点

(一)知识网络

- 函数与极限
  - 函数
    - 定义(两个要素)
    - 性质(有界性,奇偶性,单调性,周期性)
    - 基本初等函数(定义、性质、图形)
    - 反函数
    - 复合函数(复合函数的分解)
  - 极限
    - 定义
      - 数列极限($\varepsilon-N$ 定义)
      - 函数极限($\varepsilon-\delta$ 定义)
        - $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
        - $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ (含 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$)
        - $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$
        - 极限存在的充要条件
    - 性质
      - 唯一性
      - 保号性(有序性)
      - 有界性
      - 保四则运算
    - 无穷小(大)量
      - 定义
      - 阶的比较
        - 高阶无穷小
        - 同阶无穷小
        - 等价无穷小
        - k 阶无穷小
        - 低阶无穷小
    - 判别法
      - 单调有界定理
      - 两边夹定理
      - 两个重要极限
      - 有界变量乘无穷小是无穷小

- 函数的连续性
  - 函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续定义（六种等价定义）
    - ① $f(x_0+0)=f(x_0-0)=f(x_0) \Leftrightarrow x_0$ 处左连续，且右连续
    - ② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$
    - ③ $\lim\limits_{\triangle x \to 0} \triangle y=0$
    - ④ $f(x)=f(x_0)+\alpha$ 当 $x \to x_0$ 时，$\alpha \to 0$
    - ⑤ $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，当 $|\triangle x|<\delta$，$|\triangle y|<\varepsilon$
    - ⑥ $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$，$|x-x_0|<\delta$，$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$
  - 连续的三个条件
    - $f(x)$ 在 x_0 有定义
    - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在
    - $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$
  - 函数的间断点
    - 第一类间断点（二单侧极限存在）
      - 可去间断点（二单侧极限存在且相等）
      - 跳跃间断点：二单侧极限存在但不等
    - 第二类间断点：二单侧极限至少一个不存在，如无穷间断点，振荡间断点
  - 连续函数的性质
    - 四则运算性、复合性、反函数连续性 → 初等函数在定义区间上是连续的
    - 局部性质
      - 局部有界：$f(x)$ 在 x_0 的邻域内有 $|f(x)| \leq M$
      - 局部保号：$f(x)$ 在 x_0 处，$f(x_0)>0$（或 $f(x_0)<0$）则 x_0 邻域内有 $f(x)>0$（或 $f(x)<0$）
    - 闭区间上性质（$f(x)$ 在 (a,b) 内连续，且 a 处右连续，b 处左连续）
      - 最值性
      - 有界性
      - 介值性
      - 零点定理

（二）知识要点

1. 映射与函数

（1）集合

1°集合的概念

所谓集合是指具有某种特定性质的事物的总体，组成这个集合的事物称为该集合的元素（简称元）.

表示方法有列举法：$A=\{a_1,a_2,\cdots a_n\}$；描述法：$M=\{x \mid x$ 具有性质 $P\}$.

某些集合常用记号：**N** 表示自然数集；$\mathbf{N}^+$ 表示正整数集；**Z** 表示整数集；**Q** 表示有理数集；**R** 表示实数集；$\mathbf{R}^*$ 表示排除 0 的实数集；$\mathbf{R}^+$ 正实数集；$\varnothing$ 表示空集.

子集，记作 $A \subset B$；真子集，记作，$A \subsetneqq B$.

2°集合的运算

并集：$A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$；

交集：$A\cap B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\in B\}$；

差集：$A\setminus B=\{x\mid x\in A$ 且 $x\notin B\}$；

余集或补集：$A^C=\{x\mid x\in I$ 且 $x\notin A\}$，其中 I 为全集；

直积或笛卡尔乘积：$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A$ 且 $y\in B\}$.

集合的交、并、余运算满足法则：交换律、结合律、分配律和对偶律.

3°区间和邻域

开区间 $(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$；

闭区间 $[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$；

半开区间 $[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$；

$[a,+\infty)=\{x\mid x\geqslant a\}$；$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}$；$\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$.

点 a 的 δ 邻域：$U(a,\delta)=\{x\mid a-\delta<x<a+\delta\}$；

a 的去心 δ 邻域 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$.

(2)映射

1°映射概念

$f:X—Y$，像 $y=f(x)$. 定义域 D_f，值域 R_f 或 $f(X)$，即 $R_f=f(X)=\{f(x)\mid x\in X\}$.

从非空集 X 到数集 Y 的映射称为 X 上的泛函；

从非空集 X 到它自身的映射称为 X 上的变换；

从实数集(或子集) X 到实数集 Y 的映射称为 X 上的函数.

2°逆映射与复合映射

逆映射 $g:R_f\to X$，记作 f^{-1}.

复合映射：设 $g:X\to Y_1$，$f:Y_2\to Z(Y_1\subset Y_2)$，则复合映射为

$$f\circ g:X\to \mathbf{Z},(f\circ g)(x)=f[g(x)],x\in X.$$

(3)函数

1°函数概念

$y=f(x)$，$x\in D$. 值域 $R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}$.

2°函数的几种特性

函数的有界性、函数的单调性、函数的奇偶性、函数的周期性.

3°反函数与复合函数

反函数：$f:D\to f(D)$，$f^{-1}:f(D)\to D$ 称为 f 的反函数. f 称为直接函数.

复合函数：$y=f(u)$，$u=g(x)$，$(f\circ g)(x)=f[g(x)]$.

4°函数的运算

和(差) $f\pm g$，积 $f\cdot g$，商 $\dfrac{f}{g}(g\neq 0)$.

5°初等函数

基本初等函数包括：幂函数 $y=x^\mu$（$\mu\in\mathbf{R}$ 是常数）；指数函数 $y=a^x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$），$y=e^x$；对数函数 $y=\log_a x(a>0$，且 $a\neq 1)$，$y=\ln x$；三角函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\tan x$，$y=$

$\cot x, y=\sec x, y=\csc x$;反三角函数 $y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x$ 等.

初等函数:由常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数.

双曲函数:双曲正弦 $\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$,双曲余弦 $\operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$,双曲正切 $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

反双曲函数:反双曲正弦 $y=\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$,反双曲余弦 $y=\operatorname{arch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$,反双曲正切 $y=\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$.

2. **数列的极限**

(1)数列极限的定义

设$\{x_n\}$为一数列,如果存在常数 a,对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,那么就称常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限,或者称数列$\{x_n\}$收敛且收敛于 a,记为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

用记号表示为:$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists$正整数 N,当 $n>N$ 时,有$|x_n-a|<\varepsilon$.

(2)收敛数列的性质

极限的唯一性:如果数列$\{x_n\}$收敛,那么它的极限唯一.

收敛数列的有界性:如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

收敛数列的保号性:如果$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,且 $a>0$(或 $a<0$),那么存在正整数 $N>0$,当 $n>N$ 时,都有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

推论　如果数列$\{x_n\}$从某项起有 $x_n\geqslant 0$(或 $x_n\leqslant 0$),且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$,那么 $a\geqslant 0$(或 $a\leqslant 0$).

子列:在数列$\{x_n\}$中任意抽取无限多项并保持这些项在原数列$\{x_n\}$中的先后次序,这样得到的一个数列称为原数列$\{x_n\}$的子数列(或子列).

收敛数列与其子数列间的关系:如果数列$\{x_n\}$收敛于 a,那么它的任一子数列也收敛,且极限也是 a.

3. **函数的极限**

(1)函数极限的定义

1°自变量趋于有限值 x_0 时函数的极限

设函数 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有定义.如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,使得当 x 满足不等式 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,对应的函数值 $f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,那么常数 A 就叫做函数$f(x)$当 $x\to x_0$ 时的极限,记作$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 或$f(x)\to A$(当 $x\to x_0$).

左极限　$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A$ 或$f(x_0^-)=A$;　右极限　$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$ 或$f(x_0^+)=A$.

2°自变量趋于无穷大时函数的极限

设函数 $f(x)$当$|x|$大于某一正数时有定义.如果存在常数 A,对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在着正数 X,使得当 x 满足不等式$|x|>X$ 时,对应的函数值 $f(x)$都满足

不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,那么常数 A 就叫做函数$f(x)$当 $x\to\infty$时的极限,记作$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 或$f(x)\to A$(当 $x\to\infty$).

简单表述为:$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists X>0$,当$|x|>X$ 时,有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

类似地有:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$.

(2)函数极限的性质

函数极限的唯一性:如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,那么这个极限唯一.

函数的局部有界性:如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$ 时,有$|f(x)|\leqslant M$.

推论　函数极限的局部保号性:如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,而且 $A>0$(或 $A<0$),那么存在常数$\delta>0$,使得当$0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

如果$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A(A\neq0)$,那么就存在着 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$,当 $x\in\mathring{U}(x_0)$时,就有$|f(x)|>\dfrac{|A|}{2}$.

如果在 x_0 的某去心邻域内 $f(x)\geqslant0$(或 $f(x)\leqslant0$),而且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,那么 $A\geqslant0$(或 $A\leqslant0$).

函数极限与数列极限的关系:如果极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在,$\{x_n\}$为函数 $f(x)$的定义域内任一收敛于 x_0 的数列,且满足:$x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N}^+)$,那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

4.无穷小与无穷大

(1)无穷小

定义　如果函数 $f(x)$当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的极限为零,那么称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小.

在自变量的同一变化过程 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)中,函数 $f(x)$具有极限 A 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha$,其中 α 是无穷小.

(2)无穷大

定义　设函数 $f(x)$在 x_0 的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义).如果对于任意给定的正数 M(不论它多么大),总存在正数 δ(或正数 X)只要 x 适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$),对应的函数值 $f(x)$总满足不等式$|f(x)|>M$,则称函数 $f(x)$为当 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大.

定理　在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$为无穷大,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷小;反之,如果$f(x)$为无穷小,且 $f(x)\neq0$,则$\dfrac{1}{f(x)}$为无穷大.

5.极限运算法则

定理　有限个无穷小的和仍是无穷小.

定理　有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 有限个无穷小的乘积也是无穷小.

定理 如果 $\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$,那么

(1) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

(2) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

(3)若 $B\neq0$,则 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}$.

推论 如果 $\lim f(x)$存在,而 C 为常数,则 $\lim[Cf(x)]=C\lim f(x)$.

推论 如果 $\lim f(x)$存在,而 n 是正整数,则 $\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n$.

定理 设有数列$\{x_n\}$和$\{y_n\}$.如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A,\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$,那么

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot y_n=A\cdot B$;

(3)当 $y_n\neq0(n=1,2,\cdots)$且 $B\neq0$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{A}{B}$.

定理 如果 $\varphi(x)\geqslant\psi(x)$,而 $\lim\varphi(x)=a,\lim\psi(x)=b$,那么 $a\geqslant b$.

复合函数的极限运算法则 设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $y=f(u)$与函数 $u=g(x)$复合而成,$f[g(x)]$在点 x_0 的某去心邻域内有定义,若$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0,\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$,且存在 $\delta_0>0$,当 $x\in\mathring{U}(x_0,\delta_0)$时,有 $g(x)\neq u_0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=A$.

6.极限存在准则、两个重要极限

准则Ⅰ 如果数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$及$\{z_n\}$满足下列条件:

(1) $y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,3\cdots)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a,\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,

那么数列$\{x_n\}$的极限存在,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

准则Ⅰ′ 如果(1)当 $x\in\mathring{U}(x_0,r)$(或$|x|>M$)时,$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$,

(2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=A,\ \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}h(x)=A$,

那么 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)$存在,且等于 A. 夹逼准则.

准则Ⅰ及准则Ⅰ′称为两边夹准则.

准则Ⅱ 单调有界数列必有极限.

两个重要极限:$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e};\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e};\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

柯西极限存在准则:数列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是:对于任意给定的正数 ε,存在着这样的正整数 N,使得当 $m>N,n>N$ 时,就有$|x_n-x_m|<\varepsilon$.

7.无穷小的比较

定义 如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=0$,则称 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$;如果 $\lim\frac{\beta}{\alpha}=\infty$,则称

β 是比 α 低阶的无穷小；如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=c\neq 0$，则称 β 与 α 是同阶无穷小；如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha^k}=c\neq 0, k>0$，则称 β 是关于 α 的 k 阶无穷小；如果 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=1$，则称 β 与 α 是等价无穷小，记作 $\alpha \sim \beta$.

定理　β 与 α 是等价无穷小的充分必要条件为 $\beta=\alpha+o(\alpha)$.

定理　设 $\alpha \sim \alpha', \beta \sim \beta'$，且 $\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim \frac{\beta}{\alpha}=\lim \frac{\beta'}{\alpha'}$.

常用的等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，$\sin x \sim x$，$\arcsin x \sim x$，$\tan x \sim x$，$\arctan x \sim x$，$\ln(1\mp x) \sim x$，$1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2$，$e^x-1\sim x$，$(1+\beta x)^\alpha-1\sim \alpha\beta x$，$a^x-1=e^{x\ln a}-1\sim x\ln a$.

8. 函数的连续性与间断点

(1)函数的连续性

定义　设函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的某邻域内有定义，如果对任 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|x-x_0|<0$ 时，有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$，则称函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点连续.

定义　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义(等价定义)　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，如果 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

左连续　如果 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 左连续.

右连续　如果 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 右连续.

(2)函数的间断点

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义. 如果 $f(x)$ 有下列三种情形之一：

①在 $x=x_0$ 没有定义，

②虽在 $x=x_0$ 有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，

③虽在 $x=x_0$ 有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$，

则点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

如果 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点，但左极限 $f(x_0^-)$ 及右极限 $f(x_0^+)$ 都存在，那么称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点. 不属于第一类的间断点，称为第二类间断点. 在第一类间断点中，左、右极限相等者称为可去间断点，不相等者称为跳跃间断点. 在第二类间断点中，左、右极限至少有一个为无穷大者称为无穷间断点，左、右极限至少一个为振荡不存在情形者称为振荡间断点.

9. 连续函数的运算与初等函数的连续性

(1)连续函数的和、差、积、商的连续性

定理　设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在点 x_0 连续，则它们的和(差) $f\pm g$、积 $f\cdot g$ 及商 $\frac{f}{g}$ (当 $g(x_0)\neq 0$ 时)都在点 x_0 连续.

(2)反函数与复合函数的连续性

定理　如果函数 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调增加(或单调减少)且连续，那么它的反函数 x

$=f^{-1}(y)$也在对应的区间 $I_y=\{y|y=f(x),x\in I_x\}$上单调增加(或单调减少)且连续.

定理 设函数 $y=f[g(x)]$由函数 $y=f(u)$与函数 $u=g(x)$复合而成,$\mathring{U}(x_0)\subset D_{f\circ g}$. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=u_0$,而函数 $y=f(u)$在 $u=u_0$ 连续,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f[g(x)]=\lim\limits_{u\to u_0}f(u)=f(u_0)$.

定理 设函数 $y=f[g(x)]$是由函数 $y=f(u)$与函数 $u=g(x)$复合而成,$U(x_0)\subset D_{f\circ g}$.若函数 $u=g(x)$在 $x=x_0$ 连续,且 $g(x_0)=u_0$,而函数 $y=f(u)$在 $u=u_0$ 连续,则复合函数 $y=f[g(x)]$在 $x=x_0$ 也连续.

(3)初等函数的连续性

基本初等函数在它们的定义域内都是连续的.

一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

10.闭区间上连续函数的性质

(1)有界性与最大值最小值定理

最大值和最小值的概念:对于在区间 I 上有定义的函数$f(x)$,如果有 $x_0\in I$,使得对于任一 $x\in I$ 都有$f(x)\leqslant f(x_0)$($f(x)\geqslant f(x_0)$),则称 $f(x_0)$是函数 $f(x)$在区间 I 上的最大值(最小值).

有界性与最大值最小值定理 在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取得它的最大值和最小值.

(2)零点定理与介值定理

零点定理 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)$与 $f(b)$异号(即 $f(a)\cdot f(b)<0$),那么在开区间(a,b)内至少有一点 ξ,使 $f(\xi)=0$.

介值定理 设函数 $f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续,且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及$f(b)=B$,那么,对于 A 与B 之间的任意一个数C,在开区间(a,b)内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=C(a<\xi<b)$.

推论 在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值m 之间的任何值.

二、释疑解难

问题1 分段函数是初等函数吗?分段函数是几个函数?

答 分段函数一般不是初等函数.初等函数是基本初等函数(含常函数)经有限次四则运算及复合步骤,且能用一个式子表示的函数,分段函数在其定义域内的不同范围用不同的表达式表示,所以,分段函数一般不是初等函数.

但有些分段函数亦可用一个式子表示,如 $f(x)=|x|$写成分段形式为

$$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0.\end{cases}$$

但$|x|=\sqrt{x^2}$,因而 $f(x)=|x|$是初等函数.而且 $f(x)=|x+a|$也是初等函数.

顺便指出:常见的分段函数如下:

①绝对值函数 $|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0;\end{cases}$

②符号函数　$\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0;\end{cases}$

③取整函数　$y=[x]$,$[x]$表示不超过 x 的最大整数.

分段函数是一个函数.

80

问题 2　两个函数的对应法则相同,则这两个函数相同.

答　不对.由函数的定义知道,函数有两个基本要素:自变量的取值范围,即定义域;对应法则,即函数的依赖关系.所以只有定义域和对应法则完全相同时,才表示一个函数.

顺便指出,对于函数的"对应法则"的特点及 y 的取值特点,在函数定义中并无限制,所以可能有不同的形式:

①当自变量 x 的值变动时,因变量 y 取值并不随 x 而变化,总取一个值.如 $y=c$(常值)也表示函数,称为常值函数;

②如果函数的对应法则的形式是解析表达式,且它可以表示为 $y=f(x)$,则称此为函数的显式表示;

③如果函数的对应法则由方程 $F(x,y)=0$ 所确定的,则称 y 是 x 的隐函数,$F(x,y)=0$ 称为函数 y 的隐式表示;

④如果函数对应法则是由几个解析式来表示,则称之为分段函数;

⑤如果自变量 x 与函数 y 是通过第三个变量 t 联系起来的,如 $x=x(t)$,$y=y(t)$,则称之为用参数方程表示的函数;

⑥如果对应法则是由表格或图形表示的,则称之为函数的表格表示法或图形表示法.

问题 3　函数符号 $f(x)$的意义是什么?

答　对于一个函数 $y=f(x)$,$x\in D$,概括起来,它包括五个因素:①自变量 x,②定义域 D,③因变量 y,④对应法则 f,⑤值域 W.在这五个因素之中,具有决定性意义的是对应法则和定义域两个要素.值域是由这两个要素唯一确定的,至于自变量和因变量采用什么符号表示,不是问题的本质.如 $y=f(x)$,$u=f(v)$,$x\in D$,$v\in D$ 两者表示同一个函数.

另外,函数关系 $y=f(x)$中的 f 或$f(\cdot)$,是一个数学"运算"符号,即自变量与因变量之间的对应法则,而 $f(x)$就是指把运算 $f(\cdot)$作用于 x 之上而产生的结果.因此,对应法则 $f(\cdot)$,可理解为一个"转换器",只要把定义域中的任何一个值 x 输入到这部"转换器"中,通过它的"作用"之后,输出来的,就是值域中相应函数值 $f(x)$.再者,$f(\cdot)$是抽象的,只表示是一部转换器.当给出具体的函数时,才具体化.例如 $f(x)=x\cos x+\sqrt[3]{1+x^3}$,表明具体的对应规则为 $f(\cdot)=(\cdot)\cos(\cdot)+\sqrt[3]{1+(\cdot)^3}$,而 $f(x)$是以 x 替代(　)中的"·",若 x 换成$\varphi(x)$即为函数 $f[\varphi(x)]=\varphi(x)\cos\varphi(x)+\sqrt[3]{1+\varphi^3(x)}$.

$f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

例　设 $f(\frac{1}{x})=x+\sqrt{1+x^2}\,(x>0)$,求 $f(x)$.

$f(x)=\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}$

通过令 $u=\frac{1}{x}\Rightarrow f(u)=\frac{1+\sqrt{1+u^2}}{u}$,用 x 代替 u,得 $f(x)=\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$.

问题 4　任何周期函数必定有最小周期.

答　不对.注意周期函数的定义:设 $f(x)$的定义域为 D,若存在一个不为零的数 l,使对