工业自动控制理论

上海纺织工学院

1979年7月

第一章　系统脉冲响应的估计

§1　什么是线性系统

为了研究线性系统的识别方法，必须对线性系统有一个明确的认识，以免在使用方法时产生“张冠李戴”的谬误。为简单明了见，不妨先不管它固有的物理结构，这样，我们就把线性系统表示为一个具有输入 $x_1(t)$，$x_2(t)$……，$x_n(t)$ 和输出 $u_1(t)$，$u_2(t)$，…，$u_n(t)$ 的框图（如图3所示）。

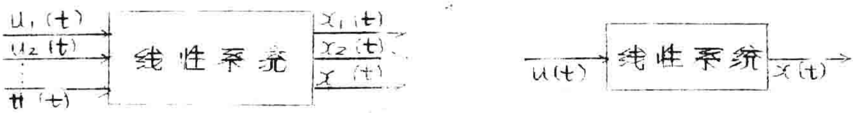

图3 线性系统框图

一般说来 $x(t)$ $u(t)$ 都是时间信号，即随时间变化的物理量。

为了说明线性系统，我们不妨先做一个实验：用二个电阻（1KΩ），一个二极管2CP11，四节1#号电池，一个0-24V可调稳压电源构成图4所示电路，把 u_1 u_2 间的电压作为输入电压记作 $u(t)$，x_1 x_2 两端的电压就是输出电压记作 $x(t)$，当A点的电压小于6伏时，下式成立：

$$x(t)=u(t)/2$$

例如，当 $u(t)=2$、4、6、8、10伏时 $x(t)$ 将为1，2，4，5伏。当 $u(t)$ 变化为 $\alpha u(t)$ 时，输出相应地变为 $\alpha x(t)$，我们把具有这种性质的系统称为线性系统。这里 α 为比例常数。

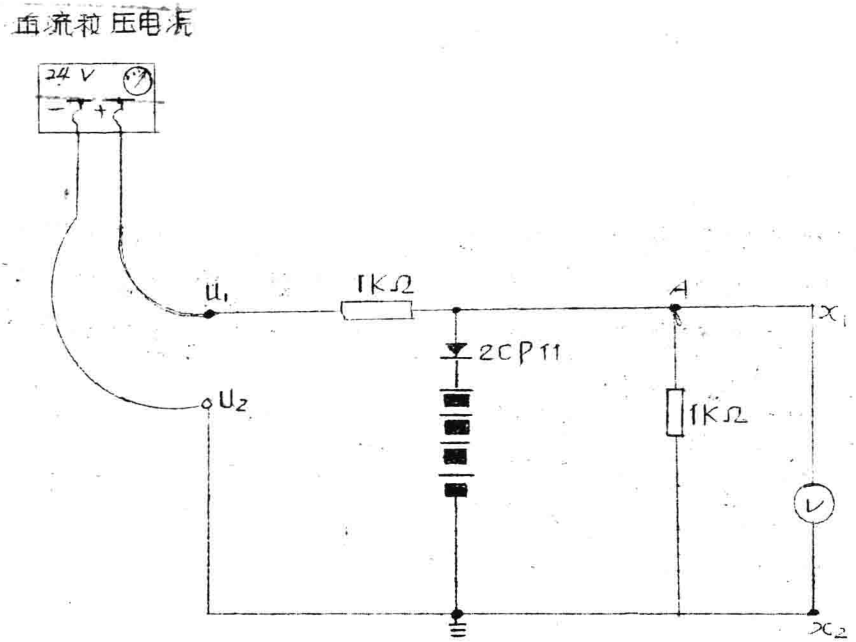

图4　线性系统简单实验

但是，当A点的电压大于6伏时如$u(t)=14$伏、18伏时$x(t)$将不能成比例的增加，因此，当A点电压大于6伏时，这个系统不是线性系统。

线性系统的定义，线性表示一种非曲线变化的属性。一个线性系统，在某种意义上，就是输出与输入成正比关系的系统，也就是说，如果$u(t)$输入的输出为$x(t)$，对于任意常数α，那么$\alpha u(t)$的响应（输出是$\alpha x(t)$）。用符号表示时，如果

$$u(t) \longrightarrow x(t)$$

那么　$$\alpha u(t) \longrightarrow \alpha x(t) \qquad (1.1)$$

这种性质称为齐次性，所有线性系统都具有齐次性。但是线性系统不仅包括（1.1）的关系，而且具有叠加性，换言之，对于某一类输入号$\{u(t)\}$，如果

$$u_1(t) \longrightarrow x_1(t)$$
$$u_2(t) \longrightarrow x_2(t)$$

则 $$u_1(t)+u_2(t) \longrightarrow x_1(t)+x_2(t) \qquad (1.2)$$

若一个系统具有齐次性和叠加性，称为线性系统 (1.1)

和（1.2）也可以合併成（1.3）式。于是，一个系统若满足。

$$\alpha u_1(t)+\beta u_2(t) \longrightarrow \alpha x_1(t)+\beta x_2(t)$$

其中α、β为常数，则该系统称为线性系统。（1.1）—（1.3）式的表示方法换成运算符号表示：

$$x(t)=H[u(t)]$$

当且仅当H是线性变换，即$H[\alpha u_1(t)+\beta u_2(t)]=\alpha H[u_1(t)]+\beta+[u_2(t)]$时，系统是线性系统。如果α是有理数的话，由系统的叠加性可以推出系统的齐次性。但是，存在这样的变换满足叠加性而不满足齐次性。然而，这仅仅是少数病态的例子，物理上是不会发生的。因此我们常常用检验叠加性来验证系统是否线性。

例1 假设一个系统的输入输出间的关系可以用下式来描述

$$x(t)=au(t)+b \qquad (1.5)$$

其中a、b为常数，x(t)和u(t)的关系可以用图5来表示。

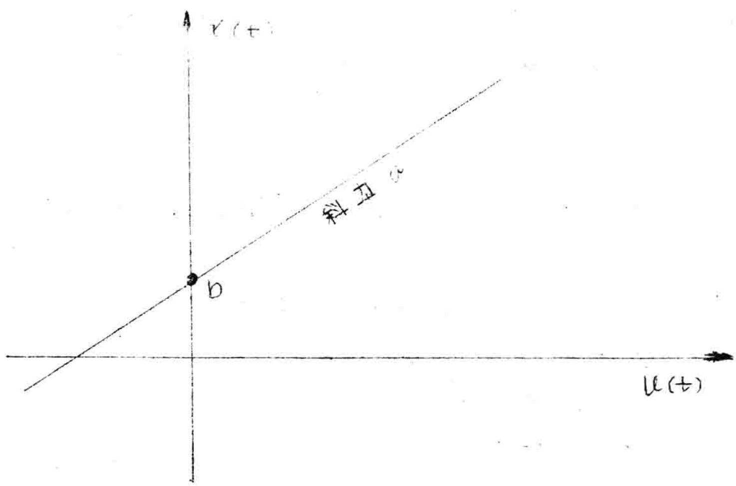

图5 输入u(t)与输出x(t)的关系

图5所示的系统是线性系统吗？让我们检验它是否满足叠加性：如果，我们施加一输入量$u_1(t)$，那么其输出量为$x_1(t)=au_1(t)+b$，若加输入量$u_2(t)$，则其输出量$x_2(t)=au_2(t)+b$。若加输入量$u_1(t)+u_2(t)$，那么它相应的输出量为$a(u_1(t)+u_2(t))+b$而不是$au_1(t)+au_2(t)+2b$，只有当$b=0$时叠加性才成立。因此当$b\neq0$时即使$x(t)$和$u(t)$是线性方程，系统仍不是线性系统。当然我们可以用一个方法把它变为线性系统来处理。

一般说来，几乎可以认为，只要加以足够精密的分析，任何一个物理系统都是非线性的。我们说某一个实际的物理系统是线性系统，其意思只是说它可以充分精确地用一个线性系统加以近似地代表而已。所谓"充分精确"，就是说实际系统与线性系统的差别，对于具体研究的问题来说已经小到无关紧要的地步。

连续时间系统和离散时间系统

如果一个系统的输入和输出在任何时刻都可以变化的，那么该系统称为连续时间系统。这时输入$u(t)$和输出$x(t)$是连续时间变量t的函数。要注意，输入和输出本身不一定是连续函数。

另一些系统，这些系统的信号只在断续的瞬间改变。例如电子数字计算机运算中的状态。这种不连续的时间间隔可以是恒定的，也可以是不同的。信号在两个区间之间可以没有定义。这些系统称为离散时间系统。用$x(k)$，x_k或$x(k)$表示第k个区间内信号值。

连续时间系统通常用微分方程作模型，而离散时间系统用差分方程作为模型。

例2．图6所示系统的输入值序列u_1，u_2，……，由它所变换而得的输出值序列为y_1，y_2，……。

当$t=k$时，输出由$y_k=\theta x_k+x_{k-1}$给出，θ为常数。如果，有二个输入值序列$\{x_k\}$及$\{x_k\}$，两个相应的输出值

序列为$\{y_k\}$及$\{y'_k\}$，这里

$$y_k = Gx_k + x_{k-1}$$
$$y'_k = Gx'_k + x'_{k-1} \qquad (1.4)$$

如果输入$\{x_k + x'_k\}$序列，那么它的输出值序列必为：

$$G(x_k + x'_k) + (x_{k-1} + x'_{k-1}) = Gx_k + x_{k-1} + Gx'_k + x'_{k-1} \qquad (1.5)$$

因此，图6所示的系统是一个线性系统。

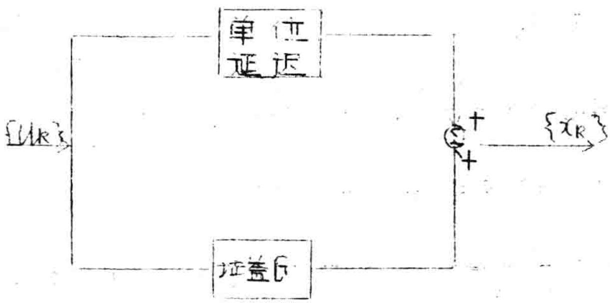

图6　一个时间离散的线性系统

平稳系统（时不变系统）和时变系统

线性系统还可以分为时变系统和时不变系统，时不变系统也称为平稳系统，系统的参数随时间变化的，称为时变系统，这种系统常用带有时变系数的线性微分方程或差分方程作为模型。时不变系统常以常系数线性微分方程或差分方程作为模型。

我们可以通过输入信号和输出信号在时间上的平移，来说明平稳性的意义。假设$u(t)$产生输出$x(t)$，现在让我们讨论在输入信号滞后T的输入信号$u(t-T)$所产生的输出信号。如果系统是平稳的，$u(t-T)$的输出为$x(t-T)$。平稳系统的特性用符号来表示如下，如果

$$u(t) \longrightarrow x(t) \qquad (1.6)$$

那么　$$u(t-T) \longrightarrow x(t-T)$$

其中T和t为任意值。

与（1.6）式类似地，离散时间系统可以描述如下，如果

$u(n) \longrightarrow x(n)$ (1.7)

则 $u(n-k) \longrightarrow x(n-k)$

其中 n 和 k 为任意值。

方程（1.6）和（1.7）的另一种说法是，系统响应与时间零点无关，仅取决于输入信号的形式。

用常系数线性微分方程描述的系统是线性平稳系统。

设 n 阶的微分方程为

$$b_n\frac{d^n x(t)}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}x(t)}{dt^{n-1}}\cdots+b_0x(t)=u(t) \qquad (1.8)$$

把（1.8）式写成算子表示的关系式

$$\left(b_n\frac{d^n}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+b_0\right)x=u(t) \qquad (1.9)$$

写得更简单些，如：

$$L(x)=u(t) \qquad (1.10)$$

这里 L 是算子符号

$$L=b_n\frac{d^n}{dt^n}+b_{n-1}\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots b_0 \qquad (1.11)$$

容易验证 L 是一个线性算子，即对于任意的 C_1、C_2 必有

$$L[C_1x_1+C_2x_2]=C_1L(x_1)+C_2L[x_2] \qquad (1.12)$$

这就是说，如果 $u_1(t)$ 对应的输出为 $x_1(t)$，$u_2(t)$ 对应的输出为 $x_2(t)$，于是有

$$L[x_1]=u_1(t) \qquad L[x_2]=u_2(t)$$

由于（1.12）式成立得到

$$L[C_1x_1+C_2x_2]=C_1u_1(t)+C_2u_2(t) \qquad (1.2)$$

因此，用常系数线性微分方程描写的系统满足，说明它是线性系统，这个微分方程的系数与时间原点是无关，因此系统是平稳

的。

§2 卷积公式

为了研究如何从系统的输入、输出来估计系统的脉冲响应，我们要推导表示输入、输出关系的卷积公式。为了叙述方便，从现在开始，我们用 $x(t)$ 表示系统输入讯号，$y(t)$ 或 $f(t)$ 表示系统的输出。

开始，我们把如图7所示的任意函数，表示成一系列脉冲的线性组合。

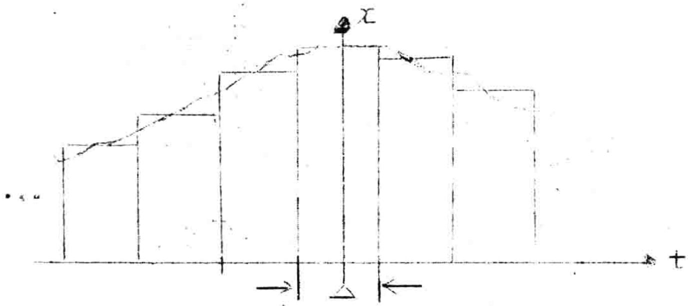

图7，用一系列脉冲的线性组合近似 $x(t)$

$x(t)$ 的近似式为

$$x(t)\approx\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x(n\Delta)P_\Delta(t-n\Delta) \qquad (2.1)$$

式中 $P_\Delta(t)$ 是高度为1，宽为 Δ 的脉冲，如图8所示的脉冲宽 Δ 越小，用于描述 $x(t)$ 的脉冲就越多，那么用图7所示的近似就越好。

我们定义 δ 函数：

$$\delta(t)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}P_\Delta(t) \qquad (2.2)$$

(2.2)式所示的极限过程可以用图9来表示。

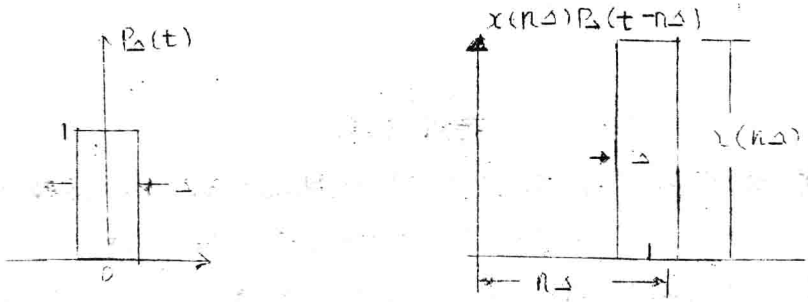

图8　　脉冲

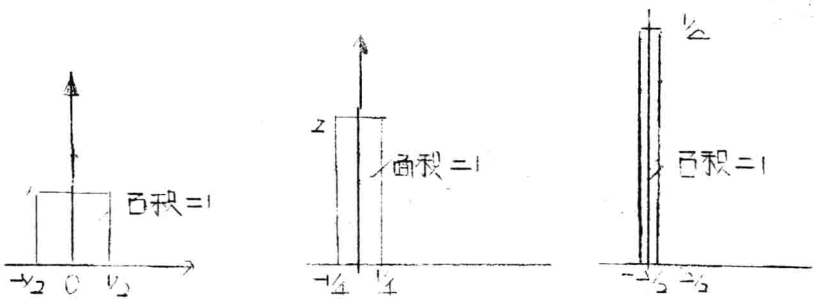

图9　由$P_\Delta(t)$ 当$\Delta \longrightarrow 0$时趋向δ函数的过程

粗略地说来，δ函数是一个具有无限大振幅和持续时间为零的脉冲，它是点电荷，是质量的抽象。δ函数是一个广义函数。δ函数具有下列性质：

(1)　$\delta(t)=0 \qquad t\neq 0$

(2)　$\delta(t)=+\infty \qquad t=0$

(3)　$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,dt=1$

式(1)表示$t=0$时$\delta(t)\longrightarrow+\infty$　利用δ函数的性质，$x(t)$可以表示成：

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

这是因为

$$x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\Delta)P_\Delta(t-n\Delta)$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\Delta)\left[\frac{1}{\Delta}P_\Delta(t-n\Delta)\right]\Delta \qquad (2.4)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau$$

式中$n\Delta$已由一个连续的变量τ所替代，Δ变为$d\tau$，

$$\delta(t-\tau)=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{\Delta}P_\Delta(t-\tau)$$

现在，把我们的注意力转到讨论连续系统的卷积公式上来。我们将重新表明，我们可以用输入与脉冲响应的卷积来表示线性平稳系统输入，输出的关系。

脉冲响应$h(t)$定义为输入是$\delta(t)$时系统的响应，即：

$$\delta(t)\longrightarrow h(t)$$

如果我们在系统输入端加一个面积等于k的δ-函数式的冲激，那么由于系统是线性的，其输出将为$kh(t)$即

$$k\delta(t)\longrightarrow kh(t)$$

由于系统是平稳的（时不变的），我们还可以得到，

$$k\delta(t-t_0)\longrightarrow kh(t-t_0)$$

为了求连续时间系统对于任意输入$x(t)$的响应，我们先用一系列脉冲响应的线性组合表示$x(t)$如（2.4），即

$$x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\Delta)\left[\frac{1}{\Delta}P_\Delta(t-n\Delta)\right]。\qquad (2.5)$$

式中$\frac{1}{\Delta}P_\Delta(t-n\Delta)$用它的极限来代替，那么$x(t)$可以表示为

$$x(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\Delta)\,\delta(t-n\Delta)\cdot\Delta \qquad (2.6)$$

如果我们把$x(t)$所含的一系列冲激序列作用于系统，然后计算每个冲激所产生的响应，把这些响应加起来是否就等于$x(t)$作用于系统所产生的响应呢？，由于线性系统的叠加性这个想法是可行的。各个冲激响应之和就等于$x(t)$的响应，

设$x(t)$作用于系统的响应——即系统输出——为$y(t)$。

对于每个冲量的响应可以迅速地求出如下：

在$t=0$处冲量产生的输出：

$$x(0)\cdot\Delta\cdot\delta(t)\longrightarrow x(0)\cdot\Delta\cdot h(t)$$

类似地，在$t=\Delta$处冲量产生的输出

$$x(\Delta)\cdot\Delta\cdot\delta(t-\Delta)\longrightarrow x(\Delta)\cdot\Delta\cdot h(t-\Delta)$$

一般地，在$t=n\Delta$处冲量产生的输出

$$x(n\Delta)\cdot\Delta\cdot\delta(t-n\Delta)\longrightarrow x(n\Delta)\cdot\Delta\cdot h(t-n\Delta)$$

$x(t)$的响应$y(t)$是这些个别响应之和，即

$$y(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\Delta)\cdot\Delta\cdot h(t-n\Delta)\qquad(2.7)$$

我们使$\Delta\to 0$，而冲量的数目增加（$1/\Delta$），$n\Delta$将趋向一个连续变量τ，（2.7）的和式趋向于一个积分，因此，由一个输入$x(t)$产生的输出$y(t)$是：

$$y(t)=\lim_{\Delta\to 0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n\Delta)\cdot\Delta\cdot h(t-n\Delta)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

但是当$\tau>t$时，$h(t-\tau)=0$，故上式可写成

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t}x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

作变量代换，$\lambda=t-\tau$ 则

$$y(t)=-\int_{\infty}^{0}h(\lambda)x(t-\lambda)d\lambda=\int_{0}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

我们把

$$\boxed{y(t)=\int_{0}^{\infty}h(\tau)x(t-\tau)d\tau}\qquad(2.8)$$

称为卷积公式

§3 估计脉冲响应的最小二乘法

考虑一个图10所示的单输入、单输出系统。

图10 单输入单输出系统

我们用卷积公式表示输出

$$z(t)=\int_0^{T_s} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau+n(t) \qquad (3.1)$$

式中T_s是系统的持续时间。

什么是系统的持续时间？如何来测定一个系统的持续时间呢？

从一个脉冲号输入系统的瞬间开始，当输出的幅值始终小于其峰值的5%所需的最短时间定义为这个系统的持续时间，如图11所示。

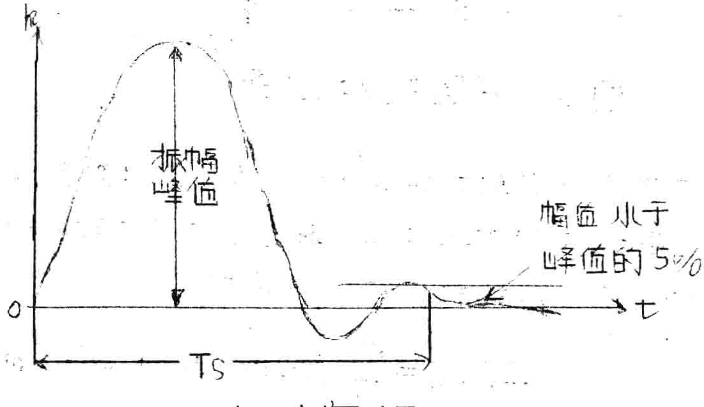

图11 持续时间图

测定系统持续时间的方法：

(1)在系统上加一脉冲信号，测量脉冲输入瞬间到脉冲响应振幅始终小于5%峰值的最短时间。

(2)在系统上施加一阶跃信号，根据系统阶跃响应的导数是系统的脉冲响应这一事实，计算出脉冲响应的采样值，然后把脉冲响应采样值描成脉冲响应函数，定出幅振小于5%峰值的时时刻。

设$P(t_i)$表示阶跃响应的采样值，$i=0,1,2,\cdots\cdots n$

脉冲响应的采样值为

$$\hat{h}(t_i)=\frac{P(t_{i+1})-P(t_i)}{\Delta t} \qquad (3.2)$$

采样脉冲函数如图12所示。

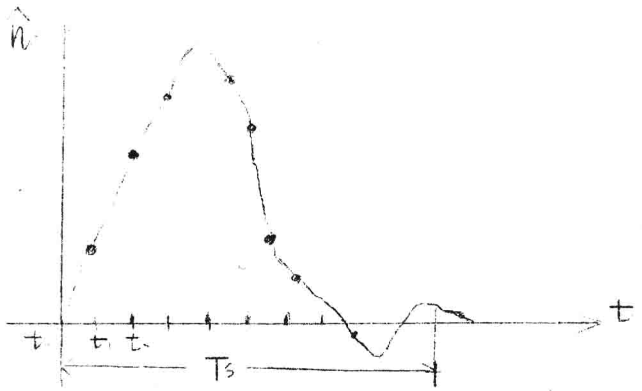

图12，采样脉冲函数

为了便于使用计算机$h(t)$，我们把时间$[0, T_s]$分成N等分，持续时间$T_s=N\cdot\Delta$，输出的采样时间T_m设$T_m=N_m\Delta$，相应地，(3.1)式就化为一求和式：

$$Z[i\Delta]=\sum_{j=0}^{N-1}h(j\Delta)\,x((i-j)\Delta)\Delta+n_i \qquad (3.3)$$

$$i=0,1,\cdots,N_m-1$$

其中n_i不仅包含采样时的余项$n(i\Delta)$，而且包含由于阶梯函数$x((i-j)\Delta)$近似连续函数$x(t-\tau)$而造成的误差，这里

$(j-i)\Delta=\tau-j\Delta$，$j=0,1,\cdots,N_s-1$，我们也可以用更为紧凑的记号来写(3.3)式

$$z_i=\sum_{j=0}^{N_s-1} h_j x(i-j)\Delta+n_i \qquad (3.4)$$

$$i=0,1,\cdots,N_m-1$$

离散的结果将问题大大简化了，这样我们用估计 $h_0,h_1,\cdots h_{N_s-1}$ 来代替对连续函数 $h(\tau)$ 的估计。

为了简化叙述，我们用矩阵写出(3.4)，得到

$$\begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{N_m-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_{-N_s+1} \\ & \cdots & \\ x_{N_m-1} & \cdots & x_{N_m-N_s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_0\Delta \\ \vdots \\ h_{N_s-1}\Delta \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} n_0 \\ \vdots \\ n_{N_m-1} \end{pmatrix} \qquad (3.5)$$

或用符号形式写成

$$\boxed{Z=A\beta+n} \qquad (3.6)$$

其中 $A=\begin{pmatrix} x_0 & \cdots & x_{-N_s+1} \\ & \cdots & \\ x_{N_m-1} & \cdots & x_{N_m-N_s} \end{pmatrix}$　　$\beta=\begin{pmatrix} h_0\Delta \\ h_{N_s-1}\Delta \end{pmatrix}$

$Z=\begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{N_m-1} \end{pmatrix}$，　　$n=\begin{pmatrix} n_0 \\ \vdots \\ n_{N_m-1} \end{pmatrix}$

例1. 为了分析液压压下系统的动态特性，在该系统的输入端加一斜坡信号如图13所示，测得系统的特征时间为 $T_s=0.34$ 秒，输

出的测写时间为Tm=0.46秒。采样间隔为0.02秒，即Δ=0.02。
测写数据记录如下：

i	$x(t)$	$y(t)$	i	$x(t)$	$y(t)$	i	$x(t)$	$y(t)$
0	0	0	11	1	2.38	22	1	2.92
1	0.105	0	12	1	2.55	23	1	2.92
2	0.210	0.05	13	1	2.65			
3	0.316	0.20	14	1	2.70			
4	0.421	0.38	15	1	2.75			
5	0.526	0.80	16	1	2.80			
6	0.632	1.10	17	1	2.83			
7	0.737	1.375	18	1	2.86			
8	0.842	1.64	19	1	2.88			
9	0.947	1.90	20	1	2.90			
10	1	2.15	21	1	2.92			

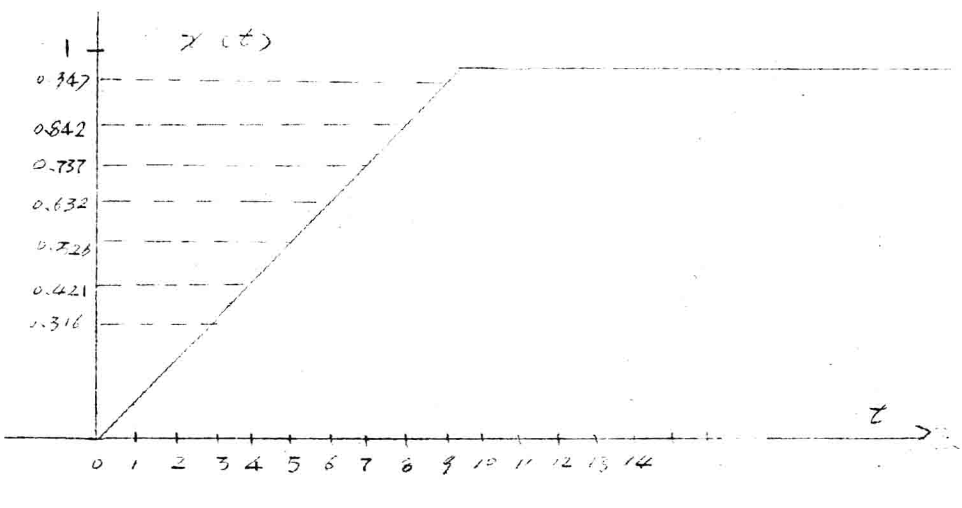

图15 斜坡形输入信号

在本例中 $N_s=17$ $N_m=23$ $\Delta=0.02$ 由此可以得到A矩阵

$$A = \begin{bmatrix} x_0 & x_{-1} & x_{-2} & x_{-3} & x_{-4} & x_{-5} & x_{-5} & x_{-6} & x_{-7} & x_{-8} & x_{-9} & x_{-10} & x_{-11} & x_{-12} & x_{-13} & x_{-14} & x_{-15} & x_{-16} \\ x_1 & x_0 & x_{-1} & x_{-2} & x_{-3} & x_{-4} & x_{-5} & x_{-6} & x_{-7} & x_{-8} & x_{-9} & x_{-10} & x_{-11} & x_{-12} & x_{-13} & x_{-14} & x_{-15} \\ x_2 & x_1 & x_0 & x_{-1} & x_{-2} & x_{-3} & x_{-4} & x_{-5} & x_{-6} & x_{-7} & x_{-8} & x_{-9} & x_{-10} & x_{-11} & x_{-12} & x_{-13} & x_{-14} \\ x_3 & x_2 & x_1 & x_0 & x_{-1} & x_{-2} & x_{-3} & x_{-4} & x_{-5} & x_{-6} & x_{-7} & x_{-8} & x_{-9} & x_{-10} & x_{-11} & x_{-12} & x_{-13} \\ \cdots \\ \\ \\ x_{22} & x_{21} & x_{20} & x_{19} & x_{18} & x_{17} & x_{16} & x_{15} & x_{14} & x_{13} & x_{12} & x_{11} & x_{10} & x_9 & x_8 & x_7 & x_6 \end{bmatrix}$$

其中 $x_0 = x_{-1} = x_{-2} = \cdots = x_{-16} = 0$

$x_1 \cdots x_{22}$ 如上页表中所列值

$z_1, \cdots z_{16}$ 的数值列于上表，$z_i = h(i\Delta)$，$i = 0, 1, 2, \cdots, 16$.

用(3.6)式的记号，我们所讨论的问题就变为：给定矩阵A和观测向量z，求估计参数β。最小二乘法的估计方法是使余项平方和在整个观测区间上最小，令

$$J = \sum_{i=0}^{N-1} n_i^2 \qquad (3.7)$$

用矩阵形式表示：

$$J = n^T n \qquad (3.8)$$

由(3.6)和(3.8)可得

$$J = (z - A\beta)^T (z - A\beta)$$

最小二乘法估计β^*满足

$$J^* = \min_{\beta} J = J|_{\beta=\beta^*} \qquad (3.9)$$

我们将看到，最小二乘法估计有一个重要性质：是存在一个且仅存在一个局部极小值，它就是整体的最小值，这就是说，最小二乘法估计是唯一的。

§十 有关的矩阵分析知识

在最小二乘法的矩阵推导中，需要用到有关矩阵分析的知识。这些矩阵分析内容在控制论的其他地方也是极为有用的。因此，我们把这些内容集中在一起成为一节。

向量或矩阵关于数量的导数定义。

定义1 如果 $z(t)=(z_1(t)\ z_2(t)\ \cdots\ z_m(t))^T$

那么
$$\frac{dz(t)}{dt}\triangleq\left(\frac{dz_1(t)}{dt},\frac{dz_2(t)}{dt},\cdots,\frac{dz_m(t)}{dt}\right)^T$$

这里的符号"$\triangleq$"表示"定义为"

定义2 如果

$$F(t)=\begin{pmatrix} f_{11}(t) & f_{12}(t) & \cdots & f_{1n}(t)\\ & & & \\ f_{m1}(t) & f_{m2}(t) & \cdots & f_{mn}(t)\end{pmatrix}$$

$$\frac{dF(t)}{dt}\triangleq\left(\frac{df_{ij}(t)}{dt}\right)\quad i=1,\cdots m,\ j=1,\cdots,n;$$

数量值函数关于向量的导数的定义

定义3 设 $f=f(x)$ 是一数量函数，x 为 n 维向量，

$$\frac{df}{dx}\triangleq\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2},\cdots\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^T$$

函数 f 关于 x 的导数也称为函数 f 的梯度函数，可记作 $\mathrm{grad}f$.

向量关于向量变量的导数，

定义4 设 $z(x)$ 是一个向量函数，即

$$z(x)=\begin{pmatrix} z_1(x)\\ z_2(x)\\ \vdots\\ z_m(x)\end{pmatrix}\qquad x=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$$