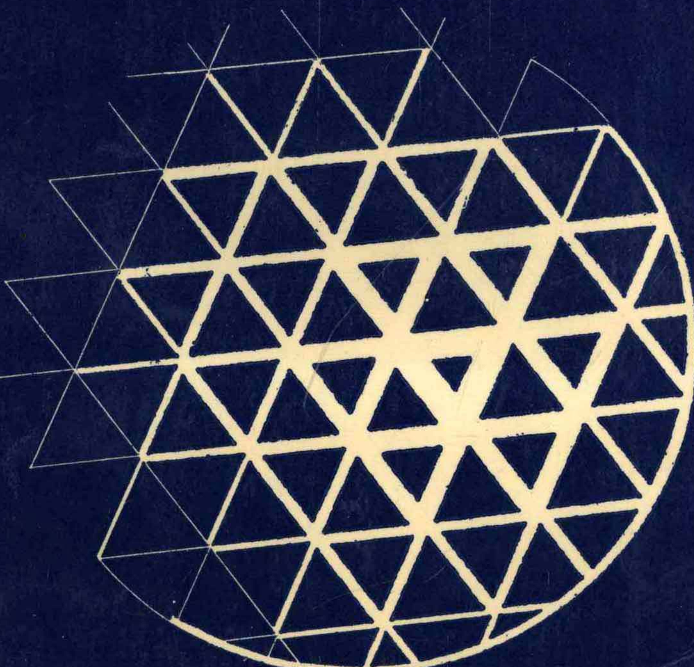
高等数学概念辨析

——概念题500个及解答

彭鑫根　编



中国科学技术出版社

高等数学概念辨析系统

——概念题 500 个及解答

彭鑫根　编

中国科学技术出版社

(京)新登字 175 号
图书在版编目(CIP)数据

高等数学概念辨析系统:概念题 500 个及解答/彭鑫根编. 一北京:中国科学技术出版社,1993.11

ISBN 7—5046—1557—9

Ⅰ.高…
Ⅱ.彭…
Ⅲ.高等数学一解题
Ⅳ.013—44

中国科学技术出版社出版
北京海淀区白石桥路 32 号 邮政编码:100081
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
廊坊市宏泰印刷厂印刷
※
开本:787×1092 毫米 1/32 印张 3.65 字数:85.4 千字
1993 年 11 月第 1 版 1993 年 11 月第 1 次印刷
印数:1—5000 册 定价 3.40 元

前　言

基本概念、基本定理与基本方法是数学教学的主体。尤其是层次较高的以微积分为主要内容的高等数学，就是由建立概念，讲解概念，推演基本定理、基本计算方法，举例说明等环节构成一系列的的教学活动。

许多新概念的引入，新计算方法的产生，是以一个一个命题，即一个一个定理来实现的。而定理的构成是把一些已有的概念联系起来，建立更高层次的、有所发展的概念。定理的证明则是揭示这些联系，使学生接受、理解新概念。然后再以这些概念，去建立高一层次的、有所发展的新概念。如此一个过程接一个过程，形成数学教学的全过程。

数学教学是十分生动活泼的。随着教学过程的渐进，学生的知识在扩大，更有意义的是学生的想象力，逻辑推理能力，分析综合能力在不断地发展和提高。一个具有高中文化的人，通过计划周到，安排合理的约 200 个数学课时，不仅使他具有解决专业中数学问题的能力，而且他更聪明了，更善于思考了，研究问题的方法更科学了。所以，对学生而言，学习数学是一个非常快乐的活动。

然而，在很多情况下，学生学习数学相当艰难。教师讲得很有声色，而有些学生听着莫名其妙。好似语言不通的人们无法交流思想。发生这种情况多数原因是有关的概念没有理解，

难以接受建立在这些概念基础上的新的关系。

有些学生，也有个别教师，常常以为不管概念正确不正确，只要会算题就可以了。其实，所有的计算方法都反映几个概念之间的联系。概念不清楚，方法也不能正确运用。经常有一些很简单的方法，却总有一部分学生要出错。

如：参变量表示的函数 $y=f(x)$：

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$$

求$\dfrac{dy}{dx}$与$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。

在求出$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi(t)}$之后，总有些学生不能正确求得$\dfrac{d^2y}{dx^2}$。常见的错误结果是：

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi(t)-\psi'(t)\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2}$$

发生这样的错误，主因是导数概念模糊。二阶导数$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$，$\dfrac{d}{dx}\neq\dfrac{d}{dt}$，对这两个概念没有辨析清楚，错误就难免了。

当然，建立了正确的概念，能够正确运用基本方法，还要多接触、多研究各类综合性问题，积累解题经验，才能灵活应用，巧妙解题。不过，概念模糊，基本方法不能正确运用，别的就谈不上了。这样的学生就没有达到数学教学的基本要求。

大多数学生是知道基本概念与基本方法的重要性的，然而限于初学的实际状况，常常不能发现实际存在的错误理解；或是一知半解，却又提不出确切的问题。这样情况的学生应与周围同学多讨论，互相启发，或是多请教教师。

如果教师掌握了学生中存在的这些状况，就应该在教学的某个阶段，对一些十分重要的概念从不同角度以多种形式

提出问题，引导学生去思考，从正误对比中加深理解，在多方面辨析过程中建立起正确认识。教师能这样做的话，对于一部分较困难的学生是很有效的帮助。

本人在多年教学实践中，接触过许多情况不同的初学者，如西藏、云南等边远地区的青年学生，多民族地区的少数民族学生，还有接受成人教育的干部班学生，以及电视大学，职工大学，函授大学的在职学生，他们往往有很高的学习热情，然而对许多概念会偏面理解，或是产生不必要的疑虑影响正确思路。也还遇到高中基础较好，然而在大学里没有责任感，思想懒惰的学生。他们不去主动理解问题，也提不出什么问题。

客观上的需要，集中一段课余时间，编写了以判别正误、填空与选择等三种形式的思考题近 500 个，形成了基本概念的较完整的辨析系统。受到了学生的欢迎，尤其是干部班学生，不论学习成绩如何，都愿意用这个系统来检查自己的学习情况，发现问题，进行认真辨析，纠正错误。

学习是艰苦劳动，而苦中又有无限的乐趣。不过，当一连串疑惑得不到澄清，一连串似懂非懂的问题困扰下不得解脱，就只有艰涩没有快乐了。但是利用这个辨析系统就可获得有效的帮助。而且判别、填空、选择这样形式的问题具有类似游戏的趣味性，常常可以缓解学生心理上的压力。当他通过辨析，获得正确概念，会体会到获取成功的轻松愉快，而增强学习的兴趣与信心。

这个系统的全部题目经我院基础部主任宋基华副教授审定，张鸿谋副教授也提出了许多重要意见，还有数学教研室的许多同仁都提供过各种帮助，一并在此深表谢意。

彭鑫根　于北京电子科技学院　1993.6.25

目　录

一

极限概念·无穷小与无穷大·函数连续性

1. **判断正误**（用数字 1 表示正确，用数字 0 表示错误。）

(1) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$A$ 是某常数，则必定 $f(x_0) = A$

（　　）

(2) 若 $f(x)$ 在 x_0 处无定义，则极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 必定不存在。（　　）

(3)若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则下面的式子是正确的：

$f(x) = A + \alpha(x)$，$\alpha(x)$ 是当 $x \to x_0$ 时的无穷小。

(4) 若 $f(x) = A + \alpha(x)$，其中 A 是常数，$\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小，则

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$（　　）

(5) $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的初等函数，当 $x_0 \in (a,b)$ 时，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 必存在。（　　）

(6) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)=A$,则

$\lim\limits_{n \to \infty} f(n)=A$,其中 n 为自然数。 ( )

(7) 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$与 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$都存在,则

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$必定存在。 ( )

(8) 若 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$,则

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$必定存在。 ( )

(9) 已知函数

$$f(x)=\begin{cases} \sin x, & x<0 \\ 1, & x=0 \\ \operatorname{tg} x, & x>0 \end{cases}$$

则

$\lim\limits_{x \to 0} f(x)=1$ ( )

(10) 当 $x \to \infty$时,$f(x)=x\sin x$ 为无穷大。

( )

(11) 当 $x \to \infty$进,$f(x)=x\cos x$ 既不是无穷大,也不是有界函数。 ( )

(12) 当 $x \to 0$ 时,$f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$是无穷小。

( )

(13) 当 $x \to \infty$时,$\dfrac{\sin x}{x}$是无穷大。

( )

(14) 当 $x \to \infty$时,$f(x)=x\sin x$ 既不是无穷大,也不是无穷小。 ( )

(15) 因为 $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a}{n^2}=0, a\neq 0$,则

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots\cdots+\frac{n}{n^2})$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}+\cdots\cdots+\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^2}$$
$$=0$$ (　　)

(16)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)+g(x)]=0$ (　　)

(17)由于 $x\to0$ 时，$\text{tg}x\sim x$，$\sin x\sim x$，则

$$\lim_{x\to0}\frac{\text{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=0$$ (　　)

(18)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$$ (　　)

(19)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续。(　　)

(20)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续。(　　)

(21)若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，$f(x_0)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 x_0 处必定连续。(　　)

(22)若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则 $f(x)$ 在 x_0 处必定连续。

(　　)

(23)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则 $y=\frac{1}{f(x)}$ 在 x_0 处间断。(　　)

(24)凡初等函数在其定义区间内都是连续的。(　　)

(25)由于 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$，所以初等函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x=0$ 处是连续的。(　　)

(26)由于 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，所以初等函数 $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ 在

$x=0$ 处连续。

(27)已知函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 1\\ x^2, & x>1\end{cases}$$

可以判断 $x=1$ 是 $f(x)$ 的间断点。 ( )

(28)$y=|x|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内处处连续。 ( )

解 答

(1) 0

说明:当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to A$,这是极限的意义。而 $f(x_0)$ 有没有意义或等于什么值,是不能根据它的极限来确定的。

(2) 0

说明:$f(x_0)$ 不存在,极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 也有可能存在,因为极限表示的是函数的变化趋势。

(3) 1 (4) 1 (5) 1

说明:初等函数在定义区间内必连续,而连续点处必存在极限,并且极限等于函数值。

(6) 1

说明:当 $x\to+\infty$ 时 $f(x)\to A$ 包含着以 x 任何方式趋于正无穷大,$f(x)$ 都存在极限 A。当然也包括 x 以正整数的方式趋于正穷大。注意,$n\to\infty$ 就是 $n\to+\infty$,因为 n 是自然数不会有负值,所以"+"省去不会误解题意。

(7) 0

说明:必须左、右极限相等才存在极限。

(8) 1 (9) 0

说明:实际上是 $f(0)=1$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sin x=0$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} \operatorname{tg}x=0$$

所以有

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0\neq f(0)=1$$

(10) 0 (11) 1

说明：在 $x\to\infty$ 的过程中 $f(x)$ 在 $x=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\pm 3\pi,\cdots\cdots$，以 π 为周期出现无数个 0。同时 $f(x)=x\sin x$ 或 $f(x)=x\cos x$ 的绝对值随 $x\to\infty$ 又可以大于任何给定的值

(12) 1

说明：因为 $\sin\dfrac{1}{x}$ 是在 $[-1,1]$ 的有界量。

(13) 0

说明：$x\to\infty$ 时，$\dfrac{1}{x}\to 0$，即 $\dfrac{\sin x}{x}\to 0$

(14) 1 (15) 0

说明：有限个无穷小之和为无穷小。无限多个无穷小之和就不一定是无穷小。

(16) 0

说明：$\pm\infty$ 都是变量不是常数。此外，$f(x)$ 与 $g(x)$ 是两个独立的且不相同的函数。所以，$+\infty-\infty$ 的结果不一定为 0，$f(x)-g(x)$ 就不一定处处为 0。

(17) 0

说明：等价无穷小替代适合于乘或除的运算，对于代数和，当实际是求差的情形就较复杂。本题中 $\operatorname{tg}x$ 与 $\sin x$ 不是恒等的两个变量，它们的差一般不是零。而如题中替代之后，分子部分就是 0(它也是无穷小)，与替代之前的差 $\operatorname{tg}x-\sin x$ 相比，并不是等价无穷小。

(18) 0

说明：只有当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$与 $g(x)$为等价无穷小，才有题中的极限。

(19) 1　(20) 0　(21) 0　(22)　0

说明：以上四题只有(19)的条件才符合连续的定义。

(23) 1

说明：是无穷型间断点。

(24) 1　(25) 0　(26) 0

说明：在 $x=0$ 时$(1+x)^{\frac{1}{x}}$与$\dfrac{\sin x}{x}$都没有定义。

(27) 0

说明：
$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} x=1$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2=1$$
$$f(1)=1$$

符合连续的定义，即 $x=1$ 是 $f(x)$的连续点。

(28) 1

2. 填空

(1)设 m、n 是常数，且 $n\neq 0$，则$\dfrac{\sin mx}{nx}=$____

(2)　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{tg}x}=$____

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty}2^n\mathrm{tg}\dfrac{x}{2^n}=$____

(4)常数 m、$n\in N$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x^n}{\sin^m x}=\begin{cases}\_\_\_\_, & n<m\\ \_\_\_\_, & n=m,\\ \_\_\_\_, & n>m\end{cases}$$

(5)有一个重要极限，其值是欧拉数

$e=2.7182818\cdots\cdots$

此极限即：

____

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^{x}=$ ____

(7) $\lim\limits_{x\to 0}x\text{ctg}x=$ ____

(8) $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1+n)}{n}^{2n}=$ ____

(9) $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{a}{n})^{\frac{n}{b}}=$ ____ $(ab\neq 0)$

(10) $\lim\limits_{x\to\infty}A(1+\frac{r}{x})^{xt}=$ ____ $(rt\neq 0)$

(11)当 $x\to$ ______时，$x\sin\frac{1}{x}$为无穷小。

(12) $x\to$ ______时，$\frac{x-3}{x}$为无穷小。

(13)当 $x\to$ ______时，$\frac{1+2x}{x}$为无穷大。

(14)当 $x\to$ ______时，$\frac{x-1}{x}$为无穷大。

(15)当 $x\to$ ______或 $x\to$ ______时，x^2+x-2 为无穷小。

(16) $f(x)\neq 0$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=\underline{\qquad}$$

(17)当 $x\to x_0$ 时，α 与 β 是等价无穷小，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha}{\beta}=\underline{\qquad}$$

(18)当 $x\to x_0$ 时，α 是比 β 高阶的无穷小，则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\beta}{\alpha}=\underline{\qquad}$$

(19)当 $x\to 0$ 时，$f(x)$是比 x 高阶的无穷小，则

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\_\_\_\_\_\_$$

(20)当 $x\to 0$ 时,$2x-x^2$ 与 x^2-x^3 相比,较高阶无穷小是______

(21)$y=1-\dfrac{1}{e^{\frac{1}{x^2}}}$的间断点是______

(22)$f(x)=(1+\dfrac{1}{x})^x$ 在 $x=$______处间断。

(23)$f(x)=\dfrac{\sin\dfrac{1}{x}}{x}$在 $x=$______处间断。

(24)$f(x)=\begin{cases}x+1, & x>0\\ x, & x\leqslant 0\end{cases}$

在 $x=$______处间断。

(25)$f(x)=x\operatorname{ctg}x$ 在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$内的间断点 $x=$______

(26)$f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$在 $x=0$ 处间断,如果补充定义 $f(0)=$______,则 $f(x)$在 $x=0$ 处连续。

(27)$f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$在 $x=0$ 处间断,如果补充定义 $f(0)=$______,则 $f(x)$在 $x=0$ 处连续。

(28)由于 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\operatorname{tg}x=\infty$,故 $x=\dfrac{\pi}{2}$是函数 $\operatorname{tg}x$ 的______型间断点。

(29)当 $x\to 0$ 时,根据 $\sin\dfrac{1}{x}$的变化特征可知,$x=0$ 是 $\sin\dfrac{1}{x}$的______型间断点。

(30)$f(x)=\begin{cases}x+1, & x\leqslant 0\\ x^2, & x>0\end{cases}$

$x=0$ 是 $f(x)$的______型间断点。

解　答

(1) $\dfrac{m}{n}$　　　　(2) 1

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}2^n\cdot\dfrac{x}{2^n}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}x$

$=x$

(4) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^n}{x^m}=$

$$=\begin{cases}\infty, & n<m\\ 1, & n=m\\ 0, & n>m\end{cases}$$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^x$

(6) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1-\dfrac{1}{x})^{-x}\right]^{-1}$

$=e^{-1}$

$=\dfrac{1}{e}$

(7) 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}x\cdot\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}$

$=\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{x}{x}$

$=1$

(8) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\dfrac{1}{n})^n\right]^2$

$=e^2$

(9) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(1+\dfrac{a}{n})^{\frac{n}{a}}\right]^{\frac{a}{b}}$

$=e^{\frac{a}{b}}$

(10) Ae^{rt}

(11) 0 (12) 3 (13) 0 (14) 0

(15) 因为 $x^2+x-2=(x+2)\cdot(x-1)$，所以当 $x\to-2$ 或 $x\to1$ 时，$x^2+x-2\to0$

(16) ∞ (17) 1 (18) ∞ (19) 0

(20)因为

$$\frac{2x-x^2}{x^2-x^3}=\frac{2-x}{x-x^2}$$

所以较高阶无穷小是 x^2-x^3。

(21) 0 (22) 0 (23) 0

(24)因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x+1)=1$

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}x=0$$

所以 $x=0$ 处间断。

(25) 0

(26)因为 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

所以补充定义 $f(0)=e$

(27) 1 (28)无穷型 (29)振荡型 (30)跳跃型

3. 选择

下列各题中备有(*a*)、(*b*)、(*c*)、(*d*)4 个答案，其中有一个以上是正确的，可将认为正确的答案的代号 *a*、*b*、*c*、*d* 填在最后的____上。

(1)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则必定

(*a*) $f(x)$在 x_0 处有定义；

(*b*) $A=f(x_0)$