普通高等院校“十二五”规划教材

经济数学
——概率论与数理统计同步解析

主编 康健

国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等院校"十二五"规划教材

经济数学——概率论与数理统计同步解析

主　编　康　健
副主编　赵峥嵘　毕秀国　于加武
　　　　刘　超　张大海　刘　燕

国防工業出版社
·北京·

内容简介

全书是普通高等院校“十二五”规划教材《经济数学—概率论与数理统计》(康健等)的配套辅导用书. 全书共分九章，每章均按内容提要、习题全解、典型例题、练习题和练习题答案五个部分. 本书依据“概率论与数理统计”教学大纲的要求，注重基本概念、基本理论和基本方法的训练，内容循序渐进，深入浅出，注重对教材的内容作适当的扩展和延伸，注重教学与应用有机结合，注重概率统计知识应用能力的培养.

本书可作为本科院校公共基础课辅导教材，也可作为经济管理类专业学生的辅导教材.

图书在版编目(CIP)数据

经济数学:概率论与数理统计同步解析/康健主编. —北京:国防工业出版社,2013.2

普通高等院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-118-08616-4

Ⅰ.①经... Ⅱ.①康... Ⅲ.①概率论－高等学校－教学参考资料②数理统计－高等学校－教学参考资料 Ⅳ.①021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第013599号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 12¾ 字数 335 千字

2013年2月第1版第1次印刷 印数 1—4000 册 定价 25.00 元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

前　言

“概率论与数理统计”作为现代数学的重要分支,在自然科学、社会科学和工程技术的各个领域都有广泛应用. 特别是近 30 年来,随着计算机技术的普及和发展,概率统计在通信、交通、生物、医学等方面的应用得到了迅速的发展. 正是概率统计的这种广泛应用,才使得它成为国内外高等院校各专业大学生最重要的数学课之一. “概率论与数理统计”课程是学生首次接触的用数学方法以研究随机现象的统计规律为主的一门数学分支,它具有自己独特的概念和逻辑思维方法,使得初学者常常对许多概念的实质难以理解,许多问题不知如何分析或解答. 因此,觉得课程非常难学. 为了配合课程教学,我们编写了这门课程的同步解析. 试图通过典型例题的分析,帮助学生正确地理解概率统计的基本概念,掌握解题方法和技巧,并通过适当的练习题来巩固所学内容,培养学生分析问题和解决问题的能力. 这是我们编写本辅导书的目的之一.

本书的内容按章编写,全书共分九章,每章均按内容提要、习题全解、典型例题、练习题和练习题答案五个部分. 本书的基本概念和基本方法的介绍,力求从分析、比较入手,简明分析问题的思维方法及应用技巧. 在例题的选择上,力求具有代表性,由浅入深,突出重点,一些题目给出了多种解题方法,注重分析问题和解决问题能力的提高与训练.

习题全解与典型例题是本书的重心所在,是教师上习题课和学生自学的极好的教材. 其特点是:对内容和方法进行归纳总结,力图把基本理论、基本方法、解题技巧、释疑解难、数学应用等多方面的教学要求,融于典型方法与范例之中. 例题具有典型性和示范性,有助于读者举一反三;例题中注重分析解题思路,揭示解题规律、引导读者思考问题,培养读者的理性思维能力以及分析问题和解决问题的能力.

本书由大连工业大学数学系组织编写,参加编写的有康健(第 1,4 章),赵峥嵘(第 3 章),毕秀国(第 7 章),于加武(第 8 章),刘超(第 2 章),张大海(第 5,6 章),刘燕(第 9 章),全书由康健统稿且最后定稿.

鉴于编者水平有限,疏漏与不当之处在所难免,恳切希望同行及学生给予批评指正.

编 者

2012.10

目 录

第一章 概率的基本概念

一、内容提要

(一) 事件及其概率

(1) 概率论与数理统计都是研究随机现象的统计规律性的一门数学分支学科.

(2) 随机试验:对客观事物进行一次观察或一次试验,统称为一个试验.如果这个试验满足条件:

① 试验可以在相同条件下重复进行;

② 每次试验的结果不止一个,且事先明确知道试验的所有可能结果;

③ 在一次试验之前不能确定哪一个结果一定出现.

则称这个试验为随机试验,记为 E.

(3) 随机事件:在随机试验中,可能发生,也可能不发生的结果称为随机事件,简称事件,记为 A 或 B 或 C 等.

① 必然事件:在一次试验中必然发生的事件称为必然事件,记为 Ω.

② 不可能事件:在一次试验中一定不能发生的事件称为不可能事件,记为 $\varnothing$.

必然事件和不可能事件都是确定的,只是为了需要,把它归结为随机事件的两种特例.

③ 基本事件:随机试验的每一结果(不能再分的)称为基本事件.

(4) 事件与点集关系:将事件定义为样本点的某个集合,即基本事件(样本点)可视为集合中的一个点 ω;随机试验 E 的所有基本结果的全体称为样本空间(集合),仍记为 Ω(必然事件);不包含任何点的集合称为空集(不可能事件),仍记为 $\varnothing$.这样就能将集合论的知识全部用来解释事件及事件的运算.

(二) 事件间的关系及其运算

(1) 包含:如果事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,则称 B 包含 A,或 A 包含于 B,记为 $B \supset A$ 或 $A \subset B$.

包含关系具有如下性质.

① $A \subset A$;

② 若 $A \subset B$,且 $B \subset C$,则 $A \subset C$;

③ $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

(2) 相等:若 $A \subset B$,且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

(3) 并(和):即两事件 A,B 至少有一个发生,称为事件 A 与 B 的并(和),记为 $A \cup B$ 或 $A + B$.

(4) 交(积)：A 与 B 同时发生，称为 A 与 B 的交(积)，记为 $A\cap B$ 或 AB.

(5) 差：事件 A 发生，但 B 不发生的事件称为事件 A 与 B 的差，记为$A-B$或$A\overline{B}$.

(6) 互斥(互不相容)：若事件 A 与 B 满足 $AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互斥.

(7) 对立事件：如果事件A与B满足条件$A\cup B=\Omega$，$AB=\varnothing$，则称 A 与 B 互为对立事件，记为 $B=\overline{A}$或 $A=\overline{B}$，其中 B 称为 A 的逆事件.

对立事件具有性质$\overline{\Omega}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=\Omega$，$\overline{\overline{A}}=A$.

(三) 事件的运算规律

(1) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$.

(2) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$.

(3) 分配律：$(A\cup B)C=AC\cup BC$，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$.

(4) 摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$(可推广到任意多个的情形).

除上述基本运算规律外，还有如下规律.

蕴涵律：$A\cup B\supset A$，$A\cup B\supset B$，$AB\subset A$，$AB\subset B$.

重叠律：$A\cup A=A$，$AA=A$.

吸收律：$A\cup\Omega=\Omega$，$A\cup\varnothing=A$，$A\Omega=A$，$A\varnothing=\varnothing$.

对立律：$A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\overline{A}=\varnothing$.

(四) 事件的概率

1. 频率

若在 n 次试验中，事件 A 发生了 μ 次，则称

$$F_n(A)=\frac{\mu}{n}$$

为事件 A 在 n 次试验中出现的频率.

2. 概率的定义

设 Ω 为随机试验 E 的样本空间，如果对于任意事件 $A\subset\Omega$，都有一个实数 $p(A)$与之对应，并且满足如下条件：

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$.

(2) 规范性：$P(\Omega)=1$.

(3) 可列可加性：若 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$互不相容，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 $p(A)$为事件 A 的概率.

3. 古典概型

若随机试验 E 具有两点，即样本空间的基本事件个数为有限；每个基本事件发生的可能性相同(等概)，则称此模型为古典概型.

在古典概型中，若基本事件个数为 n，而事件 A 包含了 m 个基本事件，则事件 A 的概率为

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

4. 伯努利概型

在 n 重独立重复试验的前提下，若每次试验有两种结果 A 及 $\bar{A}$ 且 $P(A)=p,P(\bar{A})=1-p$，则称为 n 重伯努利(Bernoulli)试验，也称伯努利概型.

若在一次试验中事件 A 发生的概率为 $P(A)=p(0<p<1)$，则在 n 重伯努利试验中事件恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k},k=0,1,2,\cdots,n;q=1-p$$

(五) 概率的基本性质

性质 1.1 $P(\varnothing)=0$.

性质 1.2(有限可加性) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$满足 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$，则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

性质 1.3(逆事件的概率) 对任何事件 A，有

$$P(\bar{A})=1-P(A)$$

性质 1.4(减法公式) 对任意事件 A 与 B，有

$$P(A-B)=P(A\bar{B})=P(A)-P(AB)$$

性质 1.5(加法公式) 对任意事件 A 与 B，有

$$P(A\cup B)=P(B)+P(A)-P(AB)$$

(六) 条件概率及乘法公式

1. 条件概率

设 A,B 为两个事件，当 $P(B)>0$ 时，称 $P(A|B)=\dfrac{P(AB)}{P(B)}$ 为在事件 B 发生条件下 A 发生的条件概率.

很明显，在 $P(A)>0$ 或 $P(B)>0$ 时，有

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B)$$

2. 全概率公式

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 中的完备事件组(划分)，且 $P(A_i)>0,i=1,2,\cdots,n$，对任意事件 B，称

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)$$

为全概率公式.

3. 贝叶斯公式

设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为样本空间 Ω 中的完备事件组(划分)，且 $P(A_i)>0,i=1,$

2,…,n，对任意事件 B，有

$$P(A_i \mid B) = \frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

4. 事件的独立性

对事件 A 与 B，若

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称事件 A 与 B 相互独立.

由独立性可得：

(1) 若 A 与 B 独立，$P(A)>0$，有 $P(B|A)=P(B)$；

(2) 若 A,B 独立，则 $A,\overline{B};\overline{A},B;\overline{A},\overline{B}$ 也独立.

对三个事件 A,B,C，如果满足 $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$，且 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(AC)=P(A)P(C)$，$P(BC)=P(B)P(C)$，则称 A,B,C 相互独立.

注意：若 A,B,C 相互独立，一定两两独立；但两两独立，不能保证 A,B,C 相互独立.

5. 乘法公式

(1) 当 A,B 相互独立时，有 $P(AB)=P(A)P(B)$；

(2) 当 A,B 不独立时，有 $P(AB)=P(A)P(B|A)=P(B)P(A|B)$.

二、习题全解

1. 写出下列试验的样本空间.

(1) 将一硬币抛掷两次，观察出现正面的次数；

(2) 抛两颗骰子，观察出现的点数之和；

(3) 在单位圆内任取一点，记录它的坐标；

(4) 观察某医院一天内前来就诊的人数.

解 (1) Ω_1：$\{0,1,2\}$；

(2) Ω_2：$\{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$；

(3) Ω_3：$\{(x,y) \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$；

(4) Ω_4：$\{0,1,2,3,\cdots\}$.

2. 抛两颗骰子，观察出现的点数. 令 $A=\{$两次抛出的点数相同$\}$，$B=\{$点数之和为 10$\}$，$C=\{$最小点数为 4$\}$. 试说明事件 $A\cup B$，ABC，$A-C$，$C-A$，$B\overline{C}$ 各表示什么含义？

解 $A\cup B$ 表示{两次抛出的点数相同}或{两次抛出的点数为 4 和 6}；

ABC 表示{两次抛出的点数均为 5}；

$A-C$ 表示{两次抛出的点数均为 1}；

$C-A$ 表示{点数为 5,7,9,11}；

$B\overline{C}$ 表示不可能事件.

3. 试用 Ω 中的三个事件 A,B,C 表示如下事件：

(1) A 发生，而 B 与 C 都不发生；

(2) A,B,C 中至少发生一个；

(3) A 与 B 都发生，而 C 不发生；

(4) B 发生，而 A 与 C 不发生；

(5) A,B,C 都不发生；

(6) A,B,C 中不多于一个发生；

(7) A,B,C 中不多于两个发生.

解 (1) $A\bar{B}\bar{C}$； (2) $A\cup B\cup C$； (3) $AB\bar{C}$； (4) $B\bar{A}\bar{C}$；

(5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$； (6) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

(7) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup AB\bar{C}\cup A\bar{B}C\cup\bar{A}BC$.

4. 设 $P(A)=a,P(B)=b,P(AB)=c$，用 a,b,c 表示下面事件的概率：$P(A\cup B)$，$P(\bar{A}\cup B)$，$P(\bar{A}\cup\bar{B})$，$P(\bar{A}\bar{B})$.

解 $P(A\cup B)=P(B)+P(A)-P(AB)$

$$=a+b-c$$

$$P(\bar{A}\cup B)=P(B)+P(\bar{A})-P(\bar{A}B)$$

$$=P(B)+P(A)-(P(B)-P(AB))$$

$$=a+b-(b-c)=a+c$$

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-c$$

由于 $$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})$$

所以 $$P(\bar{A}\bar{B})=(1-a)+(1-b)-(1-c)=1-a-b+c$$

5. 设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.7$，$P(A-B)=0.3$，求 $P(\bar{A}\cup\bar{B})$.

解 由于 $$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.3$$

所以 $$P(AB)=0.7-0.3=0.4$$

故 $$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.4=0.6$$

6. 设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.4$，$P(B)=0.25$，$P(A-B)=0.25$，求 $P(AB)$；$P(A\cup B)$；$P(\overline{AB})$；$P(\bar{A}\bar{B})$.

解 由于 $$P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.25$$

得 $$P(AB)=0.4-0.25=0.15$$

$$P(A\cup B)=P(B)+P(A)-P(AB)=0.4+0.25-0.15=0.5$$

$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=1-0.15=0.85$$

由于 $$P(\bar{A}\cup\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\bar{B})$$

所以 $$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\bar{A}\cup\bar{B})$$

$$=P(\bar{A})+P(\bar{B})-P(\overline{AB})$$

$$=(1-0.4)+(1-0.25)-0.85=0.5$$

7. 设 $P(A)=0.4$，$P(B)=0.3$ 且 A,B 互斥，求 $P(A\cup B)$，$P(\bar{A}\cup B)$.

解 由 $AB=\varnothing$ 得 $P(AB)=0$，由加法公式，得

$$P(A\cup B)=P(B)+P(A)-P(AB)=0.4+0.3=0.7$$

$$P(\bar{A}\cup B)=P(B)+P(\bar{A})-P(\bar{A}B)$$

$$=P(B)+(1-P(A))-(P(B)-P(AB))$$

$$=0.3+(1-0.4)-0.3=0.6$$

8. 某城市的电话号码由 7 位数字组成，每位数可以是从 0～9 这 10 个数字中的任意一个，求电话号码最后四位数全不相同的概率.

解 设 $A=\{$电话号码最后四位数全不相同$\}$，由古典概型样本点总数为 10^7，事件 A 包含的样本点个数为 $10^3\cdot A_{10}^4$，所以

$$P(A)=A_{10}^4/10^4$$

9. 今从 0～9 这 10 个数字中任取 3 个不同的数字. 设 $A=\{3$ 个数字中不含 0 和 $5\}$，$B=\{3$ 个数字中最大号码为 $7\}$，求 $P(A)$，$P(B)$.

解 该题为古典概型，其样本点总数为 C_{10}^3，事件 A 包含的样本点个数为 C_8^3，事件 B 包含的样本点个数为 C_7^2，则

$$P(A)=\frac{C_8^3}{C_{10}^3}$$

$$P(B)=\frac{C_7^2}{C_{10}^3}$$

10. 袋中有 3 个红球，12 个白球，依次随机地从袋中不放回地取 10 个球，每次取 1 个，求：(1)第一次取到红球的概率；

(2)第五次取到红球的概率.

解 设 $A=\{$第一次取到红球$\}$，$B=\{$第五次取到红球$\}$，则

$$P(A)=\frac{C_3^1A_{14}^9}{A_{15}^{10}}$$

$$P(B)=\frac{C_3^1A_{14}^9}{A_{15}^{10}}$$

11. 在一副扑克(52)中，任取 3 张，求取出的牌中至少有 2 张花色相同的概率.

解 设 $A=\{$取出的牌中至少有 2 张花色相同$\}$，则

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{4C_{13}^1}{C_{52}^3}=\frac{1282}{1285}$$

12. 在 1000 件产品中含有 10 件次品，今从中任意取 2 件，求其中至少有 1 件是次品的概率.

解 设 $A=$“其中至少有 1 件是次品”，则

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{C_{990}^2}{C_{1000}^2}$$

13. 某油漆公司发出 17 桶油漆，其中白漆 10 桶，黑漆 4 桶，红漆 3 桶，在搬运过程中所有的标签脱落，交货人随机地将这些油漆发给顾客，问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客，能按所订颜色如数得到订货的概率是多少？

解 设 A:“能按所订颜色如数得到订货”，则

$$P(A)=\frac{C_{10}^4C_4^3C_3^2}{C_{17}^9}$$

14. 已知 $P(A)=0.25, P(B|A)=0.3, P(A|B)=0.5$，求 $P(A\cup B)$.

解
$$P(AB)=P(A)P(B|A)=0.25\times 0.3=0.075$$
$$P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{0.075}{0.5}=0.15$$
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0.25+0.15-0.075=0.325$$

15. 20 个零件中有 5 个次品，每次从中任意取 1 个，作不放回的抽取，求第 3 次才取得合格品的概率.

解 设 $A_1=\{$第 1 次取得合格品$\}$，$A_2=\{$第 2 次取得合格品$\}$，$A_3=\{$第 3 次取得合格品$\}$，$B=\{$第 3 次才取得合格品$\}$，则
$$P(B)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1)P(A_3|\overline{A}_1\overline{A}_2)$$
$$=\frac{5}{20}\times\frac{4}{19}\times\frac{15}{18}=\frac{5}{114}$$

16. 证明：若 $P(A|B)>P(A)$，则 $P(B|A)>P(B)$.

证
$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}>P(A)$$
则
$$P(AB)>P(A)P(B)$$
故
$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}>\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)$$
即
$$P(B|A)>P(B)$$

17. 证明：若 $P(A)=a, P(B)=b$，则 $P(A|B)\geqslant\frac{a+b-1}{b}$.

证 由于 $P(AB)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)\geqslant a+b-1$

故
$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}\geqslant\frac{a+b-1}{b}$$

18. 一个工人照管甲、乙、丙三台机床，在 1h 内，各机床不需工人照管的概率分别为 0.9，0.8，0.7. 求 1h 内：

(1) 只有丙机床需人照管的概率；

(2) 三台机床，至少有一台需要照管的概率.

解 设 $A=\{$甲机床需工人照管$\}$，$B=\{$乙机床需工人照管$\}$，$C=\{$丙机床需工人照管$\}$. 则

(1) 只有丙机床需人照管的概率为
$$P(C)=1-P(\overline{C})=1-0.7=0.3$$

(2) 三台机床，至少有一台需要照管的概率为
$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})=1-0.9\times 0.8\times 0.7=0.559$$

19. 袋中有 50 个乒乓球，其中 20 个是黄球，30 个白球，今有两人依次随机地从袋中各取 1 球，取后不放回，求第二个人取得黄球的概率.

解 设B={第二个人取得黄球},A_1={第一个人取得黄球},A_2={第一个人取得白球},由全概率公式,第二个人取得黄球的概率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{19}{49}+\frac{3}{5}\times\frac{30}{49}=0.4$$

20. 袋中有15个球,其中有9个新球,6个旧球,第一次比赛时从中任意取1个,比赛完后仍放回袋中,第二次比赛时再从袋中任意取1个,试求:

(1) 第一次恰好抽到新球的概率;

(2) 第二次恰好抽到新球的概率;

(3) 已知第二次恰好抽到新球,求第一次也抽到新球的概率.

解 设A_1={第一次恰好抽到新球},A_2={第一次恰好抽到旧球};B={第二次恰好抽到新球}.

(1) $P(A_1)=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$.

(2) 由全概率公式,第二次恰好抽到新球的概率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=\frac{3}{5}\times\frac{8}{15}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{42}{75}$$

(3) 由贝叶斯公式,已知第二次恰好抽到新球,第一次也抽到新球的概率为

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}$$

$$=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{8}{15}}{\frac{42}{75}}=\frac{12}{21}$$

21. 某厂甲、乙、丙三个车间生产同一种产品,其产量分别占全厂总产量的40%,38%,22%,经检验知各车间的次品率分别为0.04,0.05,0.03.现从该种产品中任意取一件进行检查,试求:

(1) 这件产品是次品的概率;

(2) 已知抽得的一件是次品,问来自甲、乙、丙各车间的概率各是多少?

解 设A_i={产品是第i个车间生产的},(i=甲、乙、丙);B={产品是次品}.

(1) 由全概率公式,产品是次品的概率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{3}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=0.4\times0.04+0.38\times0.05+0.22\times0.03=0.0316$$

(2) 由贝叶斯公式,如果抽得的一件是次品,它是甲车间的概率为

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}$$

$$=\frac{0.4\times0.04}{0.0316}=0.506$$

如果抽得的一件是次品，它是乙车间的概率为

$$P(A_2|B)=\frac{P(A_2)P(B|A_2)}{P(B)}=\frac{0.38\times0.05}{0.0316}=0.6$$

如果抽得的一件是次品，它是丙车间的概率为

$$P(A_3|B)=\frac{P(A_3)P(B|A_3)}{P(B)}=\frac{0.22\times0.03}{0.0316}=0.207$$

22. 发报台分别以概率 0.6 和 0.4 发出信号“·”和“—”，由于通信系统受到干扰，当发出信号“·”时，收报台未必收到信号“·”，而是分别以概率 0.8 和 0.2 收到信号“·”和“—”；又当发出信号“—”时，收报台以概率 0.9 和 0.1 收到信号“—”和“·”，求：

(1) 收报台收到信号“·”的概率；

(2) 当收报台收到信号“·”时，发报台是发出信号“·”的概率.

解 设 $A_1=\{$发报台发出信号“·”$\}$，$A_2=\{$发报台发出信号“—”$\}$；$B=\{$收报台收到信号“·”$\}$.

(1) 由全概率公式，收报台收到信号“·”的概率为

$$P(B)=\sum_{i=1}^{2}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$=0.6\times0.8+0.4\times0.1=0.52$$

(2) 由贝叶斯公式，当收报台收到信号“·”时，发报台是发出信号“·”的概率为

$$P(A_1|B)=\frac{P(A_1)P(B|A_1)}{P(B)}$$

$$=\frac{0.6\times0.8}{0.52}=0.925$$

23. 由医学统计数据分析可知，人群中患由某种病菌引起的疾病的人数占总人数的 0.5%. 一种血液化验以 95% 的概率将患有此疾病的人检查出呈阳性，但也以 1% 的概率误将不患此疾病的人检验出呈阳性. 现设某人检查出呈阳性反应，问他确患有此疾病的概率是多少?

解 记 $A=\{$检验呈阳性$\}$，$B_1=\{$检验者患此疾病$\}$，$B_2=\{$被检验者不患此疾病$\}$.

显然

$$B_1\cup B_2=\Omega,B_1B_2=\varnothing$$

且已知

$$P(B_1)=0.005,P(B_2)=0.995,P(A\mid B_1)=0.95,P(A\mid B_2)=0.01$$

由贝叶斯公式，得

$$P(B_1/A)=\frac{0.005\times 0.95}{0.005\times 0.95+0.995\times 0.01}\approx 0.323$$

计算结果表明，虽然 $P(A|B_1)=0.95$，$P(\overline{A}|B_2)=0.99$ 这两个概率都比较高，但若将此试验用于普查，当某人检查出呈阳性，也不必过于恐慌，因为实际上患有此疾病的概率为 32.3%. 这个结果对于一个缺乏概率思维的人来讲，可能觉得不可接受. 因为他们认为，化验出呈阳性，就应该是患有此疾病的可能性很大了.

24. 设第一个箱子中有 5 个白球、4 个红球、3 个黑球；设第二个箱子中有 3 个白球、4 个红球、5 个黑球；独立地分别在两个箱子中任取一球，试求：

(1) 至少有一个白球的概率；

(2) 有一个白球一个黑球的概率；

(3) 已知至少有一个白球的，有一个白球一个黑球的概率.

解 设 $A=\{$至少有一个白球$\}$，$B=\{$有一个白球一个黑球$\}$.

(1) 至少有一个白球的概率为

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{7}{12}\times\frac{9}{12}=\frac{9}{16}$$

(2) 有一个白球一个黑球的概率为

$$P(B)=\frac{5}{12}\times\frac{9}{12}+\frac{3}{12}\times\frac{7}{12}=\frac{11}{24}$$

25. 设 A,B 为随机事件，$P(A)=0.92$，$P(B)=0.93$，$P(B|\overline{A})=0.85$，求 $P(A|\overline{B})$，$P(A\cup B)$.

解 $P(B|\overline{A})=\dfrac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\dfrac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}=\dfrac{0.93-P(AB)}{0.08}=0.85$

则
$$P(AB)=0.25$$

故
$$P(A|\overline{B})=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}=\frac{0.92-0.862}{0.07}=0.83$$

$$P(A\cup B)=P(B)+P(A)-P(AB)=0.92+0.93-0.862=0.988$$

26. 设事件 A,B 相互独立，且 $P(A)=0.5$，$P(A\cup B)=0.8$，求 $P(A\overline{B})$，$P(\overline{A}\cup\overline{B})$.

解 由于 A,B 相互独立，有

$$P(AB)=P(A)P(B)P(A\cup B)=P(B)+P(A)-P(AB)$$
$$=P(B)+P(A)-P(A)P(B)=0.8$$
$$P(B)=\frac{0.8-0.5}{1-0.5}=0.6$$

所以
$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=0.5-0.5\times 0.6=0.2$$
$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-0.5\times 0.6=0.7$$

27. 设 $P(A)=0.4$，$P(A\cup B)=0.7$，在下列情况下，求 $P(B)$：

(1) 若 A,B 互不相容；

(2) 若 A,B 相互独立；

(3)若 $A\subset B$.

解 (1)由 $AB=\varnothing$ 得 $P(AB)=0$，由加法公式，得

$$P(A\cup B)=P(B)+P(A)=0.7$$
$$P(B)=0.3$$

(2) 由于 A,B 相互独立，有

$$P(AB)=P(A)P(B)$$
$$P(A\cup B)=P(B)+P(A)-P(AB)$$
$$=P(B)+P(A)-P(A)P(B)=0.7$$
$$P(B)=\frac{0.7-P(A)}{1-P(A)}=\frac{0.7-0.4}{1-0.4}=0.5$$

(3) 由于 $A\subset B$，有

$$P(A\cup B)=P(B)=0.7$$

28. 设 $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{3}$，$A,B,C$ 相互独立，求 A,B,C 至少出现一个的概率.

解 A,B,C 至少出现一个的概率为

$$P(A\cup B\cup C)=1-P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$$
$$=1-P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

29. 若 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，试证明：事件 A 与 B 相互独立.

证 由于 $P(B|A)=P(B|\overline{A})$，有

$$\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(B)-P(AB)}{1-P(A)}$$

则 $$(1-P(A))P(AB)=P(A)(P(B)-P(AB))$$

故 $$P(AB)=P(A)P(B)$$

所以，事件 A 与 B 相互独立.

30. 设事件 A 与 B 相互独立，证明：$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

证 由于 A,B 相互独立，有

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

所以

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{B})-P(A\overline{B})=(1-P(B))-(P(A)-P(A)P(B))$$
$$=(1-P(B))(1-P(A))=P(\overline{A})P(\overline{B})$$