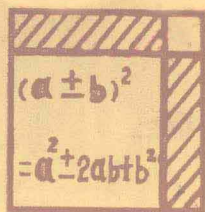


蔡道法 编著
童立国

初中数学综合题精析

(代数、三角部分)



中国展望出版社

初中数学综合题精析

(代数、三角部分)

蔡道法 童立国 编著

中国展望出版社

· 北京

初中数学综合题精析

(代数、三角部分)

蔡道法 童立国 编著

★

中国展望出版社出版

(北京西城区太平桥大街4号)

安徽省繁昌县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

开本787×1092毫米1/32 印张6.31 插页0 字数140,000

1989年3月 北京第1版 1989年3月 第1次印刷

印数1——12,000

ISBN7-5050-0395-x/G·56 定价: 2.10元

编 者 的 话

中学数学教学的任务是使学生切实学好数学基础知识，具有正确迅速的运算能力、一定的逻辑思维能力和一定的空间想象能力，达到开发智力、培养能力的目的，没有知识，便谈不到能力，没有能力，便难以掌握知识。作为数学学科，做足够数量的练习，是牢固掌握基础知识和基本技能的必要途径。只有有目的、有步骤地去解题，才能把知识转化为能力。因此，不论是开发智力，还是培养能力，都离不开解题。著名数学家苏步青教授讲过：“学数学，我一向提倡学生多演算一些习题，……，一般说来，多演算习题，第一是为了加强基础概念、定义、定理（包括证明）的理解；第二是为了训练我们运算技巧和逻辑思维。这就是“懂”和“熟”的结合”。这一段话既指了解题在学习数学中的重要性，又指了解题的目的性。为此，我们选题、演题都要围绕它的目的来进行，既不能越多越好单纯追求数量而陷入题海，又不能一味追求偏题、怪题。

在数学题中有一类是综合题，由于解这类题须灵活地运用多方面的知识，在知识、运算技巧与思维能力方面都有较高的要求，因此具有一定的难度，但这因为这类题在知识、技巧、思维方面所具有的“综合性”特征，所以它在开发智力，培养能力方面起着极其重要和独特的作用，是其他类型的题目所不能替代的。因此，它在数学解题中占有重要的位置，而在各种升学、竞赛的试题中占有一定的比重。解综合

题既难，而又要去驾驭它，怎么办？那就必须去掌握其解题规律，任何事物都有其发生、发展规律，解综合题也同样如此，本书即是为了帮助初中同学掌握解数学综合题规律而编写的。尽管综合题中综合了多方面的知识，但却有主次、轻重之分，本书按照题中所涉及的主要知识为线索，以课本中主要内容为顺序，从教材重点和同学学习难点出发，有针对性地通过对典型例题的剖析，从知识与思维两个方面来揭示解题规律，分析解题时的思考方法。在例题的演示中，通常都有“分析”或“说明”，帮助读者思考与抓住关键，并且以揭示规律行之有效的“题组”形式进行，每个小标题实际上就是一组题，通过一组题的“异中有同”和“同中有异”就能显示出这组题求解时的基本规律，必要时在题组后面再配以说明，以帮助总结规律。

书中题目的难度是以初中升高考试题中的综合题为参照标准，在范例中选用了一些省市高中招生试题中质量较好的题目，作了精心分析。为了扩大读者的视野以及培养思维能力，书中还精选了一些难度适中（不脱离初中教材）的国内、外初中数学竞赛试题作为例题，通过这些试题构思的巧妙以及解题时的高超的技巧，可以更好地培养我们灵活应用知识的能力以及开发智力。而且还能让我们欣赏到数学所包含的内在美。

为便于读者检查自己对解综合题的规律掌握程度，书后备有“练习题”近百道，可供练习和检查之用。由于综合题一般都较难，为帮助读者，几乎各都附有“提示”或“略解”。

蔡道法 童立国

1988.10.15

目 录

引 言

- 一、什么是数学综合题…………… (1)
- 二、怎样解数学综合题…………… (2)
- 三、解数学综合题时需要注意的几点…………… (3)

第一章 有关数与式的综合题

- 一、有关数的综合题…………… (4)
- 二、有关解析式的综合题…………… (8)

第二章 有关方程的综合题

- 一、有关方程根的判别式的综合题…………… (33)
- 二、有关韦达定理的综合题…………… (55)
- 三、有关高次方程、无理方程、字母系数方程
的综合题…………… (59)
- 四、有关三角形方程的综合题…………… (63)

第三章 有关对数的综合题

- 一、有关对数定义的综合题…………… (71)
- 二、有关对数运算的综合题…………… (73)
- 三、有关对数的首数和尾数的综合题…………… (74)
- 四、有关对数的应用题…………… (76)

第四章 有关函数的综合题

- 一、有关函数解析式的综合题…………… (79)
- 二、有关分段函数的综合题…………… (82)
- 三、有关最值函数的综合题…………… (84)
- 四、已知解析式欲求某些未知项函数的
综合题…………… (85)
- 五、有关函数图象的综合题…………… (90)

第五章 关于求三角函数值的综合题

- 一、与面积有关的求三角函数值的综合题…………… (98)
- 二、与正弦、余弦定理有关的求三角函数值的
综合题…………… (101)
- 三、与勾股定理、射影定理、相交弦定理等有
关的求三角函数值的综合题…………… (108)

第六章 关于解三角形的综合题

- 一、与面积有关的解三角形的综合题…………… (113)
- 二、多次应用(或结合使用)正、余弦定理的
解三角形的综合题…………… (117)
- 三、与方程(组)有关的解三角形的综合题… (120)

第七章 有关正、余弦定理的综合题

- 一、斜三角形与直角三角形相结合的综合题… (122)
- 二、将四边形问题转化为三角形的综合题…… (127)
- 三、与不等式、条件等式有关的综合题……… (132)

第八章 有关判定三角形的综合题

- 一、用正、余弦定理判定三角形的综合题…… (135)
- 二、用正、余弦定理结合其他知识来判定三角形的综合题…… (138)

第九章 有关三角形角边关系转换的

- 综合题…… (144)
- 练习题…… (148)

引 言

一、什么是数学综合题

数学题从组成题目的结构来看，主要是计算题和证明题两类（或两者兼有）。但从做题的意图来看，又可以分作这样三种主要类型：

（1）思考题 这类题通常带有概念性质的。用意是使我们更加深刻地去理解定义、定理、公式直至数学用语和符号；

（2）基本题 这类题主要是指那些较为单一的、不太复杂的计算题、证明题。所谓单一的就是指解题时所用到的知识范围比较小，通常只涉及到数学中的一个分支中的一部分知识。解这类题的用意是为了及时掌握和巩固所学的基本知识，以及培养解题的基本技能。课本中的练习题大多属于这类题。

（3）综合题 这类题所涉及的知识范围比较广，有的是用到同一个数学分支（科目）中的几个部分知识，这种综合题通常称作小综合题；还有的则要用到不同数学分支（科目）中多方面的知识。在解综合题时不仅要求具有熟练的知识，而且在解题的技能、技巧上也有更高的要求，还要求有善于观察、思考、探索、灵活、……等多方面的能力。作这类题的目的，在于使我们将所学的知识能互相联系、贯穿起来，既起到复习、提高的作用，又能培养我们全面分析问题

题、综合运用知识的能力，这将有助于全面地提高数学水平，并有力地促进智力（思维能力）的发展，其意义已远远超过学会解题的范围。

如果从解题的方法来看，又可以把数学题分成常规题（标准题）和非常规题（非标准题），前一种指的是用常规方法来解的题，后一种则是指的要独立思考、见解独到和有创造性的题。现今有一些数学竞赛题即属于非常规题。

二、怎样解数学综合题

数学题是千变万化的，没有一成不变的解法可套，何况综合题更具有“综合”的特点，难度更大，但事物都有它的发展规律，解综合题也有一定的思路可循。

1、解综合题的一般思考方法

分析法 这种方法是从题目的所求出发，一步一步探索欲使要求（结论）达到（成立）所需要的条件，直至归结到已知条件，这个过程是一个“由果索因”的过程，也就是“未知—需知—已知”的过程。

综合法 从已知条件入手考虑问题，中间通过一连串的可知，最后达到题目的所求。这个过程是“由因导果”的过程，也是“已知—可知—未知”的过程。

有时，则需将两种思考方法结合起来进行。

不论采用哪种方法，都要紧紧扣住已知条件，对照结论，设法将已知条件与结论互相沟通。

2、解综合题时需要做到的几点

(1) 要搞清题目所涉及的概念，熟悉题目所涉及的定理、公式和基本技巧等，这就是说，要解好综合题，必须要有相当程度的基本训练为基础，也即，掌握好思考题与基本题的解法是解好综合题的前提；

(2) 综合题是由若干不同部分的知识、基本技能技巧综合而成的，因此要掌握综合题的解法，就要剖析综合题的结构，要搞清其中的主要部分与次要部分以及它们的相互关系，学会把综合题“肢解”成若干基本题；

(3) 探测、尝试可能的解题途径；

(4) 题目的有些条件是隐藏的，需要我们仔细观察、深入分析，把它们“挖掘”出来，有的关系是迂回曲折的，需要我们创造条件，化暗为明，增设“桥梁”，使之沟通。

(5) 深入研究范例的类型和解法，比较例题与所要解决的题目的异同，以起到触类旁通、举一反三的作用。

三、解数学综合题时需要注意的几点

(1) 题目是由哪些基础知识和基本技能综合而成的；

(2) 连结它们的工具性知识是什么；

(3) 题目中各个步骤、环节之间的逻辑关系是什么。

第一章 有关数与式的综合题

(一)有关数的综合题

解有关数的综合题、必须掌握有关数的概念和性质，常用的有：

质数与合数 一个大于1的整数 a ，如果只有1和它本身两个约数，再也没有别的约数，这样的正整数叫做质数（或素数）；一个正整数除了1和本身以外，如果还有另外约数，这样的正整数叫做合数。

奇数和偶数 能被2整除（即余数为0）的数称为偶数，被2除后余数为1的数称为奇数。

在初中学了负数进入有理数后，那么就有负偶数和负奇数。

0作为偶数。

通常用 $2k-1$ 表示奇数，用 $2k$ 表示偶数（ k 为整数）

从上面的定义可以知道：两个连续的整数中必有一个偶数，因此它们的积 $k(k+1)$ （ k 是整数）一定是偶数。

奇偶数的运算有以下性质：

偶数 $\pm$ 偶数=偶数；

奇数 $\pm$ 奇数=偶数；

奇数 $\pm$ 偶数=奇数；

奇数 $\times$ 奇数=奇数；

奇数 $\times$ 偶数=偶数；

偶数 $\times$ 偶数=偶数。

完全平方数 一个数如果是一个整数的完全平方，那么这个数称为完全平方数。如1、4、9、16、25、……、等等。

常用到完全平方数的性质是：任何一个完全平方数的个位数字只能是0、1、4、5、6、9。

要注意“完全平方数”与“完全平方式”是不同的，例如 a^2+b^2 并不是完全平方式，但它的值却可以是完全平方数：当 $a=3$ ， $b=4$ 时，它的值即取25。

与此有关的，要知道无理式的值不一定是无理数，也可以是有理数，例如 $\sqrt{a^2+b^2}$ （ a 、 b 为有理数）是无理式，但当 $a=3$ ， $b=4$ ，它的值是有理数5，当 $a=\frac{4}{3}$ ， $b=1$ 时，它的值是有理数 $\frac{5}{3}$ 。

总之，“数”与“式”是有联系的，但不要把它们等同起来。

一个小数的整数部分与小数部分，指的是精确值而不是近似值，如无理数 $\sqrt{3}$ ，它是一个无限不循环小数，1是它的整数部分，但不能说0.732是它的小数部分。

例1、设 a 是整数，而且 $a \neq \pm 1$ ，求证 a^4+4 是合数。

分析 按照合数的意义，设法将 a^4+4 分解因式，看看这些因式是否只是取1和它本身，如果不是，那么它就是合数，因此我们从分解因式着手。

$$\begin{aligned}\text{证明 } a^4+4 &= (a^4+4a^2+4) - 4a^2 \\ &= (a^2+2)^2 - 4a^2\end{aligned}$$

$$= (a^2 + 2a + 2)(a^2 - 2a + 2)$$

$$= [(a+1)^2 + 1][(a-1)^2 + 1]$$

∵ a 是整数, 而且 $a \neq \pm 1$,

∴ $(a+1)^2 + 1$ 和 $(a-1)^2 + 1$ 不会是 1, 当然, 它们各自也不会是 $a^4 + 4$ 。

∴ $a^4 + 4$ 除 1 和本身以外尚有其他因数, 从而 $a^4 + 4$ 是合数。

例 2、如果 n 是自然数, 那么

$$\frac{1}{8} [1 - (-1)^n] (n^2 - 1) \text{ 的值}$$

(A) 一定是 0; (B) 一定是偶数;

(C) 是整数但不一定是偶数;

(D) 不一定是整数。

分析 n 是自然数, 因此分别取偶数和奇数, 看看所给出的式子取值情况, 再从答案中作出正确的选择。

解 当 n 取偶数时, $1 - (-1)^n = 0$, 所以所给式子的值为 0;

当 n 取奇数时

$$\text{因式 } [1 - (-1)^n] = 1 - (-1) = 2;$$

用 $n = 2k - 1$ (k 是自然数) 代入因数 $(n^2 - 1)$ 中去, 得

$$n^2 - 1 = (2k - 1)^2 - 1$$

$$= 4k^2 - 4k = 4k(k - 1)$$

$$\text{此时 } \frac{1}{8} [1 - (-1)^n] (n^2 - 1)$$

$$= \frac{1}{8} \times 2 \times 4k(k - 1) = k(k - 1)$$

∵ k 是自然数, ∴ $k(k - 1)$ 是偶数 (其中包括 0; 当

$k=1$ 时, 取值为0)。

由于0也是偶数, 因此不论 n 取偶数还是取奇数, 所给式子的值是偶数。

因此正确的答案应选取(B)。

说明 不少同学以为0不是偶数, 而是整数, 因此错误地选择了(C)。

例3、证明: 四个连续的整数的积加上1, 等于一个奇数的平方。

分析 设四个连续的整数为 k 、 $k+1$ 、 $k+2$ 、 $k+3$ 其中 k 是整数, 而

$k(k+1)(k+2)(k+3)+1$ 是和的形式, 要证明它是一个奇数的平方, 即要化成积的形式, 要把和的形式化作积的形式, 就要通过因式分解来进行

证明 假设这四个整数的积加上1为 M , 则

$$\begin{aligned} M &= k(k+1)(k+2)(k+3)+1 \\ &= [k(k+3)][(k+1)(k+2)]+1 \\ &= (k^2+3k)(k^2+3k+2)+1 \\ &= (k^2+3k)^2+2(k^2+3k)+1 \\ &= (k^2+3k+1)^2 \\ &= [k(k+1)+(2k+1)]^2 \end{aligned}$$

由于 $(k^2+3k+1)^2$ 虽然是一个完全平方数, 但即不易断定 k^2+3k+1 为奇数, 所以将它化作 $k(k+1)+(2k+1)$, 其中 $k(k+1)$ 是两个连续整数的积, 所以是偶数, 又因为 $2k+1$ 是奇数, 而偶数+奇数=奇数, 因而

$k(k+1)+2k+1$ 是奇数, 从而证明了 M 是一个奇数的平方

例4、如果质数 p 、 q 满足关系式 $3p + 5q = 31$ ，那么
 $\log_2 \frac{p}{3q+1}$ 的值是

解 $\because 3p + 5q = 31$ ，其中31为一奇数，由奇、偶数运算性质可知： $3p$ 和 $5q$ 中必有一个是偶数而另一个是奇数。

(1) 如果 $3p$ 是偶数

此时只有 $p = 2$ ，从而求得 $q = 5$ 。

于是

$$\log_2 \frac{p}{3q+1} = \log_2 \frac{2}{3 \times 5 + 1} = \log_2 \frac{1}{8} = -3;$$

(2) 如果 $5q$ 是偶数

此时只有 $q = 2$ ，从而求得 $p = 7$ 。

于是

$$\log_2 \frac{p}{3q+1} = \log_2 \frac{7}{3 \times 2 + 1} = \log_2 1 = 0。$$

$\therefore \log_2 \frac{p}{3q+1}$ 的值是 -3 或 0 。

说明 此题的关键是“31”这个数字，这是解题的首要条件，可见，审题时特别要注意隐含的条件。

(二)有关解析式的综合题

1、解题时常用的基本方法

解题时除去要概念清晰（如算术根、绝对值、对称式等）、公式熟练、性质明确（如关于 x 、 y 的对称多项式可化为 $x+y$ 、 xy 的形式来表示）以外，更要掌握好一些基本方法与技巧，如配方法、换元法、设元法、待定系数法……

等等。在技巧上，如常利用公式

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b \quad \text{得到}$$

$(\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = 1$ ，于是有
 $\sqrt{3} + \sqrt{2} = (\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-1}$ 。这在解题中是常常出现的。

 例1、化简

$$\sqrt{x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}} \left(x + \frac{1}{x}\right), \quad (0 < x < 1).$$

$$\begin{aligned} \text{解、} & \sqrt{x^2 - 2 + \frac{1}{x^2}} \left(x + \frac{1}{x}\right) \\ &= \sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \left(x + \frac{1}{x}\right)} \\ &= \left(\frac{1}{x} - x\right) \left(\frac{1}{x} + x\right) = \frac{1}{x^2} - x^2. \end{aligned}$$

说明 (1) 解题中用到变换

$$\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = x^2 - 2 + \frac{1}{x^2},$$

这个等式很重要，要熟练地掌握此式的顺用（从左用到右）和逆用（从右用到左）；

(2) 注意条件的使用

$$\because 0 < x < 1, \therefore \frac{1}{x} > 1, \text{从而 } x < \frac{1}{x};$$

(3) 此题涉及算术根的概念

$$\because x < \frac{1}{x}, x - \frac{1}{x} < 0, \therefore \text{按算术根的意义}$$

$$\sqrt{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{x} - x \text{ 而不是 } x - \frac{1}{x}.$$

例2 已知 $a < -6$ ，化简