费曼

1965年诺贝尔物理学奖获得者

RICHARD P. FEYNMAN 著作选译 第一辑

QUANTUM ELECTRODYNAMICS

量子电动力学讲义

R.P.费曼 著 张邦固 译 朱重远 校

高等教育出版社

1965年诺贝尔物理学奖获得者

RICHARD P. FEYNMAN 著作选译 第一辑

QUANTUM ELECTRODYNAMICS

LIANGZI DIANDONG LIXUE JIANGYI

量子电动力学讲义

R. P. 费曼 著 张邦固 译 朱重远 校

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

图字：01-2013-2080 号

图书在版编目（CIP）数据

量子电动力学讲义 /（美）费曼（Feynman, R. P.）著；
张邦固译. — 北京：高等教育出版社，2013. 5
书名原文：Quantum electrodynamics
ISBN 978-7-04-036960-1

Ⅰ. ①量… Ⅱ. ①费… ②张… Ⅲ. ①量子力学–电动力学–研究 Ⅳ. ① O413.1 ② O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 037270 号

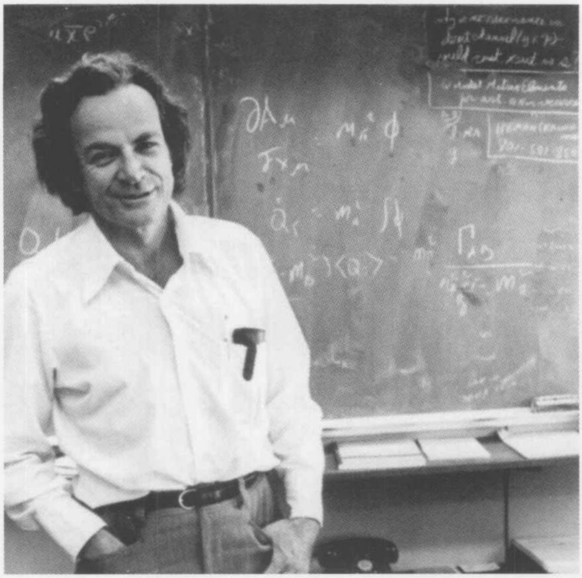
策划编辑 王 超　　责任编辑 王 超　　封面设计 王 洋　　版式设计 余 杨
插图绘制 尹 莉　　责任校对 刁丽丽　　责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印　　刷 涿州市星河印刷有限公司
开　　本 787mm × 1092mm　1/16
印　　张 14
字　　数 260 千字
插　　页 1
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn

版　　次 2013 年 5 月第 1 版
印　　次 2013 年 5 月第 1 次印刷
定　　价 59.00 元

物 料 号　36960-00

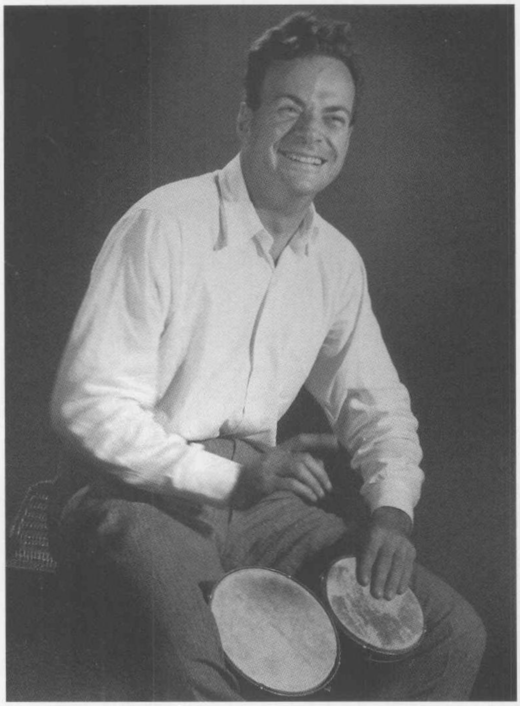


理查德·菲利浦斯·费曼（Richard Phillips Feynman，1918—1988），著名美国物理学家，加州理工学院物理系教授，诺贝尔物理学奖得主。

1918 年 5 月 11 日，费曼出生于纽约市皇后区。童年时，费曼接受了来自父亲的科学启蒙教育，父亲所启发的思考方式影响了费曼的一生。高中毕业后进入麻省理工学院学习，并于 1939 年获得学士学位。随后进入普林斯顿大学念研究生，师从约翰·惠勒（J. A. Wheeler），1942 年获得理论物理学博士学位。1943 年进入洛斯阿拉莫斯国家实验室，参与了曼哈顿计划。1945 年费曼开始在康奈尔大学任教，1951 年转入加州理工学院。在加州理工学院期间，因其幽默生动、不拘一格的讲课风格深受学生欢迎。1963 年出版《费曼物理学讲义》。1965 年，费曼因在量子电动力学方面的贡献与施温格（Julian Schwinger）、朝永振一郎（Sin-Itiro Tomonaga）共同获得诺贝尔物理学奖。1972 年获得奥斯特教学奖章。1986 年，费曼受邀调查挑战者号航天飞机失事事件。1988 年 2 月 15 日，费曼因癌症于加州洛杉矶与世长辞。

在学生时期，费曼就表现出了不凡的研究能力。他的大学毕业论文题目是《分子中的力》，在这篇论文中，他提出了后来所称的费曼 - 海尔曼定理。在整个科研生涯中，费曼在物理学的几个领域都有建树。除了因之荣获诺贝尔物理学奖的量子电动力学方面的工作之外，广为人知的另外两项重大贡献：一是量子力学的路径积分形式，这种形式从经典力学中的最小作用量原理延伸出来，通过“对历史求和”来处理量子力学问题，这是有别于薛定谔的波动力学及海森伯的矩阵力学的第三种量子力学形式；二是费曼图，这一工具大大简化了量子场论的计算。费曼的研究工作还包括：低温下液氦的超流动性理论；弱相互作用的 V-A 理论；强相互作用的部分子理论等。

费曼不仅是一位顶尖的科学家，同时也是一名优秀的教师。费曼非常热爱教学工作，他曾写道：“我不相信，如果不教书我还能过得下去……教学和学生使我的生命得以延续。如果有人给我创造一个很好的环境，但是我不能教学的话，那我永



在洛斯阿拉莫斯期间，为了排遣工作压力，费曼开始以打鼓自娱，渐渐鼓艺日精，后来曾以芭蕾舞团的职业乐师身份登台演出。图为费曼击打邦戈鼓。

远不会接受它，永远不会。”20 世纪 60 年代初，美国一些理工科大学鉴于当时的大学基础物理教学与现代科学技术的发展不相适应，纷纷试行教学改革。在这个背景下，费曼参与了加州理工学院基础物理教学的改革尝试。他从 1961 年 9 月到 1963 年 5 月，进行了为期两个学年的有关基础物理学的系列讲演。他的讲演经过莱顿（Robert B. Leighton）和桑兹（Matthew Sands）的整理，以《费曼物理学讲义》之名于 1963 年出版。《科学美国人》这样赞誉这套书：“尽管这套教材深奥难懂，但是它的内容丰富而且富有启发性……它已经成为讲师、教授和低年级优秀学生的学习指南。”这套书本来是面向大学一二年级学生的，可是最能认识到这套书价值的却是物理教师，他们从中找到了自己授课的灵感。故而有人称费曼为“老师的老师”。

除了《费曼物理学讲义》之外，费曼还有许多优秀的著述：《量子力学与路径积分》《量子电动力学讲义》《费曼统计力学讲义》《基本过程理论》《光子 – 强子相互作用》《费曼引力学讲义》《费曼计算学讲义》等。这些书无不有鲜明的“费曼风格”，即对基本概念、定理和定律的讲解生动清晰、通俗易懂，而且特别注重物理分析和描述，反映了费曼自己以及其他在前沿研究领域工作的物理学家所通常采用的分析和处理方法。无论对于学生还是教师，这些书都有着极大的参考价值。

费曼的一生多彩多姿。除了对理论物理学做出了巨大贡献之外，他还是一名探险者、鼓手、艺术家和玛雅文化专家。可以用这样一句话来总结描述费曼：一位独辟蹊径的思考者，超乎寻常的教师，尽善尽美的演员，一位热爱生活和自然的人。

中译本前言

本书作者 R. P. 费曼是国际著名物理学家, 由于量子电动力学方面的工作, 曾荣获 1965 年度诺贝尔物理学奖。鉴于本书是一本名著, 而且量子电动力学理论本身又是那样美妙, 这点不仅表现在理论形式的和谐, 更主要的是理论预言与实验事实之间有惊人的一致性, 例如, 目前测量电子反常磁矩的实验值已高达十二位有效数字, 而量子电动力学的理论计算值竟能在实验误差之内与之相符合, 因此, 我希望把本书介绍给读者。

翻译过程中有几点需要说明:

1. 本书原是讲课笔记。公式图表均按讲课的次序编号。为了便于读者阅读, 中译本将第 1 讲、第 2 讲等补进目录中了。

2. 为了在符号上尽量一致, 中译本将原附录中用黑体表示 $\boldsymbol{A} = A_\mu\gamma_\mu$ 的记法改成与正文一致的记号 $\boldsymbol{A} = A_\mu\gamma_\mu$。

3. 对于原书中明显的印刷错误, 已作更正, 不再一一说明。

朱重远老师详细校订了译稿, 特在此深表谢意。

张邦固

2013. 1. 3

序

本书的材料，基本上是 1953 年在加利福尼亚理工学院开设的三学期量子力学课程中最后一学期课堂笔记的内容。实际上，中间一学期就讲授过一些光与物质相互作用的问题，这些内容也收集在本书中，作为前六讲。从第 7 讲起，开始讲述相对论性理论。

本书的目的是，以尽可能简单易懂的方式介绍量子电动力学的主要结果和计算过程。有许多攻读实验物理学学位的学生，并不打算继续研读更高深的理论物理研究生课程，这门课就是为他们的需要而设置的。我希望，他们能够学会怎样计算光子过程的各种截面，这些截面对于设计高能物理实验，例如使用加利福尼亚理工学院回旋加速器的实验，是十分重要的。因此，本书没有涉及理论物理学家在处理更复杂的 π 介子和核子相互作用问题时要用到的许多量子电动力学内容。也就是说，书中没有讨论量子电动力学许多不同公式化体系之间的关系，如场的算符表示，也没有明显讨论 S 矩阵性质等。在更高深的量子场论课程里会有这些内容的。尽管如此，本课程仍能自成体系。这很像讲授 Newton 定律的课程，即使删去了最小作用量原理或者 Hamilton 方程这样一些内容，但从物理学角度来讲，它仍能完整地讨论整个力学。

把初等量子力学和量子电动力学放在一门课程里只讲授一年，这是一种试验。这样做是基于这样的想法：为了进入新的物理学领域，学生必须牢固地掌握先前教学阶段的内容。头两个学期安排的是普通量子力学，采用 Schiff 的书作为主要参考书（删去了同量子电动力学有关的 X, XII, XIII 和 XIV 各章）。不过，为了能够顺利地讲授本课程后面的内容，我们以式 (15–3) 至 (15–5) 所表述的方式，对传播子理论和势散射作了详细介绍。另一独特之点是将非相对

论 Pauli 方程写成本书第 4 页中的形式。

这次试验并不成功。全部内容要一年讲完显得过多了。因此, 本书中有很多内容, 现在是放在上过整整一年量子力学研究生课程以后再来讲授。

本书是根据 A. R. Hibbs 记录的原始笔记, 后经 H. T. Yura 和 E. R. Huggins 编辑和修改整理而成的。

R. P. 费曼

加利福尼亚, 帕萨迪纳

1961 年 11 月

目 录

序

一、光与物质的相互作用 —— 量子电动力学 1
第 1 讲 1
Fermi 方法的讨论 1
第 2 讲 2
量子电动力学规则 2
第 3 讲 4
第 4 讲 7
光的吸收 7
第 5 讲 11
偶极近似中的选择定则 11
第 6 讲 15
辐射平衡 15
光散射 16
自能 18

二、狭义相对论基本原理及主要结论概述 19
第 7 讲 19
第 8 讲 23
真空中 Maxwell 方程的解 23
相对论粒子力学 25

三、相对论波动方程 29
第 9 讲 29
单位 29

Klein–Gordon、Pauli 方程和 Dirac 方程 · · · 30
第 10 讲 · · · 35
γ 矩阵代数 · · · 35
等价变换 · · · 38
相对论不变性 · · · 39
Dirac 方程的 Hamilton 形式 · · · 39
第 11 讲 · · · 40
Dirac 方程的非相对论近似 · · · 44
第 12 讲 · · · 45

四、自由粒子 Dirac 方程的解 · · · 49
第 13 讲 · · · 49
运动电子自旋的定义 · · · 52
波函数归一化 · · · 54
第 14 讲 · · · 57
求矩阵元的方法 · · · 57
负能态的解释 · · · 58

五、量子电动力学中的势问题 · · · 62
第 15 讲 · · · 62
正负电子对产生及其湮没 · · · 62
能量守恒 · · · 62
传播子 · · · 63
第 16 讲 · · · 66
传播子 $K_+(2,1)$ 的应用 · · · 66
跃迁概率 · · · 67
Coulomb 势对电子的散射 · · · 68
第 17 讲 · · · 71
自由粒子传播子的计算 · · · 71
第 18 讲 · · · 76
动量表象 · · · 76

六、粒子与光相互作用的相对论处理 · · · 80
第 19 讲 · · · 80
原子辐射 · · · 81
原子中电子对 γ 射线的散射 · · · 81

关于末态密度的补充 …… 83

Compton 辐射 …… 84

第 20 讲 …… 85

第 21 讲 …… 89

正负电子对湮没为双光子 …… 91

第 22 讲 …… 93

静止正电子湮没 …… 93

轫致辐射 …… 94

正负电子对产生 …… 97

第 23 讲 …… 98

矩阵元对自旋态求和的方法 …… 98

原子中 Coulomb 场的屏蔽效应 …… 101

第 24 讲 …… 102

七、几个电子的相互作用 …… 103

第 25 讲 …… 107

量子电动力学“规则”的推导 …… 107

电子–电子散射 …… 109

八、某些修正项的解释与讨论 …… 112

第 26 讲 …… 112

电子–电子相互作用 …… 112

电子–正电子相互作用 …… 115

电子偶素 …… 115

电子之间, 正电子之间或电子–正电子之间的双光子交换 …… 117

第 27 讲 …… 118

电子的自能 …… 118

出现在量子电动力学中积分的积分法 …… 121

第 28 讲 …… 123

自能积分以及外势 …… 123

在外场中的散射 …… 124

第 29 讲 …… 127

伪“红外灾难”的消除 …… 130

第 30 讲 132
研究红外困难的另一途径 132
对原子中电子的影响 133
第 31 讲 136
封闭圈过程, 真空极化 136
势对光的散射 138

九、Pauli 原理和 Dirac 方程 140

A. 附录 143
A.1　跃迁概率公式中的数值因子 143
A.2　正电子理论 145
A.3　量子电动力学的时空协变方法 169

一、

光与物质的相互作用
——量子电动力学

第 1 讲

光与物质相互作用的理论称为量子电动力学. 由于表述这一理论有许多等价方法, 使这一学科显得比实际情况难. 最简单的一种方法是 Fermi 方法. 但是, 我们将采用另一出发点, 即仅仅假设光的发射及吸收. 用这种形式, 理论可以得到最直接的应用.

Fermi 方法的讨论[1)]

假设整个宇宙的所有原子都装在一个盒子中. 按照经典方法, 这个盒子可以看作有一些本征模, 这些模可用谐振子分布以及这些振子与物质之间的耦合来描述.

过渡到量子电动力学, 仅需假设这些谐振子是量子力学振子, 而不是经典振子. 它们具有能量 $\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\hbar\omega, n=0,1,2,\cdots$, 零点能为 $\dfrac{1}{2}\hbar\omega$. 于是, 这个盒子看成是充满了能量分布为 $n\hbar\omega$ 的光子. 光子与物质的相互作用使第 n 类光子的数目改变 ± 1 (发射或吸收).

可把盒子中的波表示为平面驻波、球面波或平面行波 $\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})$. 人们可以说, 在所有电荷之间有瞬时库仑相互作用 e^2/r_{ij}, 而且仅是横波. 于是库仑力可以直接加进 Schrödinger 方程. 其他形式的表达式有 Hamilton 形式的 Maxwell 方程、场算符等.

---

1) *Revs. Modern Phys.*, **4**, 87(1932).

Fermi 方法导致了无穷大自能项 e^2/r_{ii}. 采用适当坐标系统可以消除这一项, 但这样一来, 横波贡献变成无穷大 (其解释更为含糊不清). 这一异常现象, 是现代量子电动力学的中心问题之一.

第 2 讲

量子电动力学规则

此处不加证明地把 "量子电动力学规则" 叙述如下:

1. 一个原子系统在从一种状态跃迁到另一种状态的过程中, 吸收一个光子的振幅准确地等于在下列势作用下作同一跃迁的振幅: 此势等于表示该光子的经典电磁波势, 只要: (a) 该经典电磁波已归一化到其能量密度为 $\hbar\omega$ 与每立方厘米找到此光子的概率的乘积; (b) 将实的经典波分解成两个复波 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$, 只取 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}$ 部分; (c) 在微扰中势仅作用一次, 即电磁场强度仅应保留到一级.

在规则 1 中把 "吸收" 一词换成 "发射" 时, 仅需用 $\exp(\mathrm{i}\omega t)$ 代替 $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$.

2. 每立方厘米可获得的具有给定极化的状态数是

$$\mathrm{d}^3\boldsymbol{K}/(2\pi)^3.$$

注意, 这个数精确地等于经典理论中每立方厘米的正则模数.

3. 光子服从 Bose-Einstein 统计规律. 即对全同光子的集合, 其状态必须是对称的 (交换光子, 振幅相加). 另外, n 个全同光子状态的统计权重是 1 而不是经典的 $n!$.

于是, 只要适当地归一化, 一个光子总可以用经典 Maxwell 方程的解来表示.

尽管有许多表达方式都是可行的, 但用平面波来描述电磁场最方便. 一个平面波总可以只用一个矢量势来表示 (可用适当的规范变换使标量势为零). 一个实的经典波的矢势为

$$\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{e}\cos(\omega t - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})$$

我们使 $\boldsymbol{A}$ 的归一化与每立方厘米找到该光子的概率为 1 这件事相对应. 因此平均能量密度是 $\hbar\omega$.

对平面波

$$\boldsymbol{E} = -\left(\frac{1}{c}\right)\left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = \left(\frac{\omega a}{c}\right)\boldsymbol{e}\sin(\omega t - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})$$

和
$$|\boldsymbol{B}| = |\boldsymbol{E}|$$
因此平均能量密度等于

$$\begin{aligned}\frac{1}{8\pi}\overline{(|\boldsymbol{E}|^2 + |\boldsymbol{B}|^2)} &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\omega^2 a^2}{c^2}\right)\overline{\sin^2(\omega t - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})} \\ &= \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\omega^2 a^2}{c^2}\right)\end{aligned}$$

令其等于 $\hbar\omega$, 我们便得到
$$a = \sqrt{\frac{8\pi\hbar c^2}{\omega}}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= \sqrt{\frac{8\pi\hbar c^2}{\omega}}\boldsymbol{e}\cos(\omega t - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x}) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega}}\boldsymbol{e}\{\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})] \\ &\quad + \exp[+\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})]\}\end{aligned}$$

因此, 我们将一个原子系统吸收一个光子的振幅取为

$$\sqrt{\frac{4\pi\hbar c^2}{2\omega}}\exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})] \tag{2–1}$$

对于发射光子的情况, 矢势除指数上是正号外与上式相同.

例: 设一个原子处于能量为 E_{i} 的激发态 ψ_{i}, 跃迁到能量为 E_{f} 的末态 ψ_{f}, 其每秒跃迁概率与在矢势

$$a\boldsymbol{e}\exp[\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{K}\cdot\boldsymbol{x})]$$

作用下的跃迁概率相同, 后者表示发射的光子. 按照量子力学的规则 (Fermi 黄金规则)

跃迁概率/秒 $=(2\pi/\hbar)|_{\mathrm{f}}(\text{势})_{\mathrm{i}}|^2\cdot$ (态密度)

态密度 $=K^2\mathrm{d}K\mathrm{d}\Omega/(2\pi c)^3\mathrm{d}(\omega\hbar) = \omega^2\mathrm{d}\Omega/(2\pi c)^3\hbar$

可以用微扰理论来计算矩阵元 $U_{\mathrm{fi}} = {}_{\mathrm{f}}(\text{势})_{\mathrm{i}}$. 在下一讲再更详细地解释这一点. 在此, 我们首先强调给出同样的物理结果的位势选取不止一种 (这就是总可以选择光子的 $\phi = 0$ 的原因).

第 3 讲

用势

$$A(x, t) = ae \exp[-\mathrm{i}(\omega t - K \cdot x)]$$
$$\phi = 0$$

来表示平面波光子, 实质上是一种 "规范" 选择. 存在这种选择自由的原因是 Pauli 方程在量子力学规范变换下不变.

量子力学变换是经典变换的直接推广. 这里, 如果

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$
$$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$$

且 χ 是任一标量, 则代换

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - c\nabla\chi$$
$$\phi' = \phi + \frac{\partial\chi}{\partial t}$$

保持 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 不变.

在量子力学中, 引进了波函数的附加变换:

$$\psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}\psi$$

Pauli 方程在此变换下不变, 证明如下. 因为 Pauli 方程是

$$-\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right]\psi + e\phi\psi$$

于是有

$$\frac{\partial}{\partial x}\psi' = \frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}\psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}\frac{\partial\psi}{\partial x} - \mathrm{i}\frac{\partial\chi}{\partial x}\psi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}$$
$$p(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}\psi) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}(p - \hbar\nabla\chi)\psi$$

及

$$\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}\psi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}\left(\boldsymbol{p} - \hbar\nabla\chi - \frac{e}{x}\boldsymbol{A}\right)\psi$$

对时间的偏微商产生 $(\partial\chi/\partial t)\psi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}$ 的项, 这项中有 $\phi\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}\psi$. 因此, 作

$$\psi' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\chi}\psi$$
$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} - \frac{\hbar c}{e}\nabla\chi$$
$$\phi' = \phi + \frac{\hbar}{e}\frac{\partial\chi}{\partial t}$$

代换可以保持 Pauli 方程不变.

将光子的矢势 $\boldsymbol{A}$ 作为由态 i 跃迁到态 f 的微扰势引入 Pauli Hamilton 量. 任何可写为下式的与时间有关的微扰

$$\Delta H = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} U(x,y,z)$$

产生的矩阵元 U_{fi} 为

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{fi}} &= \int \psi_{\mathrm{f}}^{*} \Delta H \psi_{\mathrm{i}} \mathrm{d}V \\ &= \int \phi_{\mathrm{f}}^{*} \exp\left(\mathrm{i}\frac{E_{\mathrm{f}}}{\hbar}t\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} U(\boldsymbol{x}) \exp\left(-\mathrm{i}\frac{E_{\mathrm{i}}}{\hbar}t\right) \phi_{\mathrm{i}}(\boldsymbol{x}) \mathrm{d}V \end{aligned}$$

此式表明, 这一微扰与能量分别为 $E_{\mathrm{i}} - \omega\hbar$ 和 E_{f} 的初态和末态之间的时间无关微扰 $U(x,y,z)$ 的效果相同. 众所周知1), 最重要的贡献来自 $E_{\mathrm{f}} = E_{\mathrm{i}} - \omega\hbar$ 的那些态.

使用前面的结果，每秒跃迁概率是

$$P_{\mathrm{fi}} \mathrm{d}\Omega = \frac{2\pi}{\hbar} |U_{\mathrm{fi}}|^2 \frac{\omega^2 \mathrm{d}\Omega}{(2\pi c)^3 \hbar}$$

为确定 U_{fi}, 写出

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{p} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{2mc}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}) + eV \\ &= \frac{1}{2m}\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p} + eV - \frac{e}{2mc}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p}) \\ &\quad - \frac{e\hbar}{2mc}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \times \boldsymbol{A}) + \frac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \end{aligned}$$

按照规则, 势只起一次作用, 即只计及一级项, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$ 项不对此问题作贡献. 利用 $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{e} \exp[-\mathrm{i}(\omega t - \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{x})]$ 及二个算符关系式

(1) $$\nabla \times \boldsymbol{A} = \mathrm{i}\boldsymbol{K} \times \boldsymbol{e} a \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$$

(2) $$\boldsymbol{p} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{x}} = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{x}} (\boldsymbol{p} + \hbar \boldsymbol{K})$$

或

$$\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{x}} = \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{x}} (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{e} + \hbar \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{e})$$

---

1) 例如可参见 L. D. Landau 和 E. M. Lifshitz,《量子力学 (非相对性理论)》§40. 中译本: Л. Д. 朗道, E. M. 栗弗席兹. 量子力学 (非相对性理论). 严肃　译, 喀兴林　校. 北京: 高等教育出版社, 2008.