高等数学专题辅导讲座

第3版

蔡高厅　邱忠文　主编

国防工业出版社
National Defense Industry Press

高等数学专题辅导讲座

（第3版）

蔡高厅　邱忠文　主编

国防工业出版社

内容简介

该书为高等理工科院校本科生“高等数学”课程的辅导书，其内容包括函数、极限、连续、导数、微分及其应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学，无穷级数和微分方程等.

全书内容全面，重点突出，共分为8个单元33个专题讲座进行辅导，例题详实典型，分析透彻清晰，方法实用而且富于创新，是天津大学著名数学教育专家蔡高厅教授、邱忠文教授多年从事高等数学教学经验和智慧的结晶.

本书适合于高等院校师生学习使用，不仅可以作为硕士研究生入学考试的复习参考书，而且可以作为网络高等教育、高等职业技术教育、成人高等教育以及函授教育的辅导参考书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学专题辅导讲座/蔡高厅，邱忠文主编.
—3版.—北京：国防工业出版社，2013.5
ISBN 978-7-118-08791-8

Ⅰ.①高... Ⅱ.①蔡...②邱... Ⅲ.①高等数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第087670号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100048)
北京奥鑫印刷厂印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 25　**字数** 629千字
2013年5月第3版第1次印刷　**印数** 1—3000册　**定价** 45.00元

国防书店：(010)88540777　发行邮购：(010)88540776
发行传真：(010)88540755　发行业务：(010)88540717

前 言

为了适应高等理工科院校本科生对高等数学课程的学习需要，结合当前的教学实际，我们编写了《高等数学专题辅导讲座》，作为高等数学课程的教学参考书. 本书无论对全日制普通高等学校的学生，或是网络高等教育、函授、高等职业技术教育及成人继续教育的学生学习高等数学都是较为合适的辅导教科书.

高等数学是高等理工科、经济、管理类院校最主要的基础课之一，对学生在校期间的学习和今后的发展都将产生深远的影响. 本书的编者在全日制普通高等学校长期从事高等数学及应用数学的教学工作，最近几年又在远程高等教育及高等职业技术教育的教学中积累了一定的经验，深刻了解学生学习情况和要求，本书就是为了满足学生学习的要求，帮助学生更好地学习高等数学而编写的辅导教科书. 书中对学生所学的高等数学知识，系统地进行归纳总结，通过实例进行剖析深化，对相关的内容进行融会贯通.

本书的内容覆盖了现行理工类院校“高等数学”教学的全部内容. 包括函数、极限、连续、导数、微分及其应用、不定积分、定积分及其应用、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学及其应用、多元函数积分学、无穷级数和微分方程等. 全书共分为 8 个单元 33 个专题进行辅导，内容丰富、例题详实、分析透彻、富于启发、文字通顺、便于自学.

本书的编写和出版得到了天津大学网络教育学院、天津大学仁爱学院的大力支持和教学管理部的具体帮助，编者表示深切的感谢.

参加本书编写的有蔡高厅、邱忠文、李君湘、于桂贞、刘瑞金、韩健、韩月丽、孙秀萍等，由于编者的水平所限，对书中的错误之处，敬请读者批评指正.

编 者

目录

第一单元　函数、极限与连续性

第一讲　函数的基本知识

人们观察任何一个自然现象或生产过程，总会发现其中某些数量在不断地发生着变化，这种能取得不同数值的量称为变量. 诸变量之间相互依从关系称为函数关系. 这种关系在数学中的表现形式称为函数. 函数是微积分学研究的主要对象，因此掌握函数的基本知识是学习高等数学的基础.

基本概念和重要结论

1. 函数定义

设有两个数集 A 和 B，f 是一个确定的对应规律，如果 $\forall x \in A$，通过 f 都有惟一的数 $y \in B$ 和它对应，记为

$$x \xrightarrow{f} y，或 f(x) = y,$$

则称 f 是 A 到 B 的函数，或 f 是数集 A 上的函数，并称 A 为函数的定义域.

当 x 遍取 A 中的一切数时，与它对应的数 y 组成的数集

$$B_f = \{y \mid y = f(x), x \in A\},$$

称 B_f 为函数的值域，并称变量 x 为自变量，变量 y 为因变量.

2. 函数的几个性质

1）有界性

设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义，若存在常数 $M > 0$，使得 $\forall x \in A$，恒有

$$|f(x)| \leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上有界.

2）单调性

设函数 $f(x)$ 在数集 A 上有定义，若 $\forall x_1、x_2 \in A$，且 $x_1 < x_2$，恒有

$$f(x_1) < f(x_2)（或 f(x_1) > f(x_2)）,$$

则称函数 $f(x)$ 在 A 上严格单调增（或严格单调减）. 当恒有 $f(x_1) \leqslant f(x_2)$（或 $f(x_1) \geqslant f(x_2)$）时，称函数 $f(x)$ 在 A 上广义单调增（或广义单调减）.

3）奇偶性

设函数 $f(x)$ 在某个对称于原点的数集 A 上有定义：

若 $\forall x \in A$，恒有

$$f(-x) = f(x)，或 f(x) - f(-x) = 0,$$

则称 $f(x)$ 为 A 上的偶函数.

若 $\forall x \in A$，恒有

$$f(-x) = -f(x)，或 f(x) + f(-x) = 0,$$

则称 $f(x)$ 为 A 上的奇函数.

奇偶函数的运算性质：

(1) 奇(偶) 函数的代数和仍是奇(偶) 函数；

(2) 偶数个奇函数之积是偶函数,奇数个奇函数之积仍是奇函数；

(3) 一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

4) 周期性

设函数 $f(x)$ 在某个数集 A 上有定义,若存在常数 $T>0$,使得对 $\forall x \in A$,且有 $x+T \in A$,恒有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数. 满足上面等式的最小的 T 值称为 $f(x)$ 的周期.

周期函数的运算性质：

(1) 若 $f(x)$、$g(x)$ 皆是以 T 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 也是以 T 为周期的函数；

(2) 若 $f(x)$、$g(x)$ 分别是以 T_1 与 $T_2(T_1 \neq T_2)$ 为周期的函数,则 $f(x) \pm g(x)$ 是以 T_1、T_2 的最小公倍数 T 为周期的函数；

(3) 若 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数,则 $f(px+q)(p \neq 0)$ 是以 $\frac{T}{|p|}$ 为周期的函数.

3. 复合函数

设 $y=f(u)$ 是数集 B 上的函数,而 $u=\varphi(x)$ 是由数集 A 到 B 的一个非空子集 B_φ 的函数,对 $\forall x \in A$,通过 u,都有唯一的 y 与它对应,这时在 A 上产生了一个新的函数,用 $f \circ \varphi$ 表示,函数 $f \circ \varphi$ 称为 A 上的复合函数,记作

$$x \xrightarrow{f \circ \varphi} y,\text{或 } y=f[\varphi(x)],x \in A,$$

这里 u 称为中间变量,A 是 $f \circ \varphi$ 的定义域.

4. 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A,值域为 W,那么对 $\forall y \in W$,必存在 $x \in A$,使得 $f(x)=y$,这时如果把 y 看做自变量,x 看做因变量,按照函数概念就得一个新函数,这个新函数称为函数 $y=f(x)$ 的反函数,记为 $x=f^{-1}(y)$,其定义域为 W,值域为 A.

习惯上自变量用 x 表示,因变量用 y 表示,那么函数 $y=f(x)$ 的反函数也可记作 $y=f^{-1}(x)$.

5. 初等函数

1) 基本初等函数

常数函数、幂函数、三角函数、反三角函数、指数函数和对数函数统称为基本初等函数.

2) 初等函数

由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数的复合步骤所构成的并可用一个解析式子表达的函数,称为初等函数.

一、求函数的定义域

因为初等函数是由基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数的复合步骤而构成的函数,所以要求初等函数的定义域首先必须掌握基本初等函数的定义域,在基本初等函数中有一部分函数在整个实数集 $\mathbf{R}$ 上有定义,例如幂函数中 $x^n(n \in \mathbf{N}^+)$,指数函数 $a^x(a>0,a \neq 1)$,三角函数中的 $\sin x$、$\cos x$,反三角函数中的 $\arctan x$、$\operatorname{arccot} x$,而另一部分函数仅在实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集 $\mathbf{D}$ 上有定义,例如幂函数中的 x^{-n}、$x^{\frac{1}{2n}}(n \in \mathbf{N}^+)$,对数函数 $\log_a x(a>0,a \neq 1)$,三角函数中的 $\tan x$、$\cot x$,反三角函数中的 $\arcsin x$、$\arccos x$ 等,熟练地掌握并牢记下面这些基本初等函

数或简单的初等函数的定义域,对求初等函数的定义域将会起到十分重要的作用.

函　数	定 义 域
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \{x \mid x \neq 0\}$,或 $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$
$f(x) = x^{\frac{1}{2n}} (n \in \mathbf{N}^+)$	$D_f = \{x \mid x \geqslant 0\}$,或 $x \in [0, +\infty)$
$f(x) = \log_a x$	$D_f = \{x \mid x > 0\}$,或 $x \in (0, +\infty)$
$f(x) = \log_x^{\alpha} (\alpha > 0)$	$D_f = \{x \mid x > 0, x \neq 1\}$,或 $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$
$f(x) = \tan x$	$D_f = \left\{x \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in Z\right\}$
$f(x) = \cot x$	$D_f = \{x \mid x \neq k\pi, k \in Z\}$
$f(x) = \arcsin x$	$D_f = \{x \mid \lvert x\rvert \leqslant 1\}$,或 $x \in [-1,1]$
$f(x) = \arccos x$	$D_f = \{x \mid \lvert x\rvert \leqslant 1\}$,或 $x \in [-1,1]$

例 1.1　设函数 $f(x) = \sqrt{x+1} + \dfrac{1}{\lg(1-x)}$,

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域;

(2) 求函数 $f(\ln x)$ 的定义域;

(3) 求函数 $f(x-a) + f(x+a)$ 的定义域$\left(0 < a < \dfrac{1}{2}\right)$.

解　(1) 函数 $f(x)$ 是由两个简单的初等函数 $(x+1)^{\frac{1}{2}}$ 与 $\dfrac{1}{\lg(1-x)}$ 相加而成的,先求两个简单的初等函数的定义域:

为了使 $(x+1)^{\frac{1}{2}}$ 有定义,自变量 x 必须满足不等式

$$x+1 \geqslant 0,$$

为了使 $\dfrac{1}{\lg(1-x)}$ 有定义,自变量 x 还必须满足不等式组

$$\begin{cases} 1-x > 0, \\ 1-x \neq 1. \end{cases}$$

因此,为了使 $f(x)$ 有定义,x 就必须满足由以上三个不等式构成的不等式组

$$\begin{cases} x+1 \geqslant 0, \\ 1-x > 0, \\ 1-x \neq 1, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x \geqslant -1, \\ x < 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

上面不等式组的解集就是函数 $f(x)$ 的定义域:

$$D_f = \{x \mid x \in [-1,0) \cup (0,1)\}.$$

(2) 求 $f(\ln x)$ 的定义域. 函数 $f(\ln x)$ 是由 $f(u)$, $u = \ln x$ 复合而成,为了使 $\ln x$ 有定义,x 必须满足不等式

$$x > 0.$$

其次,为了使 $f(\ln x)$ 有定义,x 还必须满足不等式

$$-1 \leqslant \ln x < 0, \text{或 } 0 < \ln x < 1.$$

因此,为了使 $f(\ln x)$ 有定义,x 必须满足由以上三个不等式构成的不等式组

$$\begin{cases} x > 0, \\ -1 \leqslant \ln x < 0. \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x > 0, \\ 0 < \ln x < 1. \end{cases}$$

上面不等式组的解集就是函数 $f(\ln x)$ 的定义域：

$$D_f = \{x \mid x \in [e^{-1},1) \cup (1,e)\}.$$

(3) 求 $f(x-a)+f(x+a)\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$ 的定义域.

为了使 $f(x-a)$ 有意义，x 必须满足不等式

$$-1 \leqslant x-a < 0, 或 0 < x-a < 1.$$

为了使 $f(x+a)$ 有意义，x 必须满足不等式

$$-1 \leqslant x+a < 0, 或 0 < x+a < 1.$$

为了使 $f(x-a)+f(x+a)$ 有意义，x 必须满足由上面 4 个不等式构成的不等式组

$$\begin{cases} -1 \leqslant x-a < 0, \\ -1 \leqslant x+a < 0. \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} 0 < x-a < 1, \\ 0 < x+a < 1. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} -1+a \leqslant x < a, \\ -1-a \leqslant x < -a. \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} a < x < 1+a, \\ -a < x < 1-a. \end{cases}$$

不等式组的解集为

$$-1+a \leqslant x < -a, 或 a < x < 1-a.$$

因此，函数 $f(x-a)+f(x+a)$ 的定义域是

$$D_f = \{x \mid x \in [-1+a,-a) \cup (a,1-a)\}.$$

例 1.2 设函数 $f(x) = \arcsin\dfrac{2x-1}{3} + \dfrac{1}{\lg|x-1|}$，

(1) 求函数 $f(x)$ 的定义域；

(2) 求函数 $f(x+1)$ 的定义域.

解 (1) 函数 $f(x)$ 是由两个简单的初等函数 $\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 与 $\dfrac{1}{\lg|x-1|}$ 相加而成的，先求两个简单函数的定义域：

为了使反正弦函数 $\arcsin\dfrac{2x-1}{3}$ 有定义，自变量 x 必须满足不等式

$$\frac{|2x-1|}{3} \leqslant 1.$$

为了使对数函数 $\lg|x-1|$ 有定义，自变量 x 必须满足不等式

$$|x-1| > 0, 或 x-1 \neq 0.$$

为了使分式函数 $\dfrac{1}{\lg|x-1|}$ 有定义，自变量 x 必须满足不等式

$$\lg|x-1| \neq 0, 或 |x-1| \neq 1, 即 x-1 \neq \pm 1.$$

因此为了使函数 $f(x)$ 有定义，自变量 x 必须满足不等式组

$$\begin{cases} \dfrac{|2x-1|}{3} \leqslant 1, \\ x-1 \neq 0, \\ x-1 \neq \pm 1, \end{cases} \quad 或 \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 2, \\ x \neq 1, \\ x \neq 0, x \neq 2. \end{cases}$$

上面不等式组的解集就是函数 $f(x)$ 的定义域：

$$D_f = \{x \mid x \in [-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2)\}.$$

(2) 求函数 $f(x+1)$ 的定义域. 由函数 $f(x)$ 的定义域可知,为了使函数 $f(x+1)$ 有定义,自变量 x 必须满足不等式

$$-1 \leqslant x+1 < 0, \text{或} 0 < x+1 < 1, \text{或} 1 < x+1 < 2.$$

即

$$-2 \leqslant x < -1, \text{或} -1 < x < 0, \text{或} 0 < x < 1.$$

所求函数 $f(x+1)$ 的定义域为

$$D_f = \{x \mid x \in [-2,-1) \cup (-1,0) \cup (0,1)\}.$$

例 1.3　设函数 $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$,求函数 $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$ 的定义域.

解　为了使 $f(x)$ 有意义,x 必须满足不等式

$$x-1 \neq 0.$$

为了使 $\dfrac{1}{f(x)}$ 有意义,x 必须满足不等式组

$$\begin{cases} x-1 \neq 0, \\ f(x) = \dfrac{x}{x-1} \neq 0. \end{cases}$$

为了使 $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$ 有意义,x 还必须满足

$$\frac{1}{f(x)} - 1 \neq 0, \text{即} f(x) = \frac{x}{x-1} \neq 1,$$

此不等式显然成立,因此,为了使 $f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$ 有意义,x 必须满足上面两个不等式构成的不等式组

$$\begin{cases} x-1 \neq 0, \\ \dfrac{x}{x-1} \neq 0. \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x \neq 1, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

所以,$f\left[\dfrac{1}{f(x)}\right]$ 的定义域是

$$D_f = \{x \mid x \in (-\infty,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)\}.$$

综上三例可知,求初等函数的定义域的步骤如下:

(1) 确认函数 $f(x)$ 是由哪几个简单的初等函数或基本初等函数经过四则运算或复合步骤而构成的函数;

(2) 为了使这些简单的初等函数或基本初等函数有定义,求出自变量 x 必须满足的不等式或不等式组;

(3) 把以上这些不等式联立在一起,就得到 x 必须满足的不等式组;

(4) 解这个不等式组,所得到的解集就是所求的函数 $f(x)$ 的定义域.

二、抽象函数符号的运用

在函数概念中,自变量 x 的取值范围,即函数的定义域及自变量 x 与因变量 y 的对应规律 f,通常称为函数($y = f(x)$)概念的两要素. 因此能熟练地运用抽象的函数符号来表达一个函数,是学习高等数学的基本知识之一.

在函数的表示法中,只需把函数的定义域以及自变量和因变量的对应规律表达清楚,而与用什么字母来表示自变量和因变量无关. 这种函数表示法的"无关性",对抽象函数符号运用十分重要.

例 1.4 设$f(x)=\dfrac{x+1}{x}$,求$f[f(x)]$及$f\left[\dfrac{1}{f(x)+1}\right]$的表达式和定义域.

解 (1)$f[f(x)]=\dfrac{f(x)+1}{f(x)}=\dfrac{\frac{x+1}{x}+1}{\frac{x+1}{x}}=\dfrac{2x+1}{x+1}$

为了使$f(x)$有意义,x必须满足不等式

$$x\neq 0,$$

为了使$\dfrac{f(x)+1}{f(x)}$有意义,除了x必须满足不等式$x\neq 0$之外,还必须满足不等式

$$f(x)\neq 0,\text{即}\frac{x+1}{x}\neq 0.$$

即复合函数$f[f(x)]$的自变量x必须满足不等式组

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ x\neq -1.\end{cases}$$

于是$f[f(x)]$的定义域为$D=\{x\mid x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,+\infty)\}$.

(2) 求$f\left[\dfrac{1}{f(x)+1}\right]$.

先计算$f(x)+1$,

$$f(x)+1=\frac{x+1}{x}+1=\frac{2x+1}{x}.$$

再计算$f\left[\dfrac{1}{f(x)+1}\right]$,

$$f\left[\frac{1}{f(x)+1}\right]=f\left(\frac{x}{2x+1}\right)=\frac{\frac{x}{2x+1}+1}{\frac{x}{2x+1}}=\frac{3x+1}{x}.$$

为了使$f(x)$有意义,x必须满足不等式

$$x\neq 0.$$

为了使$\dfrac{1}{f(x)+1}$有意义,x还必须满足不等式

$$f(x)+1\neq 0,\text{即}\frac{x+1}{x}+1\neq 0.$$

所以,为了使$f\left[\dfrac{1}{f(x)+1}\right]$有意义,$x$必须满足不等式组

$$\begin{cases}x\neq 0,\\ \dfrac{x+1}{x}+1\neq 0.\end{cases}\text{即}\begin{cases}x\neq 0,\\ x\neq -\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

因此,函数$f\left[\dfrac{1}{f(x)+1}\right]$的定义域为

$$D=\left\{x\mid x\in(-\infty,0)\cup\left(0,-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},+\infty\right)\right\}.$$

例 1.5 设函数

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}, & 0\leqslant x<4,\\ x-2, & 4\leqslant x\leqslant 6.\end{cases}\quad \varphi(x)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x<2,\\ x+2, & 2\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}$$

求$f[\varphi(x)]$.

解 由 $f(x)$ 的表达式知

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}\sqrt{\varphi(x)}, & 0\leqslant\varphi(x)<4,\\ \varphi(x)-2, & 4\leqslant\varphi(x)\leqslant 6.\end{cases}$$

下面求不等式 $0\leqslant\varphi(x)<4$ 的解集. 由 $\varphi(x)$ 的表达式知

当 $0\leqslant x<2$ 时, $\varphi(x)=x^2$, 由 $0\leqslant\varphi(x)=x^2<4$, 得 $-2<x<2$. 由不等式组

$$\begin{cases}0\leqslant x<2,\\ -2<x<2.\end{cases}\quad\text{得解集 } 0\leqslant x<2.$$

当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时, $\varphi(x)=x+2$, 由 $0\leqslant\varphi(x)=x+2<4$, 得 $-2\leqslant x<2$, 不等式组

$$\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4,\\ -2\leqslant x<2.\end{cases}\quad\text{无解.}$$

所以不等式 $0\leqslant\varphi(x)<4$ 的解集为 $0\leqslant x<2$.

再求不等式 $4\leqslant\varphi(x)\leqslant 6$ 的解集. 由 $\varphi(x)$ 的表达式知:

当 $0\leqslant x<2$ 时, $\varphi(x)=x^2$, 由 $4\leqslant\varphi(x)=x^2\leqslant 6$, 得不等式组

$$\begin{cases}0\leqslant x<2,\\ 4\leqslant x^2<6.\end{cases}\quad\text{无解}$$

当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时, $\varphi(x)=x+2$, 由 $4\leqslant\varphi(x)=x+2\leqslant 6$, 得 $2\leqslant x\leqslant 4$, 由不等式组

$$\begin{cases}2\leqslant x\leqslant 4,\\ 2\leqslant x\leqslant 4.\end{cases}\text{解集 } 2\leqslant x\leqslant 4,$$

所以不等式 $4\leqslant\varphi(x)\leqslant 6$ 的解集为 $2\leqslant x\leqslant 4$.

于是有

$$f[\varphi(x)]=\begin{cases}\sqrt{\varphi(x)}, 0\leqslant\varphi(x)<4\\ \varphi(x)-2, 4\leqslant\varphi(x)\leqslant 6\end{cases}=\begin{cases}\sqrt{x^2}, 0\leqslant x<2\\ (x+2)-2, 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$
$$=x(0\leqslant x\leqslant 4).$$

例 1.6 设 $f[\ln x]=x^2(1+\ln^2 x)$, 求 $f(x)$.

解法 1 令 $t=\ln x$, 解出反函数 $x=\mathrm{e}^t$, 代入原式的两边, 得

$$f(t)=\mathrm{e}^{2t}[1+(\ln\mathrm{e}^t)^2]=\mathrm{e}^{2t}(1+t^2).$$

因此, 有

$$f(x)=\mathrm{e}^{2x}(1+x^2).$$

解法 2 把原式右端的函数 $x^2(1+\ln^2 x)$ 凑成以 $\ln x$ 为变元的函数, 即

$$f(\ln x)=\mathrm{e}^{2\ln x}(1+\ln^2 x);$$

把 $\ln x$ 换成 x, 即得

$$f(x)=\mathrm{e}^{2x}(1+x^2).$$

例 1.7 设单值函数 $f(u)$ 满足关系式:

$$f^2(\lg x)-2xf(\lg x)+x^2\lg x=0,$$

其中 $x\in[1,10]$, 且 $f(0)=0$, 求 $f(x)$.

解 令 $y=f(\lg x)$, $x\in[1,10]$, 原关系式化为

$$y^2-2xy+x^2\lg x=0.$$

把 y 看做未知函数, 解此二次方程, 得

$$y=f(\lg x)=x(1\pm\sqrt{1-\lg x})=10^{\lg x}(1\pm\sqrt{1-\lg x}).$$

把 $\lg x$ 换成 x, 便得

$$f(x)=10^x(1\pm\sqrt{1-x}).$$

因为$f(0)=0$,可知上式只能取“$-$”号,于是有

$$f(x)=10^x(1-\sqrt{1-x}),x\in[0,1].$$

例 1.8 设$f\left(\sin\frac{x}{2}\right)=\cos x+1$,求$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)$.

解法 1 令$t=\sin\frac{x}{2}$,解出$x=2\arcsin t$,代入原关系式的两边,得

$$f(t)=\cos(2\arcsin t)+1=1-2\sin^2(\arcsin t)+1=2-2t^2.$$

由$t=\sin\frac{x}{2}$可知$|t|\leqslant 1$,因此

$$f(x)=2-2x^2,|x|\leqslant 1.$$

显然$\cos\frac{x}{2}$满足$\left|\cos\frac{x}{2}\right|\leqslant 1$,于是有

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=2-2\cos^2\frac{x}{2}=2\sin^2\frac{x}{2}=1-\cos x.$$

解法 2 因为$\cos\frac{x}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)=\sin\frac{\pi-x}{2}$,

令$\pi-x=t$,则有$\cos\frac{x}{2}=\sin\frac{t}{2}$. 于是有

$$f\left(\cos\frac{x}{2}\right)=f\left(\sin\frac{t}{2}\right)=\cos t+1=\cos(\pi-x)+1=1-\cos x.$$

例 1.9 设$f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x$,其中,$x\neq 0,x\neq 1$,求$f(x)$.

解 由于函数表示法与用什么字母表示变量无关,可令$t=\frac{x-1}{x}$,或$x=\frac{1}{1-t}$,代入原关系式,得

$$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=\frac{2}{1-t}$$

或

$$f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2}{1-x} \tag{1.1}$$

再令$x=\frac{1}{1-u}$,则$\frac{1}{1-x}=\frac{1}{1-\frac{1}{1-u}}=\frac{u-1}{u}$,代入(1.1)式,得

$$f\left(\frac{u-1}{u}\right)+f\left(\frac{1}{1-u}\right)=\frac{2(u-1)}{u}$$

或

$$f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2(x-1)}{x}. \tag{1.2}$$

解方程组

$$\begin{cases}f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x,\\ f\left(\frac{1}{1-x}\right)+f(x)=\frac{2}{1-x},\\ f\left(\frac{x-1}{x}\right)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=\frac{2(x-1)}{x}.\end{cases}$$

前两个方程相加，再减去第三个方程，得

$$2f(x) = 2x + \frac{2}{1 - x} - \frac{2(x-1)}{x},$$

$$f(x) = x + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - 1.$$

综上数例，抽象函数符号运用的练习题大致可以分为以下三类情形：

（1）将两个或两个以上的已知函数进行复合，求复合函数的表达式及定义域（如例 1.4、例 1.5）. 例如已知函数 $f(x)$ 及 $\varphi(x)$，求 $f[\varphi(x)]$ 的表达式，一般是将函数 $f(x)$ 中的自变量 x 用另一个函数 $\varphi(x)$ 的表达式来替换，再化简替换后的表达式，即得到复合函数的表达式 $f[\varphi(x)]$.

（2）已知函数 $\varphi(x)$ 及复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式为 $F(x)$，即 $f[\varphi(x)] = F(x)$，求函数 $f(x)$ 的表达式（如例 1.6），通常可以采用以下两种方法：

一种方法是如果已知函数 $\varphi(x)$ 存在反函数，可令 $u = \varphi(x)$，解得其反函数 $x = \varphi^{-1}(u)$，分别代入等式

$$f[\varphi(x)] = F(x)$$

的两边，得到

$$f(u) = F[\varphi^{-1}(u)].$$

再根据函数的表示法与用什么字母表示自变量无关的特性，把 u 换为 x，便得到

$$f(x) = F[\varphi^{-1}(x)].$$

另一种方法是把函数 $\varphi(x)$ 视为一个变元，把函数 $F(x)$ 凑成以 $\varphi(x)$ 为变元的函数，则有

$$F(x) = f[\varphi(x)],$$

再把上式右端的 $\varphi(x)$ 换为 x，便得到 $f(x)$ 的表达式.

（3）已知函数 $\varphi(x)$，$\psi(x)$ 及复合函数 $f[\varphi(x)]$ 的表达式，求复合函数 $f[\psi(x)]$ 的表达式（如例 1.8）. 其解题的思路是先由 $\varphi(x)$、$f[\varphi(x)]$ 求出函数 $f(x)$ 的表达式，再由 $\psi(x)$ 及 $f(x)$，求出复合函数 $f[\psi(x)]$ 的表达式.

三、求函数的反函数

设函数 $y = f(x)$ 存在反函数，求其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的一般步骤如下：

（1）把函数表达式 $y = f(x)$ 看做是关于变元 x、y 的方程 $y - f(x) = 0$，从该方程解出 $x = f^{-1}(y)$；

（2）在表达式 $x = f^{-1}(y)$ 中，把 x 换成 y，而把 y 换成 x，便得所求反函数的表达式 $y = f^{-1}(x)$；

（3）确定反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域（即直接函数 $y = f(x)$ 的值域就是反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的定义域）.

例 1.10　求函数 $y = \dfrac{2^x}{2^x + 1}$ 的反函数.

解　由原式，得

$$y(2^x + 1) = 2^x, 2^x = \frac{y}{1-y},$$

上式两边取对数，得

$$x = \log_2\left(\frac{y}{1-y}\right),$$

所求的反函数为

$$y=\log_2\left(\frac{x}{1-x}\right).$$

因为直接函数 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 的值域 $V_f=\{y\mid 0<y<1\}$，所以反函数的定义域为 $D_{f^{-1}}=\{x\mid 0<x<1\}$.

例 1.11 求函数

$$y=f(x)=\begin{cases}1+x^2, & 当 x>0,\\ 0, & 当 x=0,\\ -1-x^2, & 当 x<0\end{cases}$$

的反函数.

解 当 $x>0$ 时，$y=1+x^2>1$，$x=\sqrt{y-1}$；

当 $x=0$ 时，$y=0$；

当 $x<0$ 时，$y=-1-x^2<-1$，$x=-\sqrt{-y-1}$.

所求的反函数为

$$y=f^{-1}(x)=\begin{cases}\sqrt{x-1}, & x>1,\\ 0, & x=0,\\ -\sqrt{-x-1}, & x<-1.\end{cases}$$

例 1.12 求函数 $y=\log_a(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant 1)$ 的反函数.

解 由原式两边取以 a 为底的指数函数，得

$$a^y=x+\sqrt{x^2-1},$$

$$a^{-y}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}=\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}=x-\sqrt{x^2-1},$$

以上两式相加，得

$$2x=a^y+a^{-y},\ x=\frac{a^y+a^{-y}}{2},$$

所求的反函数为

$$y=\frac{a^x+a^{-x}}{2},\ x\in[0,+\infty).$$

四、判别函数的几个基本性质

1. 判别函数的奇偶性

例 1.13 判定下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)=\left(\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x+\left(\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x$；

(2) $f(x)=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$.

解 (1) 由于

$$f(-x)=\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^{-x}+\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^{-x}=(2-\sqrt{3})^{-x}+(2+\sqrt{3})^{-x}$$

$$=\left(\frac{1}{2-\sqrt{3}}\right)^x+\left(\frac{1}{2+\sqrt{3}}\right)^x=f(x).$$

根据偶函数定义，$f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的偶函数.

（2）由于

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2+1}),$$

那么

$$\begin{aligned} f(x) + f(-x) &= \ln(x + \sqrt{x^2+1}) + \ln(-x + \sqrt{x^2+1}) \\ &= \ln[(x + \sqrt{x^2+1})(-x + \sqrt{x^2+1})] = \ln 1 = 0. \end{aligned}$$

根据奇函数定义，$f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的奇函数.

例 1.14 已知

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{\sin x} - 1} + \dfrac{1}{2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$F(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}},$$

试判别函数 $F(x)$ 的奇偶性.

解法 1 令 $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in (-\infty, +\infty)$.

因为

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{1+(-x)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = f(x),$$

所以根据偶函数的定义，可知 $f(x)$ 是偶函数.

当 $x \neq 0$ 时，有

$$\begin{aligned} g(x) + g(-x) &= \frac{1}{e^{\sin x} - 1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\sin(-x)} - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{e^{\sin x} - 1} + 1 + \frac{1}{e^{-\sin x} - 1} \\ &= \frac{1}{e^{\sin x} - 1} - \frac{e^{\sin x}}{e^{\sin x} - 1} + 1 = 0. \end{aligned}$$

根据奇函数的定义，可知 $g(x)$ 是奇函数.

由于 $F(x) = f(x)g(x), x \in (-\infty, +\infty)$，根据奇偶函数的运算性质，可知 $F(x)$ 是奇函数.

解法 2 当 $x = 0$ 时，有 $F(0) = f(0)g(0) = 0$，

当 $x \neq 0$ 时，有

$$F(-x) + F(x) = \frac{g(-x)}{\sqrt{1+(-x)^2}} + \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}[g(-x) + g(x)] = 0.$$

根据奇函数的定义，可知 $F(x)$ 是奇函数.

2. 判别函数的周期性

例 1.15 求下列周期函数的周期：

(1) $f(x) = \sin^2 2x$；(2) $f(x) = [x] - 3\left[\dfrac{x}{3}\right]$.

解 周期函数的周期是指最小的正周期，即满足等式

$$f(x+T) = f(x)$$

的最小正数 T.

(1) $f(x) = \sin^2 2x = \dfrac{1 - \cos 4x}{2} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos 4x$,