高考数学题的解法思路

岑运秋 韦素娥 编著

教学理念先进，解题套路简明。
学一例知全类，助你跳出题海。

南京大学出版社

高考数学题的解法思路

岑运秋 韦素娥 编著

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高考数学题的解法思路 / 岑运秋，韦素娥编著. --
南京：南京大学出版社，2013. 5
ISBN 978-7-305-11450-2

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①岑… ②韦… Ⅲ. ① 中学数学课—
高中—题解—升学参考资料 Ⅳ. ①G634. 605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 098705 号

出版发行 南京大学出版社
社　　址 南京市汉口路 22 号　　邮　　编 210093
网　　址 http://www. NjupCo. com
出 版 人 左　健

书　　名 高考数学题的解法思路
编　　著 岑运秋　韦素娥
责任编辑 王　年　顾　越　　　编辑热线 025-83686308

照　　排 南京南琳图文制作有限公司
印　　刷 丹阳市兴华印刷厂
开　　本 787×1092　1/16　印张 9. 75　字数 245 千
版　　次 2013 年 5 月第 1 版　　2013 年 5 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-11450-2
定　　价 20. 00 元

发行热线 025-83594756　83686452
电子邮箱 Press@NjupCo. com
Sales@NjupCo. com(市场部)

内容简介

本书的基本观点是要学会解题，掌握数学，必须做到两点：(1) 是打好基础，从“概念”抓起；(2) 是学会思考，在“思路”分析上下功夫. 抓“概念”，要利用一“图”二“式”作为工具；寻“思路”，要把握总体思路，牢记基本思路，看题思考找思路，顺推、逆推、凑合拢. 运用这套“概念＋思路”的解题理论，科学地分析、解答从 2007 至 2012 年全国高考试卷中的经典真题，从中掌握解高考题的一些规律，这就是本书希望达到的目标.

最近几年，新加坡式数学教学，深受世界多个国家的推崇. 不仅在美国越来越受欢迎，也被南美国家智利等选作参考模式，在全国推广. 其特点是用画面方式教授抽象的数学概念和原理，教会学生解题，学习兴趣大增，数学成绩突出，在“国际数学与科学研究趋势”报告中常名列前茅. 本书作者受到启发，用其先进理念，研究高考解题，取得一些成果，这就是本书的指导思想.

作者简介

岑运秋 男，1941 年 1 月生，广西玉林市人. 1959 年从玉林高中考入广西师范学院（现广西师范大学）数学系，1963 年毕业后到中学任教，1978 年调入广西师范学院数学系工作，1981 年被聘为讲师，1985 年被聘为副教授. 曾发表论文：《数学思维的框图分析法》（广西师院学报自然版，1991 年）；《一类大系统的平稳振荡》（广西师范学报自然版，1995 年）. 出版过著作《平面几何解题思路框图分析法》（与韦素娥合作，广西民族出版社，1989 年），获广西师院优秀科研成果一等奖. 2001 年退休后到新加坡长住三年，接触到世界领先的新加坡式数学教学，并用其先进理念，研究高考解题，总结出“概念＋思路”的解题理论，与韦素娥合作，写成本书.

韦素娥 女，1941 年 2 月生，广西河池市人. 1959 年从都安高中考入广西师范学院（现广西师范大学）数学系，1963 年毕业后到中学任教，1978 年调入广西师范学院数学系工作，1981 年被聘为讲师，1985 年被聘为副教授. 曾发表论文：《计算机辅助教学（CAI）在高等几何教学中的应用》（广西师院学报自然版，2000 年），获广西先进教学成果一等奖. 出版过著作《平面几何解题思路框图分析法》（与岑运秋合作，广西民族出版社，1989 年），获广西师范学院优秀科研成果一等奖. 2002 年退休后到新加坡长住三年，接触到世界领先的新加坡式数学教学，并用其先进理念，研究高考解题，总结出“概念＋思路”的解题理论，与岑运秋合作，写成本书.

前　　言

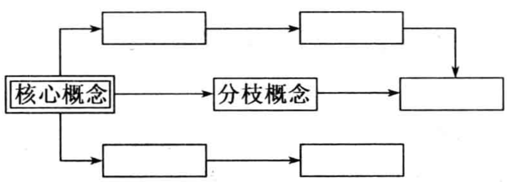
数学离不开解题，掌握数学就意味着善于解题．然而，基础数学已有系统完整的理论大厦，而解题却还没有成熟的理论框架，甚至连“什么叫解题”都莫衷一是，至于“怎样学会解题”更是众说纷纭．本书的基本观点是：要学会解题，掌握数学，必须做到两点：

1. 打好基础，从“概念”抓起

概念是建成数学理论大厦的基石，也是求解数学题的工具．要学会解数学题，首先必须掌握好数学概念，而抓住一“图”两“式”是掌握好概念的有效途径．

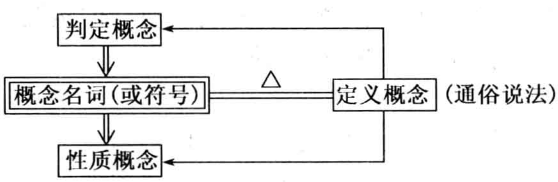
（1）概念生成结构图．

系统梳理概念的来龙去脉，按其从属关系，由核心概念，逐步引出各层的分枝概念，并按下面画面的方式，编织成一张结构图，用来体验知识生成、迁移、发展的过程，营造一个数学思维的“网络空间”．



（2）概念互推“三环式”（定理）．

概念之间的互相推导关系，构成了定理的形式，它是演绎推理的根据，支撑解题思维的基础．概念之间的互推关系，可用如下“三环式”的画面直观表示：



（3）概念数量关系式（公式）．

概念之间的数量关系，构成了公式的形式，也是解题的重要依据．其基本形式，可用如下画面的形式表示：

$$\boxed{\text{概念 }1}\begin{pmatrix}+\\-\\\times\\\div\\\text{开方}\end{pmatrix}\boxed{\text{概念 }2}=\text{数量}$$

若对每个概念都总结出以上三种“画面”的形式，则对概念、定理和公式的基本内容就大

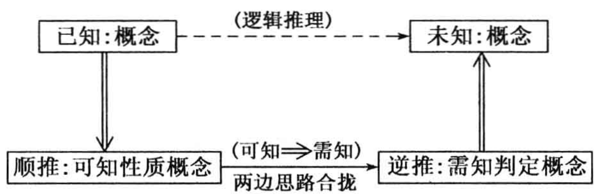
致了解了，若再在解题的实践中，逐渐把概念、定理和公式的本质属性，“印入”脑海，“深入”骨髓，那就能熟练掌握数学了.

2. 学会思考，在“思路”分析上下功夫

什么是解题思路？根据已知的定理（证明正确的命题）和公式（符号组成的公设），从问题的已知“量”到未知“量”的逻辑推理过程，就是解题思路，它是探求未知、认识世界的发现之路、探索之路、创新之路，学会寻找解题思路是学好数学的关键.

（1）把握总体思路.

解数学题的总体思路是“顺推—逆推—合拢”三步曲，它决定解题思路的走向，起到统帅全局的作用，用画面表示如下：



（2）牢记基本思路.

解题思路的多样性，是数学的特点. 在这些思路中，有些是常见的、用得较多的，我们称之为“基本思路”. 把各类题型的基本思路挑选出来，牢记心中，是提高解题能力的有效途径. 基本思路的模式如下：

基本思路：要求某个基本概念⟶基本步骤是什么？

（3）寻找问题思路.

数学问题的标准形式包括两个最基本的要素：条件（已知、前提），结论（未知、求解、求证、求作）. 沟通条件与结论之间的逻辑联系就是解题.

解题是创造性的思维活动，演绎推理和归纳推理是思维活动的方式. 为了掌握思维方法，看数学书必须采取“看题思考 · 提升能力”的学习方略. 每学一个单元，除认真阅读课文，认识相关的概念、定理和公式外，更重要的是拿些题目来，思考破解之路. 先把题目的已知“量”和未知“量”一一列出. 然后，开动脑筋，认真思考：从已知“量”能推出什么性质？从未知“量”逆推出什么判定？如何用性质推出判定，使两边思路合拢？从中领悟到哪些解题思想方法？

“看题思考 · 提升能力”要循序渐进. 先看简单题，后看复杂题；先看熟悉题，后看陌生题；先看课本上的例题和习题，再看高考题. 可以对照参考答案进行思考，只要把解题思路理清，把知识“内化”入脑，变为自己的技能就好.

“看题思考 · 提升能力”要侧重攻关. 主要看你不会做的题，做错了的题，尤其是卡住你的那一个关键步骤. 要弄清“关卡”是怎样度过的？为何要这样过？根据什么定理和公式？这个定理和公式是由那些条件确定的？它的出现是为了解决什么问题？等等，刨根问底，彻底弄懂，达到通透. 要知道，攻克一道难关，你的能力就会升华一步. 其实，解题思路就是逐步“见招拆招”、取得攻关突破的过程，从不会到会，从做错到改正，攻关经验积累多了，解题能力就会增强.

学数学就是思考数学，要学会用数学的“眼光”看问题、想问题，形成自己的思路，破解各

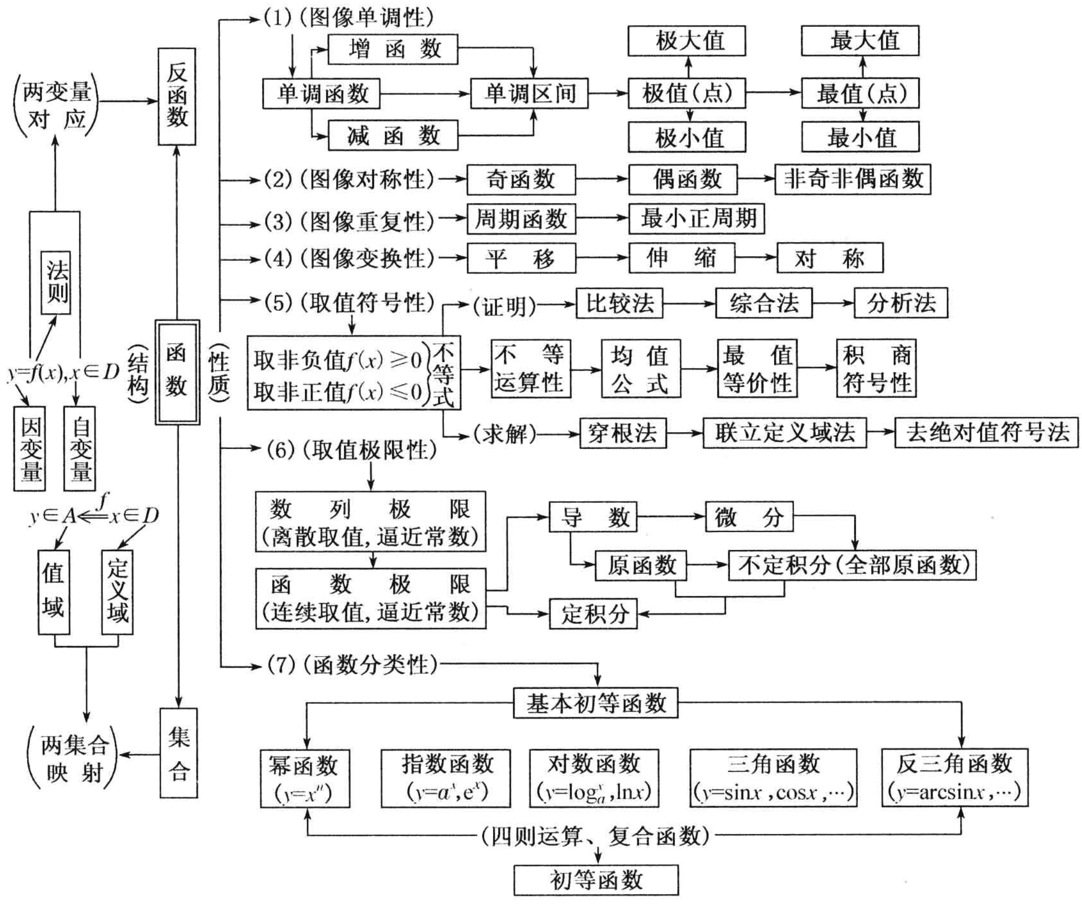
种问题，增强数学能力，优化知识结构，提高思维素质，学会“数学地思维”．数学思维解决问题的常用方法有：① 用列、解方程式解决问题；② 用函数模型解决问题；③ 用图表方式解决问题；④ 用逻辑推理已知条件的规律性解决问题．本书以问题解决为脉络，以解题思路为主线，按照全国高考试卷中的函数题、三角题、数列题、概率题、立几题、解几题和选修题等，逐类总结出一些解题规律，目的是抛砖引玉，让读者透过现象揭示本质，不但知道试题怎样解，还要知道为什么这样解，是否还有别的解，全面掌握解高考题的规律．

目　　录

第一单元　函数题

函数是数学中具有引领作用的重点内容. 数学不单是计算的学问,更是有关规律性的学问. 函数就是反映两数关系的规律性的核心概念. 函数的观点和方法贯穿整个数学的全过程. 函数是高考数学的最大核心、分值“大户”,想要高考数学得高分,必须首先对函数的内容和解题思路透彻理解,熟练掌握.

一、函数概念的生成结构图



二、函数概念的互推“三环式”(定理)和数量关系式(公式)

1. 概念互推(一)

$f'(x)>0(x\in[a,b])$ ⇓　　$f'(x)\geqslant 0$ 且导数零点孤立 ⇓

$\boxed{f(x)\text{ 是}[a,b]\text{上增函数}(f(x)\nearrow)}$ $\triangleq$ $\forall x_1<x\in[a,b]$，有 $f(x_1)<f(x_2)$（前值总比后值少）

⇓ $f(a),f(b)$ 是最值　　⇓ $f'(x)\geqslant 0$（导数非负）

2. 概念互推(二)

$f'(x_0)=0$ 且 $f'(x)$ 在 x_0 在正右负

⇓

$\boxed{f(x_0)\text{ 是 }f(x)\text{ 的极大值}}$（$f'(x_0)$ 存在）$\triangleq$ 在 x_0 左右邻近任取 x，有 $f(x)<f(x_0)$（局部最大，曲线升降转换）

⇓ $f'(x_0)=0$　　⇓ 极值点 x_0 在定义域内部

3. 概念互推(三)

$f(x)$ 在 D 两端边值和 D 内极值比较最大者

⇓

$\boxed{f(x_0)\text{ 是 }f(x)\text{ 在 }D\text{ 上的最大值}}$ $\triangleq$ $x_0\in D$ 且任取 $x\in D$，有 $f(x)\leqslant f(x_0)$（全局最大，边值、极值比较最大）

4. 概念互推(四)

$f(x)$ 的图像关于 y 轴对称 ⇓　　偶函数$\left(\begin{smallmatrix}+\\-\end{smallmatrix}\right)$偶函数 ⇓　　奇函数$\left(\begin{smallmatrix}\times\\\div\end{smallmatrix}\right)$奇函数 ⇓

$\boxed{f(x)\text{ 是 }D\text{ 上的偶函数}}$ $\triangleq$ D 关于原点对称且任取 $x\in D$，有 $f(x)=f(-x)$（图像左右对称）

⇓ $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称

5. 概念互推(五)

$\boxed{A\text{ 是 }B\text{ 的充分条件}}$ $\triangleq$ 有 $A\Longrightarrow$ 有 B $\Longleftrightarrow$ 无 $B\Longrightarrow$ 无 A

$\boxed{A\text{ 是 }B\text{ 的必要条件}}$ $\triangleq$ 无 $A\Longrightarrow$ 无 B $\Longleftrightarrow$ 有 $B\Longrightarrow$ 有 A

6. 概念互推(六)

$\boxed{A,B\text{ 等价}(A\Leftrightarrow B)}$ $\triangleq$ 有 $A\Longrightarrow$ 有 B 且有 $B\Longrightarrow$ 有 A $\Longleftrightarrow$ 有 $A\Longrightarrow$ 有 B 且无 $A\Longrightarrow$ 无 B $\Longleftrightarrow$ 有 $B\Longrightarrow$ 有 A 且无 $B\Longrightarrow$ 无 A

7. 等价取最值

$f(x)\geqslant 0$（非负）（$f(x)\leqslant 0$）（非正）$\Longleftrightarrow$ $f(x)_{\min}\geqslant 0$（$f(x)_{\max}\leqslant 0$）函数非负，取最小值等价（函数非正，取最大值等价）

8. 积(商)符号性

$\boxed{\begin{array}{l} f(x)\cdot g(x)\geqslant 0 \\ f(x)\cdot g(x)\leqslant 0 \end{array}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} f(x)\text{与 } g(x)\text{同号} \\ f(x)\text{与 } g(x)\text{异号} \end{array}} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \dfrac{f(x)}{g(x)}\geqslant 0 \\ \dfrac{f(x)}{g(x)}\leqslant 0 \end{array}} \left\{\begin{array}{l} \text{积(商)非负,两因式(分子、分母)同号} \\ \text{积(商)非正,两因式(分子、分母)异号} \end{array}\right.$

9. 均值公式

基本不等式　$(a-b)^2\geqslant 0$　($a=b$ 时取等号)

$\Downarrow$

展开、移项　$a^2+b^2\geqslant 2ab$　($a=b$ 时取等号)

$\Downarrow$

均值不等式　$\boxed{\begin{array}{c} (a\geqslant 0,b\geqslant 0) \\ a+b\geqslant 2\sqrt{ab} \\ \text{(当且仅当 } a=b \text{ 时,等号成立)} \end{array}} \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c} (a\geqslant 0,b\geqslant 0) \\ ab\leqslant\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 \\ \text{(当且仅当 } a=b \text{ 时,等号成立)} \end{array}}$

$\Downarrow$　　$\Downarrow$

应用　$\left\{\begin{array}{l} \text{若 } p>0,q>0,f(x)>0,\text{则} \\ \underbrace{pf(x)+\dfrac{q}{f(x)}}_{\text{(对勾函数)}}\geqslant \underbrace{2\sqrt{pq}}_{\text{(最小值)}} \end{array}\right.$　　若 $p-f(x)>0,q+f(x)>0$,则 $\underbrace{[p-f(x)][q+f(x)]}_{\text{(对消函数)}}\leqslant \underbrace{\left(\dfrac{p+q}{2}\right)^2}_{\text{(最大值)}}$

10. 导数

(导数表)

$(x^n)'=nx^{n-1}$	$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$
$(a^x)'=a^x\ln a$	$[f(x)\cdot g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
$(e^x)'=e^x$	$[c\cdot f(x)]'=cf'(x)$(c 是常数)
$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$	$\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'=\dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(f[g(x)])'=f'(u)\cdot g'(x)$
$(\cos x)'=-\sin x$	

$\Downarrow$

$\boxed{\boxed{\text{导数}(f'(x))}} \triangleq \boxed{\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$(增量比的极限)

$\Downarrow$　　$\Downarrow$

$\boxed{\begin{array}{l} f'(x)>0\Longrightarrow f(x)\nearrow \\ f'(x)<0\Longrightarrow f(x)\searrow \\ f'(x)=0\Longrightarrow f(x)=\text{常数} \end{array}}$　　$\boxed{\text{导数值}=\text{切线的斜率}}$

11. 二次函数(三项式)

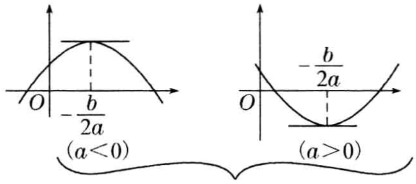
(1) 定义(标准式).

$y=ax^2+bx+c(a\neq 0),x\in\mathbf{R}$.

(2) 导数与水平切线.

$y'=2ax+b$(切线斜率),令 $y'=0$,解出导数零点 $x=-\dfrac{b}{2a}$,代入求极值 $y\left(-\dfrac{b}{2a}\right)=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

(3) 图像与性质.



叫 **抛物线(上下开口)** (抛物运行的路线)

(图像名称)⟶(系数表示)⟶(位置特征)

(结构性)
- ① 顶点⟷坐标$\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$——(有峰顶、谷顶两种)
- ② 对称轴⟷方程 $x=-\frac{b}{2a}$——(垂直于 x 轴,过两根中点)
- ③ 开口方向⟷二次项系数符号$\left\{\begin{array}{l}a>0\text{——开口向上}\\a<0\text{——开口向下}\end{array}\right\}$(上下开口)

(单调性)
- ④ 单调区间⟷$\left\{\begin{array}{l}a>0\text{——在}\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)\searrow,\text{在}\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)\nearrow\\a<0\text{——在}\left(-\infty,-\frac{b}{2a}\right)\nearrow,\text{在}\left(-\frac{b}{2a},+\infty\right)\searrow\end{array}\right.$
- ⑤ 极值(点)⟷极值点:$x=-\frac{b}{2a}$,$y_{极值}=\frac{4ac-b^2}{4a}$
- ⑥ 最值⟷$y_{最大(小)值}$=极值与两个边值比较最大(小)者

(根性质)
- ⑦ 图像与 x 轴交点(零值点或根)⟷$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$(一小一大,带根号)
- ⑧ 根与系数关系(韦达定理)⟷$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$(无根号)
- ⑨ 根的个数与判别式符号的等价关系:

$$\left\{\begin{array}{l}2\text{ 个实根(一小一大)}\Longleftrightarrow\Delta=b^2-4ac>0;\\1\text{ 个实根(大小相等)}\Longleftrightarrow\Delta=b^2-4ac=0;\\0\text{ 个实根(无实数根)}\Longleftrightarrow\Delta=b^2-4ac<0.\end{array}\right.$$

- ⑩ 根与二次不等式的解集关系:

$$\left\{\begin{array}{l}ax^2+bx+c\geqslant0\left\{\begin{array}{l}\text{无根解集}:x\in\mathbf{R}\\\text{有根解集}\left\{\begin{array}{l}a>0:x\leqslant x_{小}\text{ 或 }x\geqslant x_{大}\text{(根两边)}\\a<0:x_{小}\leqslant x\leqslant x_{大}\text{(根中间)}\end{array}\right.\end{array}\right.\\ax^2+bx+c\leqslant0\left\{\begin{array}{l}\text{无根解集}:x\in\mathbf{R}\\\text{有根解集}:\left\{\begin{array}{l}a>0:x_{小}\leqslant x\leqslant x_{大}\text{(根中间)}\\a<0:x\leqslant x_{小}\text{ 或 }x\geqslant x_{大}\text{(根两边)}\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

12. 三次函数(多项式)

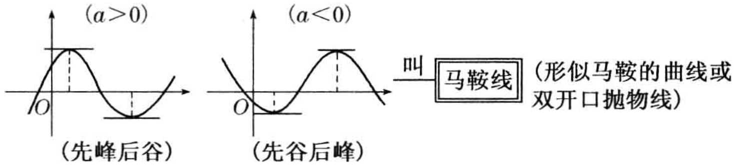
(1) 定义(标准式).

$y=ax^3+bx^2+cx+d(a\neq0)$,$x\in\mathbf{R}$.

（2）导数与水平切线.

$y'=3ax^2+2bx+c$（切线斜率），令 $y'=0$，解出两个导数零点.

（3）图像与性质.

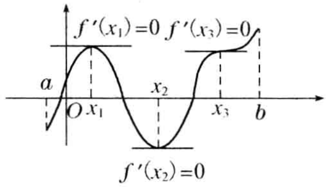


三、高考函数题的题型模式和基本思路

纵观历年高考试题发现，函数题的题型模式一般是：给定一个函数式（含参数），第Ⅰ问要求函数性质或证函数不等式，第Ⅱ问要求参数的取值范围. 基本思路有：① 已知函数式，求其性质. 求单调性质是基础题，求其他性质就有难度了，是命题的新动向；② 已知含参函数有某个性质，要求参数的取值范围，是有一定深度和层次的热点题型，几乎每年都考. 求参数的取值范围，基本途径是先列出含参不等式，后消去自变量，再解只含参不等式，解集即范围. 若消自变量时增（或减）了条件，还需验证求出的范围与函数性质等价；③ 用"隐"性质证明函数不等式，属一般题，但有时综合其他知识，也作压轴题.

[基本思路 1]　求函数性质思路（两种性质，思路不同）.

（1）求函数的单调性质（包括单调区间、单调性、极值、最值等）——求导数、解零点、列表分析.



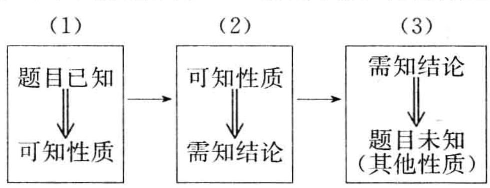
① 导数零点分区间
② 导数正负定单调
③ 极点代入求极值
④ 边值极值选最值

$\Longrightarrow$

列表分析

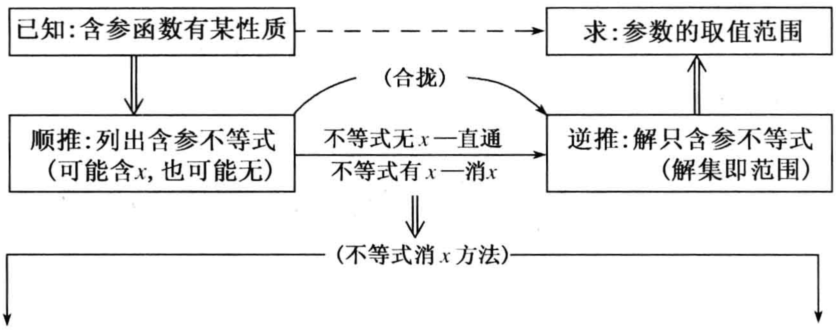
x	$[a,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,b]$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

（2）求函数的其他性质（单调性除外）——命题连推得性质（先画命题连推链）.



解题研究的一代宗师[美]波利亚说过："数学解题是命题的连续变换."通过一连串的命题推理，就可沟通题目的已知到未知的逻辑联系，解题思路就有了.

[基本思路 2]　求参数的取值范围思路——解只含参不等式得范围.



(1) 取最值法：$f_a(x)\underset{(\leqslant)}{\geqslant}0\overset{\text{(取最值)}}{\Longleftrightarrow}f_a(x)_{\min}\geqslant 0\ \left(f_a(x)_{\max}\leqslant 0\right)\overset{\text{(消}x\text{)}}{\Longleftrightarrow}f_a\underset{(\leqslant)}{\geqslant}0\overset{\text{(解之)}}{\Longleftrightarrow}a\in A$（准确范围），若 $\underset{\left(f_a(x)_{\max}\right)}{f_a(x)_{\min}}=0$，方法失灵，另选方法.

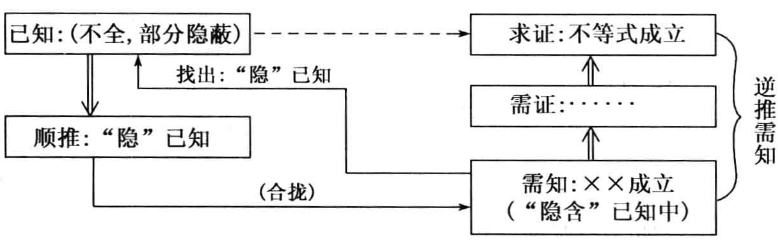
(2) 估导数法：$f_a(x)\underset{(\leqslant)}{\geqslant}0\Longrightarrow f'_a(x)\underset{\substack{(\leqslant)\\ \text{(放大)}}}{\overset{\text{(缩小)}}{\geqslant}}\underset{\text{(知正负)}}{\overset{\text{(分解)}}{f_1(x)}}\cdot f_2(a)\overset{\text{(估计)}}{\underset{(\leqslant)}{\geqslant}}0\overset{\text{(解之)}}{\Longleftrightarrow}a\in A^*$（“疑似”范围），还需验证：

$$a\in A^*\Longrightarrow f_a(x)\underset{(\leqslant)}{\geqslant}0\ \text{且}\ \overline{a\in A^*}\Longrightarrow\overline{f_a(x)\underset{(\leqslant)}{\geqslant}0}.$$

估导数法的前提是导数符号恒定，若导数可正负变化，估计有误，方法失灵，另选方法.

(3) 代定点法：$f_a(x)\underset{(\leqslant)}{\geqslant}0,x\in D\Longrightarrow$ 取定 $x=x_0\in D$ 代入 $f_a(x_0)\underset{(\leqslant)}{\geqslant}0\overset{\text{(解之)}}{\Longleftrightarrow}a\in A^*$（“疑似”范围），还需验证：$a\in A^*\Longrightarrow f_a(x)\underset{(\leqslant)}{\geqslant}0$. 若无法证明时，方法失灵，另选定点.

［基本思路 3］ 用“隐”性质证函数不等式思路——逆推需知，找出“隐”性质.



四、近年高考函数题的解法思路分析(2012～2007)

［例 1］ (2012 全国大纲卷［理数］20)

设函数 $f(x)=ax+\cos x,x\in[0,\pi]$.

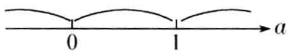
[Ⅰ] 讨论 $f(x)$的单调性；

[Ⅱ] 设 $f(x)\leqslant 1+\sin x$,求 a 的取值范围.

[思路分析]

[Ⅰ] 讨论函数的单调性思路——求导数、解零点、列表分析.

求导 $f'(x)=a-\sin x$,令 $f'(x)=0$,得 $\sin x=a$,此三角方程有否解与 a 的大小有关.

需分域讨论,先画分域图：

(1) 当 $a\geqslant 1$ 时,有 $f'(x)\geqslant 0$ 且仅当 $a=1,x=\frac{\pi}{2}$时 $f'(x)=0$,即导数零点只有 1 个,孤立,因此 $f(x)\nearrow$；

(2) 当 $a\leqslant 0$ 时,有 $f'(x)\leqslant 0$ 且仅当 $a=0,x=0$ 或 $x=\pi$ 时 $f'(x)=0$,即导数零点只有 2 个,孤立,因此 $f(x)\searrow$.

(3) 当 $0<a<1$ 时,令 $f'(x)=0$,有 $\sin x=a$,解之 $x_1=\arcsin a,x_2=\pi-\arcsin a$,图像在定义域内有两条水平切线,列表分析如下：

x	$[0,x_1)$	x_1	(x_1,x_2)	x_2	$(x_2,\pi]$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

由表知：在$[0,x_1)$、$(x_2,\pi]$,$f'(x)\nearrow$;在(x_1,x_2),$f(x)\searrow$.

[Ⅱ] 求参数的取值范围——解只含参不等式得范围.

先列出含参不等式：　　$ax+\cos x\leqslant 1+\sin x$,

移项　　$ax+\cos x-\sin x-1\leqslant 0$(不等式含 x—先消 x).

(1) 取最值消 x:因$(ax+\cos x-\sin x-1)_{\max}=0$,此法失灵,另选方法;

(2) 估导数消 x:记　　$h(x)=ax+\cos x-\sin x-1$,

求导　$h'(x)=a-\sin x-\cos x=a-\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$,

因导数可正负变化,估导数法失灵,另选方法;

(3) 代定点消 x:取定 $x=\pi\in[0,\pi]$代入 $\pi a-1-1\leqslant 0$,解得 $a\leqslant\frac{2}{\pi}$(“疑似”范围).

还需验证:$a\leqslant\frac{2}{\pi}\Longrightarrow f(x)\leqslant 1+\sin x$ 成立.

先放大函数值:$a\leqslant\frac{2}{\pi}\Longrightarrow f(x)=ax+\cos x\leqslant\frac{2}{\pi}x+1$.

要证 $f(x)\leqslant 1+\sin x$ 成立,需证$\frac{2}{\pi}x+1\leqslant 1+\sin x$ 成立.

化简即需证$\frac{2}{\pi}x\leqslant\sin x$ 成立,移项即需证 $\sin x-\frac{2}{\pi}x=g(x)\geqslant 0$ 在$[0,\pi]$成立.

分域讨论:$[0,\pi]=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\cup\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

(ⅰ) 先证:$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时,$g(x)\geqslant 0$ 成立(求 $g(x)$的单调性,可以证明).

求导 $g'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=\arccos\frac{2}{\pi}$，列表分析：

x	0	$\left(0,\arccos\frac{2}{\pi}\right)$	$\arccos\frac{2}{\pi}$	$\left(\arccos\frac{2}{\pi},\frac{\pi}{2}\right)$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	$1-\frac{2}{\pi}$	$+$	0	$-$	$-\frac{2}{\pi}$
$g(x)$	0	↗	最大值	↘	

由表知，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$时，函数 $g(x)$从 0 上升至最大值，再下降至 0，因此 $g(x)\geqslant 0$ $\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，即 $f(x)\leqslant 1+\sin x$ 成立；

（ⅱ）后证：$x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$g(x)\geqslant 0$ 也成立（恒等变形，化为(i)证明）.

$$f(x)=ax+\cos x\overset{\text{(代参数放大)}}{\leqslant}\frac{2}{\pi}x+\cos x$$

$$\xlongequal{\text{(恒等变形)}}1+\frac{2}{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\overset{\text{(用(i)放大)}}{\leqslant}1+0\overset{\text{(加正数放大)}}{\leqslant}1+\sin x,$$

即 $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right]$时，$f(x)\leqslant 1+\sin x$ 也成立.

综上，$a\in\left(-\infty,\frac{2}{\pi}\right]$.

［评注］ 选好定点是代定点法的关键：

(1) 若取定 $x_0=0\in[0,\pi]$代入，不等式无 a，解不出 a 的取值范围，失效；

(2) 若取定 $x_0=\frac{\pi}{2}\in[0,\pi]$代入，有 $a\cdot\frac{\pi}{2}+0\leqslant 1+1$，解出 $a\leqslant\frac{4}{\pi}$，但此时无法证明逆命题成立，即 $a\leqslant\frac{4}{\pi}$与函数性质不等价，失效；

(3) 只有取定 $x_0=\pi$，才成功.

［例 2］ （2012 全国大纲卷［文数］21）

已知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2+ax(x\in\mathbf{R})$.

［Ⅰ］讨论 $f(x)$的单调性；

［Ⅱ］设 $f(x)$有两个极值点 x_1,x_2，若过两点$(x_1,f(x_1))$，$(x_2,f(x_2))$的直线 l 与 x 轴的交点在曲线 $y=f(x)$上，求 a 的值.

［思路分析］

［Ⅰ］求函数的单调性质——求导数、解零点、列表分析.

求导 $f'(x)=x^2+2x+a\xlongequal{\text{(配方)}}(x+1)^2-1+a$，令 $f'(x)=0$ 得$(x+1)^2=1-a$.

此方程有否实数解与 a 的大小有关，要分域讨论，先画分域图：