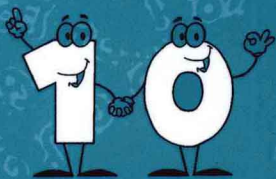


◎ 黄毅英 主编

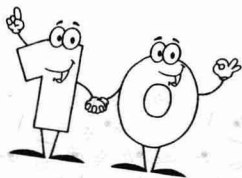


# 数学教师 不怕被学生难倒了

——中小学教师所需的数学知识

Maths teachers are not afraid of students' questions

本书由香港中文大学教育学院研究卓越奖奖学金（奖项编号 4411422）资助出版



# 数学教师 不怕被学生难倒了

——中小学教师所需的数学知识

Maths teachers are not afraid of students' questions

主 编 黄毅英  
副主编 张侨平  
作 者 （按笔画序排列）  
蔡劲航 陈镇民  
黄丽珍 苏洪雨  
谢明初 许世红  
张家麟

## 新出图证(鄂)字 10 号

### 图书在版编目(CIP)数据

数学教师不怕被学生难倒了——中小小学数学教师所需的数学知识/黄毅英主编.

武汉:华中师范大学出版社,2012.8

ISBN 978-7-5622-5574-1

I. ①数… II. ①黄… III. ①数学课—教学研究—中小学

IV. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 119084 号

### 数学教师不怕被学生难倒了——中小小学数学教师所需的数学知识

黄毅英 主编 ©

---

责任编辑:吴小岸	责任校对:王 炜	封面设计:胡 灿
编辑室:基教教材研发中心	电 话:027-67867317	
出版发行:华中师范大学出版社		
社址:湖北省武汉市珞喻路 152 号		
电话:027-67863040(发行部)	027-67861321(邮购)	
传真:027-67863291		
网址: <a href="http://www.ccnupress.com">http://www.ccnupress.com</a>	电子信箱: <a href="mailto:hscbs@public.wh.hb.cn">hscbs@public.wh.hb.cn</a>	
印刷:武汉理工大印刷厂	督印:章光琼	
字数:230 千字		
开本:787mm×1092mm 1/16	印张:13	
版次:2012 年 8 月第 1 版	印次:2012 年 8 月第 1 次印刷	
印数:1-3000	定价:32.00 元	

欢迎上网查询、购书

---

敬告读者:欢迎举报盗版,请打举报电话 027-67861321

本书如有印装质量问题,可向承印厂调换。

# 序一

目前，数学教师所需要的知识问题，已经成为各国教师教育研究和教师培训工作者关心与讨论的热点。在过去的30年，对教学所需的知识关注不断增加，有人的关心源自感觉，也有人的关心随着课程改革而变化。课改的进展对教师的要求与日俱增。各国教师感受的压力千差万别，然而，如何界定数学教学所需要的知识，是普遍感到关切的问题。数学教师应该知道什么，他们知道了什么，什么知识是可靠的，这些知识是否可以度量？如何度量？数学教师如何获得知识，在什么时候获得知识，在哪里获得并且巩固这些知识？都是当前数学教师职业教育令人感兴趣的问题。

## 1. 数学教育界关注的热点问题

近年来，国际上已经成立了许多国际社团，专门研究数学教师为教学而必须具备的知识。2008年，在墨西哥召开的国际数学教育大会（ICME11）上，成立了研究“教学所需的数学知识”的专门小组。教师的数学知识以及作为数学职业工作者的知识，两者有相似之处，也有重要差别。差别何在？既在于知识量不同，也在于知识领域不同。差异不仅表现为数学知识的性质，也表现为它的使用功能，人们对两者之间的差异正在研讨中。



一些研究以试验数据为基础，另一些研究对教师的数学知识作了理论思考，从而提供了数学教师教育的新想法。研究挑战了现行数学教师教育：一些大学的数学教师教育强调学术型的数学训练，与数学教学实践缺乏联系。然而，加拿大魁北克双语区的数学教师教育令人感到兴奋，那儿有数学教师知识研究的实体，教师教育工作者在其中发挥主要作用。

利用教师合作研究的课例，可以更好地理解教师在数学教学中，在学习情境中所需要的知识。研究源于19世纪70年代，加拿大蒙特利尔大学颁布了中学数学教师教育大纲，提出了数学教师为教学的数学知识的观点，指出教师的知识由两个相互补充的主轴构成：

(1) 从理论上说明数学教师在其数学教学中所需要的知识。

(2) 从教师的专业发展的角度对数学教学知识的结构成分和特点作出说明。

这个大纲虽然几经修改，但是一直指导着数学教师的职业发展。

## 2. 数学教学知识的四维结构

文中所提供的教学课例，是由合作研究中心提出的，有关学生在探索数学问题的一些片段，通过分析学生数学学习的一些过程，说明教师为数学教学所需要的知识，它们的成分、结构以及特征。

数学活动的关键因素是教师对活动的设计，它是教学计划的核心。在教学设计中，教师要调用四个维度的知识，即：

(1) 教学规定的维度：教学大纲，课程标准，相应的教材和教学参考书，以及这些文献所涉及的知识。

(2) 教学目标的维度：对活动目标的分析，关心它能够推动什么，思考学生在活动中应该得到哪些方面的发展。

(3) 数学的维度：与活动相关的数学知识，需要进行数学推理，推理中所用的概念、定理与性质，推理的数学表述，数学活动过程的记录。

(4) 教学法的维度：与他人一起学习，在数学活动中，班级和小组构成小社会，师生交流，相互争论，教学相长。

为了教学的需要，教师要从多方面考虑和设计数学活动，需要把各种各样的知识与能力有机结合起来，从而说明教师数学教学知识的多样性与综合性。作为数学教师，应该具有良好的数学功底，教师对课程中相关的数学内容要有较深入的认识，较广阔的学科视野，这是十分重要的。

## 3. 数学教学知识的实践性与综合性

教师的教学处理不能预先设定，而要根据学习活动的过程“见机行



事”，比较各组学生的情况，研究在数学活动中出现的问题，有针对性地进行。

这种“见机行事”涉及教师教学的重要方面，这就意味着，教师通过设计适当的问题，让学生鉴别他们的解答。这里也隐含师生交流各自数学视角以及解决问题的方法。

数学教师的教学知识，主要是在教学中产生，并在教学中得到检验和强化。在教学中所用到的知识，往往不局限于某个章节的知识，而与数学其他分支、其他学科的知识综合交织在一起。在教学中所用到的知识，也不局限于数学内容的知识，还包括动手实践，探索发现，从简单到复杂，从特殊到一般等科学认识论和方法论的原理。

数学教学的知识，它的产生具有突发性，它的运用具有机敏性。教师数学教学的知识有三个基本特点：

(1) 它的性质，接近于在行动中的知识，它的“见机行事”更甚于在传授与阅读中产生的知识。

(2) 它的情境特点，它与课堂出现的问题，以及解决问题的思路紧密相连。

(3) 学生问题的出现具有不可预知性。新课程要求教师能及时跟踪学生的想法，要根据各种具体情境，恰当地引导学生走出认知误区，为此教师必须有较高的知识水平与较强的引领能力。

数学教师在他们的教学中所遇到的情境，在方法上与数学家大不相同。在对问题的探索中，数学家肯定要把注意力集中在建立数学模型上，寻找一般的公式，提出正确的解法，关注结论合理性的检验，结论的推广与引申。有时又要规定各种各样的约束条件，研究问题解决的其他途径。而教师在实际教学中处理有关数学问题时，就会从不同的视觉进入。他们会联系到学生，联系到学生各种各样的策略，联系到自然产生的模型，教师会根据这个模型，对问题及其各种解法进行再思考。教师也会对学生自然产生的各种思路，他们所陈述的道理，这些理由的有效性，以及他们所取得的进步产生兴趣。

数学教学知识总是在教与学的线索中得以建立，得到解释。设计教学情境，同时用到了各种各样的知识来源，包括教育的，教学法的，数学的，甚至是规定性的。这些维度不是一成不变的。

数学思想方法的渗透是潜移默化的，关键是对学生情况的理解。课堂中的数学情境，总是把求解和探索结合在一起，各种因素综合交织。各种因素不会单独起作用，它们总是相互影响，相互选择，联袂演出。



在上述教学实践中所需要的知识，即使称之为教师的为教学的数学知识，也永远不是纯数学知识。它是各种知识的交织与组合，是非常特殊的知识。

#### 4. 数学教师是传道解惑的良师益友

由黄毅英教授主编的新作《数学教师不怕被学生难倒了》是由中国内地与香港多位资深教师联合撰写的。

强大的作者阵容，丰富的教学研究阅历，对师生所疑所惑的深入洞察，对课程相关问题的远见卓识，是《数学教师不怕被学生难倒了》一书魅力之所在。

该书的出版，能够配合中小学数学课程发展，适应教师职业发展的需要，帮助教师们较深入地探讨数学课程的一些重要的数学问题。我以为《数学教师不怕被学生难倒了》一书的吸引力在于如下几方面：

##### (1) 有助于加深对课程中有关数学问题的认识

《数学教师不怕被学生难倒了》一书围绕着中小学数学课程的主干内容展开，对一些重点问题作了较深入的阐述。例如，数系及其运算的发展问题，代数符号及其相关运算问题，对几何图形及其相互关系的认识问题，实验几何与演绎几何问题，度量问题，统计与概率问题，既是课程的重点问题，也是教师们感到疑惑的问题。《数学教师不怕被学生难倒了》对这些问题一一作了详细的分析与论述。

为了减轻学生的学习负担，考虑到知识的连贯性与衔接性，我国在课程的安排中，在教材的编写中，对某些问题作了简化。例如，有关“数系的扩展”问题，在我国高中课程标准中只安排了四个课时，因而在教学中无法详细交代数系的来龙去脉，而《数学教师不怕被学生难倒了》一书，却能从历史的角度，用数学结构的眼光，对此作了深入的说明。

##### (2) 能够帮助教师开阔数学课程的视野

我国中小学数学课程加进了不少新内容，如概率、统计、向量、导数及其应用等。为了腾出时间学习课程的一系列新专题和新内容，我国简化了对演绎推理的要求，因而也给教师带来一些压力。为了解决教师对这些问题的疑惑，《数学教师不怕被学生难倒了》一书对与之相关的内容进行了深化与补充，它结合教材而高于教材，是教师教学研究的良师益友。《数学教师不怕被学生难倒了》一书采取了先统计、后概率的处理方法，恰好与新课程的处理顺序相一致。

《数学教师不怕被学生难倒了》一书，对于现实生活所需要的统计原



理与方法，作了较详细的介绍，有助于教师更好地把握教材。对于概率，书中补充了概率的缘起，说明了概率产生的历史背景等。与课程相关的概率问题，如古典概型、几何概型、概率的统计定义等，都是教师们希望了解的，《数学教师不怕被学生难倒了》一书对此作了较深入的探讨，从而帮助教师开阔了课程的数学视野。

### (3) 为数学教与学提供丰富的营养

某些重要的数学问题，新课程的处理方法与传统的方法不同。以几何为例，新课程提倡探索与实验，对于推理与论证降低了要求，如果处理不好，就会导致学生的推理与论证能力的削弱，为了补充师生这方面的不足，《数学教师不怕被学生难倒了》一书设立了第三章“图形与空间”，详细阐明了它们之间的联系与区别，从而使他们能够正确把握各年级图形与空间能力有关的教学问题的深广度。

《数学教师不怕被学生难倒了》一书，还提供了丰富的史料与个案，让教师们有机会欣赏数学的来龙去脉，览胜数学史中的重大事件，具有良好的阅读价值。

图文并茂也是本书的一大亮点，这里的图，包括了精巧的几何图形，准确有价值的图表，反映数学内在联系的逻辑框图，既能展示数形结合的魅力，也给读者以数学美的感受。这里的“文”是指案例，反映了教师在教学实践中的疑惑，编者力求给予正确的回答。

### (4) 利于加强课程的薄弱环节

测量是中小学数学的重要组成部分，也是数学应用的一个主要方面。不少发达国家，如美、英、法、德、日等国，都把测量视为课程必不可少的组成部分，在教材中编有关测量的专门章节，各国大纲对测量提出了明确的教学要求。在我国中小学，数学课程也含有与测量相关的内容，但是在教学上是把测量分散到各章节学习。

有些学校在教学中往往用代数计算和几何原理等，掩盖了其中的测量问题。例如，测量单位的选定，测量的转换与变通，近似计算的方法与要求等。对这些重要的问题，尚缺乏专门的阐述，而相关的练习也有片面性。当前我国学生的计算能力不尽如人意，在数学练习中，使用测量单位有误，对于测量的近似运算要求认识不清，因而错误百出。这也与对测量的处理支离破碎有关。

《数学教师不怕被学生难倒了》一书顺应了国际数学课程改革的潮流，较为完整地阐明了“测量”的意义、原理和方法。该书设置了测量的章节，对于测量的意义、过程、应用与误差处理等问题作了较完整的论述，





这有助于完善教师们的认知结构，帮助教师正确处理测量的教学问题，对于纠正学生的常见错误，将会大有裨益。

笔者相信，本书对数学课堂教学，对教师的职业素养的提高，对于提高教师的教学水平，将大有帮助。它有助于建构知识在教学中的切入点，有助于指导教师在教学中具体处理。这些知识通过其他活动得以发展和提炼，对学生发挥引领作用。这是近来研究教师教育实践的新线索，也是教师职业发展的新趋势。教师的感悟在实践中生成，它是动态发展的知识，它既相对独立于实践，又在实践中逐步形成其意义。

王林全  
于华南师范大学



# 序二

在与数学教师交流的时候，经常被问到类似这样的问题：“为什么规定1既不是质数，又不是合数”，“怎样理解除以一个分数就是乘以这个分数的倒数”，“为什么要先乘除后加减”，“交换律也适用于减法吗”，这些看似简单的问题，但从数学的角度理解，并在数学教育中合理地解释给学生听，并不是一件容易的事情。

中小学数学教师需要有数学专业知识，也需要有教育学知识。但并不是简单地把数学知识与教育学知识相加就是数学教育知识，也不是大学的高等数学学得越多，数学学科知识越深，就可以完成好的数学教育。中小学数学知识往往看起来简单，但其中蕴含着高深的数学专业知识。许多问题往往不是简单地用高等数学知识就可以解释的。因此，解决中小学数学教师在教育实践中遇到的数学问题，严格说是数学教育的问题，需要将看似简单的问题，用相关的数学原理解释，寻找这些问题的数学之源。在此基础上，将其变为学生可以理解的教学知识运用于教学实践。这可能是教师专业发展过程中的一个重要问题，也可能是对舒曼（Shulman）所说的学科教学知识（PCK）的一种合理的诠释。

由香港中文大学黄毅英教授主编的《数学教师不怕被学生难倒了》一书，正是基于这样一种教育实践的需



# 序三

在师范大学数学系教了一辈子的书，所授课程包括《数学分析》、《函数论》和《中学数学教学法》。回顾往事，耳边时不时地会响起如下的三方对话。

甲（师范生）：师范生学那么多的高等数学干什么？中学里根本用不上！

乙（高等数学教授）：要给学生一杯水，教师必须有一桶水。居高才能临下嘛！

丙（教育学教授）：学习的主体是学生，教师高高在上“给”学生注水，不符合建构主义理论。

乙：依此推论，教师本身有没有水、有多少水都没有关系，与学生一起合作去打井取水岂不更好？

丙：我们就是要反对“学科中心主义”。不过，我们不反对把教育学和数学结合在一起，让师范生具备必要的数学专业教学知识。

甲：数学教师当然要有数学知识，关键是要对中学数学教学有用的知识。居高未必能临下。

乙：不管怎么说，数学教师作为一位专业人士，数学素养是一切的基础，教育学是必备的手段，居高临下则是大家努力需要解决的问题。

对话内容丰富，这里只是几句引言。

今天刚刚打开电脑，黄毅英教授和他合作者的新著



发在我的邮箱里。打开一看，屏幕上显示的数学文本，再次触动了上述三方对话的心弦。

记得2000年在北京师范大学召开的一次讨论会上，前复旦大学校长、杨福家院士曾问：“综合大学和师范大学同样教《理论物理》，师范大学有什么不同呢？”后来似乎也没有明确的答案。我经过思考，给出的回答是：“师范大学所有课程的教学，都应该善于把各种知识的学术形态转变为学生易于接受的教育形态。高等数学课程、初等数学课程，以及教育类课程，概莫能外。”

我想，黄毅英等编著的这本书，就是一次将数学的学术形态转化为教育形态的一次尝试。

关于高等数学、教育学和初等数学的关系，我曾经有一个比喻。这里有两座山头，高的是高等数学，低的是初等数学。数学教师的任务是带领学生登上初等数学的山头。教育学是攀登初等数学山峰的人造阶梯。如果不爬那个高等数学的山头，当然也能慢慢地爬上那个初等数学的山头。那么，为什么要费力地攀上高等数学的山头呢？理由有三。一是教师需要证明自己有攀登高峰的能力，为学生们做出榜样。二是能做到“一览众山小”，有宽阔的视野。三是具有攀登高峰的经验，可以应付各种困难险阻。所以说，学习高等数学是必须的，不可少的。

不过，初等数学毕竟有自己的特点。中学数学里常常有许多说不清道不明的问题产生，需要研究解决。在将数学的学术形态转化为教育形态时，需要教育学的帮助，更需要高等数学的修养。因此，架起高等数学和初等数学两座山峰之间的桥梁，就是一桩不可缺少的工程。

晚近以来，数学教育改革崇尚理念的改革，多半走“一般教育学理论+数学例子”的路子。对于数学本身的修养则有所忽视。数学教师的进修内容，缺乏数学内容。数学教师的晋升，只问公开课上的表演，不关注数学内容的把握。可以说出现了某种“去数学化”的倾向。因此，从现代数学发展的高度审视中小学数学课程，注重数学本质，研究教学内容知识，成为当务之急。数学教育研究的一个主要任务就是为了架桥。国外盛行的“教学内容知识(PCK)”研究，“数学教学知识(MKT)”研究，都属于这一类。本书的撰写意图，大概就是提请数学教师关注数学知识本身，提高自身的数学素养，力求高屋建瓴，居高临下。

架起高等数学和初等数学之间的桥梁，许多数学前辈做过努力。例如，F·克莱因编著的《高观点下的初等数学》就是这方面的经典。不过，许多中小学数学教师觉得这些著作还是难以消化，不能比较直接地解决教



学中出现的问题。现在，黄毅英等编著的这一本著作，则在向数学的深度和广度进军的同时，更注意贴近教学实际，特别是正面回答了许多一线教师提出的问题，如为什么“负负得正”？ $0.999\cdots=1$ ？等一大批数学问题。这一特色，显示了本书的实用价值。

不过，把中学数学内容的学术形态转为教师容易掌握、学生容易接受的教育形态，是一个长期的过程，不可能一蹴而就，毕其功于一役。黄毅英和他的合作者在这个方向上走了坚实的一步，将来还会继续走下去。

毅英教授是我多年的老朋友。他以学贯中西、扎根香港本土、接近民众、勤写多产闻名。我向他学习过许多。多年来，他关注中国内地数学教育，尤其是培养了一批博士，作出了特定的贡献。他的新著出版，理应致贺。于是拉杂地写了以上的感想，权作为序。

张奠宙

于华东师大数学教育研究所



# 编者序

众所周知，数学教师是教授数学的，理所当然他们必须要有雄厚的数学知识才能成为称职的教师。传统上，数学教师出身数学系（或在师范大学中先修读相当分量的数学），然后再学点教学法，大体出现了“数学教育=数学+教育学”的状况，除了两者未必一时能够融会之外，一线教师往往会有这么一种疑问：在大学里学了实变函数、复分析、线性空间等一大堆数学知识，在日常教学中（尤以小学数学教师）却根本无用武之地。

大学数学和中小学校的学校数学之间的结合并不是一蹴而就，数学家克莱因（Felix Klein）就曾指出：“大学新生入学一开始就发现，他面对的数学问题好像跟中学里学过的东西一点也没有联系，自然就很快便完全忘记了中学里学过的东西。毕业后他当上了教师，突然发觉自己被要求依循老套的方法讲授传统的初等数学。由于缺乏别人的指导，他难以辨明当前的数学内容和他曾学到的高等数学有什么联系，于是他很快便接受了这套由来已久的教学方式。他的大学教育顶多成为一种愉快回忆，对他的教学显得毫无影响。”事实上，在大学学习的这些高等数学除了能令未来的数学教师们熟悉一些数学思维和习惯外，对以后在教学中解答学生问题也会起着关键性的作用。



在以往的学校教育中，教师比较权威，他们每每只需将数学知识传授给学生就够了。例如，0次幂的问题，若 $a \neq 0$ ，则 $a^0 = 1$ 就是了。不过学生会问：为什么要把 $a^0$ 定义成1，有没有其他的可能？这样定义又有什么好处？这样的问题是十分正常，亦是值得鼓励的。

除了“传道、授业”，教师还有一项重要的职能就是“解惑”。要回答教学中的这些问题，便需要动用深厚的数学知识，需要教师对数学的知识结构和本质有通盘的了解，包括高等数学知识。因此，学校数学和高等数学从来不是割裂的，中小学的数学教师就是需要能够从高观点来透视数学教学。

这不只是牵涉中学范围，简单的，如小学阶段的“先乘除后加减”和“负负得正”这两个常见问题的本质，是有所差别的。前者只属于习惯（约定俗成），后者就牵涉两个代数运算“+”和“ $\times$ ”的代数结构。由于加法形成一个可交换群，而乘法是一个域。0本身是加法的一个单位，却又是乘法中的一个零化子（零元），“负负得正”是可以推论出来的。

现时一般给数学老师写的数学书，较多从数学知识本身出发，例如，介绍代数结构、微积分等，教师不容易把这些数学知识融入日常教学中。本书的特色是从课程出发，展示其中涉及的数学内容，同时为读者整理出中小学数学学习内容的几条主线。

例如，在数范畴，我们其实可以发现一条知识习得的进程。学生由接触身边的事物开始有了“量”与“序”的感觉，于是由数数等活动开始认识数字。数字本身就是一种颇抽象的概念。渐渐地，由数字的不同运算开始一步步扩展对数的认识。及至有理数时，单一的一个数开始可以有不同的表达方式（如分数、小数、百分数等），于是学生便要学会在不同表达方式之间转换。这中间穿插着数系的扩展，而且它还包含了各种运算定义的推广。例如，从整数的加法到分数的加法，其中涉及运算法则上的推广，也包括了原来的加法方式不变。从自然数到整数，再到有理数，涉及数学体系的扩展和代数结构的一层层丰富——从群到环，再到域。然而，从有理数系到实数就不太容易了，数学上的三次数学危机都或多或少地与实数的本质有关。古希腊人就是通过数轴去代表实数，亦即所谓数字的几何化（geometrisation）。由实数再扩展到复数，也是数学教师需要知道的一项内容，例如，我们要知道如果不用 $i$ 而用 $-i$ 把 $\mathbf{R}$ 扩展，所得出的两个



明·程大位《算法统宗》

师生问难图





C 是否一样呢？

从数字变到代数，涉及“文字”的替代。例如，字母“ $x$ ”，其实有不同层面的意义。它既可以是较静态的“未知数”，也可以是“变量”。符号的运算法则，大多与数字类似，但有时也有所不同。例如，“ $(3x+3)^2$  与  $\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$  的公因式究竟是  $(x+1)$  还是  $\frac{1}{2}(x+1)$ ，还是  $3(x+1)$ ？”就是常见的学生问题。我们若懂得  $\mathbf{R}[x]$ 、 $\mathbf{Z}[x]$  及  $\mathbf{Q}[x]$  的性质，这些问题的答案就能一清二楚了。

代数范畴还涉及方程的解、代数式、函数方程、不等式以及不等式的解集，这些是互相联系的学习进程。如果教师不注意这一点，学生就好像只是零碎地学会了一大堆数学工具而已。此外，函数又可以引出数列，而数列又可以为将来学习微积分奠定基础。

虽然现在几何有不同的体系，如欧氏几何、坐标几何等，但总的来说，学生仍然是（在小学阶段）从形式图形出发，最初是凭感觉（如视觉）认识图形，慢慢地进行比较有系统的分辨图形（如图形的分类等），到初中阶段就开始转移到图形的性质，从而进入到学习严格的定义和图形的确定性（例如，三条边长（SSS）就足以确定一个三角形）。有了定义和性质就可以进行几何推理，这时的几何学习就百花齐放了：一方面可以进入其他的几何体系，如坐标几何，向量，甚至复数的“阿根图”（Argand Diagram）等，另一方面又可进入三角学或是立体几何方向，教师胸中有了这些数学知识结构，授课时就能做到条理分明，也能应对学生的常见问题。

数学知识的另一个主轴就是测量。这其实是数学与现实世界的衔接之一。诸如货币、时间、温度、长度、面积和体积等都属于现实世界的概念，转换到数学，中间就有很多问题要清楚。例如，为什么面积是两个长度的乘积，单位和单位能否相乘（ $\text{cm} \times \text{cm} = \text{cm}^2$  吗？），圆的面积为什么与直径平方成正比，不用微积分能否计算出球体的体积等。要能回答这些问题，也是需要数学内容知识有充分的掌握才行的。

最后当然是概率和统计了，人们常常把两者放在一起讨论。它们之间究竟有哪些关系呢？概率的计算往往需要利用以往收集到的统计资料，但如果我们真的要给学生呈现一条由具体到抽象、由日常事物到数学对象的数学化过程，统计就不见得一定要是概率的先导概念，反过来概率也未必是统计的先导概念。

除了上述几条学校教授数学知识的主线，我们还不能忽视数学发展历

