HIT

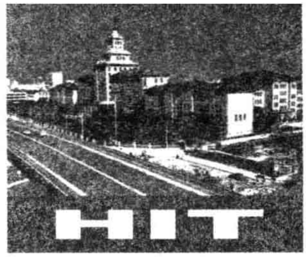
数学·统计学系列

Modern Topology Research

近代拓扑学研究

[美] 希尔顿 等著　　林聪源 译

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



数学·统计学系列

近代拓扑学研究

Modern Topology Research

[美] 希尔顿 等著

林聪源 译

哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书主要是对近代拓扑学的研究，全书一共分为5章，第1章主要讲述了曲线是什么，第2章列举了3维流形中曲面的一些研究成果，第3章主要讲述了半单纯同伦理论，第4章为代数拓扑学之函子，第5章介绍了可微分流形上的几何理论.

本书适合高等院校数学专业的师生和数学爱好者参考阅读.

图书在版编目(CIP)数据

近代拓扑学研究/(美)希尔顿等著；林聪源译. —哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2012.12

ISBN 978-7-5603-3915-3

Ⅰ.①近… Ⅱ.①希…②林… Ⅲ.①拓扑—研究 Ⅳ.①O189

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第314801号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 钱辰琛
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16 印张11.5 字数229千字
版　　次 2012年12月第1版 2012年12月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-3915-3
定　　价 38.00元

◎目录

引　言

第二次世界大战后，数学中被称为“拓扑学”的这一分支，在深度上和广度上，都有着澎湃的进展. 它和许多的数学分支之间，彼此影响，互为呼应①；特别是从近世代数学、代数几何学、泛函分析论以及偏微分方程式论各方面的理论中，得到许多的灵感，而又回报它们以精妙的启发. 因而使得我们今天能同时谈论纯粹及应用拓扑学，这毋宁说也是数学整体性的一个健全的象征. 比较起来说，第二次世界大战前拓扑学孤立的局面，已经由于拓扑学家不断地经营，使拓扑学在数学的一般发展上，占据了一席之地.

不止于此，代数拓扑学本身还导出了(至少)两支数学的新雏，即同调代数学以及范畴论，目前都已具有独立的地位. 虽说拓扑学仍在继续不断地滋养着这两支理论的发展，然而即使一个地域观念最深的拓扑学家也不敢把这两支理论划入拓扑学的领域里. 所以，我们也并不想尝试着把这些炙手可热的东西包含在本书内.

① 这种呼应的一个有趣的例子是，布于实数域上可除代数存在问题的解决，本书以及 Curtis 的 Studies in Modern Algebra 都有论及. 解答是利用代数拓扑学的方法根据 Bott 的一个结果(原来是利用变量计值法证明的)而得到的. Bott 的这一理论现今可利用代数拓扑学方法证得，并且已经利用 Banach 代数的理论推广了.

基于相同的理由，本书将不谈及利用代数拓扑学以及微分拓扑学的方法应用在代数几何学以及解析学的问题.譬如，由 Hirzebruch 所引入，并由他以及其他许多人继续钻研不已，且影响深远的 Riemann－Roch 定理的一般形式，在此不得不忍痛割爱.又如，Atiyah 以及 Singer 曾做了一件有意义的工作，即眼光独到地对椭圆型微分算子给出了一套指数的判定法.再如，Atiyah 以及 Bott（晚年）将 Lefschetz 不变点公式推广到椭圆型微分算子上去.诸如此类典雅而又深入的拓扑学应用不胜枚举，只得说它们超出了本书所讨论的范围.事实上，如果真想把这些应用作个介绍，而又能让读者们对它有个最粗浅的了解，恐怕这本书的页数就要近千了.

所以，本书将着重（纯粹）拓扑学的讨论.这个丰富的题材将自然地分成四个意义显明的部分——这并不是说，它们彼此之间绝无重复的地方——即代数拓扑学、微分拓扑学、几何拓扑学以及一般的，也就是点集拓扑学.

一般拓扑学恐怕是和其他部分相关最少的了；在美国及西欧，在任何方面都很难见到它引人注目的发展.后面指出的这个事实，很可能是因为它本身不像拓扑学的其他部分一样具有清晰定义的方法论，因而并没有从系统化的发展和强而有力的技巧的应用中得到进展.另外一个事实是，一般拓扑学在其他数学分支上的应用多半为古典的.所以，像在代数及微分拓扑学中，由于它们和拓扑学以外的问题的频繁接触，从而受到的启发，在一般拓扑学中则付诸阙如.虽说如此，一般拓扑学自然也还有相当的进展，特别是在东欧诸国.我们可以从 P. S. Alexandrov 所写的 On Some Basic Directions in General Topology 一文中，对其当今地位及主要发展，略窥一斑.这篇文章在英译本的 Russian Mathematical Surveys（1965，19：1-39；1965，20：177-178）中可以找到.G. T. Whyburn 在本书中写了一章"曲线是什么".在这章中，他阐明了为什么需要对曲线下一个明确的定义，同时说出如何利用点集拓扑学达到这个目的.不同形式的曲线经由拓扑性质而区分出来.最后，作者给出了一个新的应用，即利用拓扑学理论证明了，如果一个复变函数是可微分的，则它是可无穷次微分的（不像以往借助于柯西（Cauchy）定理及柯西积分公式）.

几何拓扑学、代数拓扑学以及微分拓扑学三者之间彼此紧密相连.从历史的眼光来看，我们可以说，几何拓扑学为代数拓扑学的先驱，因为代数拓扑学顾名思义，无非就是利用代数方法以试图解决几何的问题.事实上，早期的那些几何拓扑学的拓荒者，高度地发挥了各式各类的组合技巧，想用以处理基本分类问题，不幸在证明"主要猜想"（即拓扑的和组合的分类为等价的）时，却不免遭

到失败的命运. 20 世纪 30 年代的拓扑学家们记取着这个教训，乃将他们主要的注意力转向多面体的同调群上（这是顺从庞加莱（Poincaré）的意见）以及这些结构上的发展.

当前，为了术语上的方便，名义上我们把组合方法划在几何拓扑学的范围内. 当然了，几何拓扑学除此之外还包含了许多其他的方法及观念：例如，拓扑流形学. 毋庸置疑的，几何拓扑学又再度成为研究领域中最活跃的部分. 许多令人振奋的结果和有趣的念头更刺激了这种倾向. 举几个例子吧！ 1960 年，Stallings 及 Zeeman 继承 Smale（后文中我们还要谈到 Smale 这个人）的工作，证明了庞加莱猜想的一般形式在 5 维以上的空间里成立，即一个赋向的 $n-1$ 连通的组合 n 维闭流形与 n 度单位圆球壳为拓扑等价的. 1956 年，Thom 在组合流形上定义了有理庞加莱类，S. P. Novikov 近而证明了这些类都是拓扑不变量. 1960 年，Kervaire 提出了第一个其上不能安置拓扑相合之微分结构的组合流形的例子. 同年，Milnor 提出了两个同胚而非组合等价的多边体的例子.（这也就反证了一般紧致多边体的“主要猜想”）但拓扑等价之流形是否必为组合等价，这个问题则仍悬而未决. 1951 年，Moise 曾把他的全部精力都用在写作一系列的论文上，在这些文章里，他证明了每一个 3 维流形都可以安置组合结构，而且这样的结构是唯一的——Bing 后来发表了一篇更简化的讨论. 1957 年，Papakyriekopoulos证明了可贺的 Dehn 引理，这是几十年来一直未能加以证明的，因而使人重燃起对庞加莱猜想的兴趣，即是否每一赋向单连通 3 维闭流形都与圆球壳拓扑等价. 1960 年，Zeeman 发现了一个 n 度圆球壳能在 $n+k$ 度圆球壳上组合串接的必要条件是 $k=2$. 上面这些简短支离的记载，自然未能把所有对几何拓扑学具有不可磨灭的贡献的人都一一列举出来①. 不过，有兴趣的读者，可以从 Topology of 3-manifolds and Related Topics（3 维流形之拓扑及其相关专题）这本文集中，找到这一领域的范围以及进展方向的蛛丝马迹.（这本文集是收集所有 1961 年在美国佐治亚州雅典城举行的拓扑学研讨会上收到的论文编辑而成的）

本书中，第 2 章由 W. Haken 所写的“3 维流形中曲面的一些研究成果”，叙述了一些作者以及其他人士在这方面的成就. 读者们将会发觉，在这个领域中，

---

① 我们必须特别提到 J. H. C. Whitehead，他于 1960 年逝世，享年 55 岁. 他对组合拓扑学的重要贡献是于 20 世纪 30 年代以及 20 世纪 40 年代初期，举例来说，其正则邻旁的理论及简单同伦理论，导致了今日复兴的生机.

想象力占据着很重要的地位，就如同作者所说的，同时这也带着被严重曲解的危险性，所以必须特别在此提醒诸位的注意.

就如我们前面提过的，代数拓扑学之所以会有人研究，不仅是因为它本身是一门独立的学问的关系，同时也是因为它是研究数学其他支派的工具之一. 事实上，它就是源于对几何拓扑学上的应用. Milnor 在对"主要猜想"的反证里，用了非常特别的代数拓扑观念，这可远溯至 Reidemeister－Franz 的扭转观念和 J. H. C. Whitehead 的变形的扭转观念，此二者是 Milnor 有关单纯同伦理论的核心所在. 不用说 Milnor 的工作和拓扑学上其他令人兴奋的发展，已经使得扭转观念和单纯同伦理论受到广泛的关注. 同样的理由，许多迷人的代数问题也因而产生了——我们只要拿 Bass 的工作为例就可以看到这一层连贯的关系. 归根到底，代数拓扑学最惊人的应用应该是微分拓扑学. 这门学问，在 1956 年 Milnor宣称 7 度圆球壳上能安置多种微分结构后，瞬即被认识到，它本身即具有被单独研讨的价值. Milnor 在他这个著名的定理中，利用到代数拓扑学中"Fibre Bundle"这部分的理论，而在拓扑学的历史上，树立了这个无比重要的里程碑，这实在值得我们在此小心翼翼地解说一下. ①

欧几里得空间中的每一个开集，都具有自然圆滑的，即可微分的结构——也就是我们熟悉的一般多变数微分论中的结构. 一个拓扑流形是一 Hausdorff 空间，且具有区域性地等价于欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中开集的拓扑结构. 这个流形的维数就是 n. 这个流形可能同时还具有区域性地等价于 $\mathbf{R}^n$ 中开集的圆滑结构，在这种情况下，我们就称之为微分流形. 介于这两个观念之间有组合流形，即一个拓扑流形安置着组合结构(此种结构为之三角剖分的等价类，使得每一顶点的星形都组合性地等价于 n 度圆球壳经标准三角剖分后顶点的星形).

这个观念确实是介于微分流形与拓扑流形之间的. 因为，从一方面来说，我们可以拆去组合流形上的组合结构，所剩的就是一个拓扑流形了；同时在另一方面，J. H. C. Whitehead 有一个定理证明了：每一个微分流形上都带着一个仅有的主要的组合结构. ②对于每一类的流形，都配有适当种类的函数，从一个流形映到另一个同类的流形中去. 微分流形配有微分映象，保持着微分结构；组合

---

① 以下我们并不想下个精确的定义，这些在适当的教本中找得到. 当然了，我们已提过像拓扑的、组合的以及可微分的流形的观念.

② Cairns 较早时即示明了每一个可微分流形都有三角剖分，而 Whitehead 展示了一个相合的圆滑三角剖分的存在(与唯一). 当然了，当我们从可微分流形换到组合流形的过程中，我们接触到无数实际上的困难，这些问题已经被深刻研讨了，特别是 Lashof 及 Rothenberg 两人.

流形间的块式映象保持着组合结构；而拓扑流形间的连续映象保持着拓扑结构.而且，一个微分映象可用与其圆滑流形相关联的组合结构间的块式映象来逼近；一个块式映象对于其组合结构所具有的拓扑结构而言，是连续的.我们可以把这些情形表示为

$$\text{Diff}\to\text{PL}\to\text{Top} \tag{1}$$

这里，Diff 表示微分流形类(及其适当的映象)，PL 表示组合流形类(及其适当的映象)，Top 表示拓扑流形类(及其适当的映象)，式中的箭头表示从一类进到另一类.为了参考上的方便，我们在箭头上标以字母

$$\text{Diff}\xrightarrow{W}\text{PL}(W\text{ 表示“Whitehead”})$$

$$\text{PL}\xrightarrow{F}\text{Top}(F\text{ 表示遗忘“Forget”，因为我们遗忘掉 PL 上的组合结构}) \tag{2}$$

读者们宜将 W 及 F 视为广义的函数，事实上，我们用的符号业已表明了这个观点，所以我们有合成映象

$$\text{Diff}\xrightarrow{FW}\text{Top}$$

我们注意，在每一范畴 Diff，PL 及 Top 中，有两个适当的概念，即介于对象物间的“等价”概念以及从一对象物至另一对象物的同构映象的概念.后者的意思是指一个映象 $f:M\to N$，对它而言，存在另一映象 $g:N\to M$，使得合成映象 gf 为 M 上的恒等映象，同时 fg 为 N 上的恒等映象.此时我们则称 g 为 f 的逆映象.如果有一映象 $f:M\to N$ 附有逆映象(即 f 为一同构映象)，则称 M 和 N 是“等价的”，记为 $M\sim N$.如果我们想特别标明此同构映象，则记为 $f:M\sim N$.在 Diff 中的同构映象 $f:M\sim N$，我们称之为可微分同构映象①，而说 M 和 N 是微分等价的.在 PL 中的一个同构映象 $f:M\sim N$，称为 PL 同构映象(块式线性同构映象或组合等价).在 Top 中的一个同构映象 $f:M\sim N$，称为同胚.有了以上这些准备后，现在我们可以把 Milnor 的成就(至少是其中最引人的部分)说明一下了：令 S^7 表示 7 度圆球壳，附带着平常我们将它视为 $\mathbf{R}^8$ 中之一个闭子空间时的圆滑结构，则存在一个圆滑流形 M，使得 $FW(M)\sim FW(S^7)$，而 $M\not\sim S^7$.也就是说，当我们把 M 和 S^7 同时视为拓扑空间时，它们为等价的.然而，把它们同时视为微分流形时，则不然.事实上，我们知道，存在 28 个圆滑流形，个个都与 S^7 同胚，而其中却没有两个是微分同构的.

① 这不过是“可微分”及“同胚”的一个混合，然而并非每一个可微分同胚映象都是可微分同构映象，因为后者我们同时要求其逆映象也是可微分的.

如我们所说，微分拓扑学及块式线性拓扑学的大部分理论都与式(1)有极密切的关联，也不算太草率. 我们可以利用这个式子，把前面提到过的 Thom, Novikov 及 Kervaire 诸人的研究结论表示出来. Thom 曾在组合流形上定义了某些余同调不变量，(这些兴趣主要是 Pontrijagin 所引发的)又在微分流形上定义过余同调类[①]，如记 $p(M)$. 我们以 p 记由 Thom 定义的类. $\bar{p}$ 具有下一性质

$$\bar{p}(WM)=p(M) \tag{3}$$

则 Novikov 的结论可记为：若 $FN_1\sim FN_2$，则 $\bar{p}(N_1)=\bar{p}(N_2)$，即同胚的组合流形具有相同的有理 Pontrijagin 类. Kervaire 的结论则为：存在一个 10 维的组合流形 N，使得所有的微分流形 M，都不满足 $FW(M)\sim F(N)$. 之后，不断有人在 8 以上的其他维数里，也找到了这个现象的例子. 读者们宜注意，Kervaire 的这个命题比下一主张还要强：存在一个组合流形 N，使得所有的微分流形 M，都不满足 $W(N)\sim N$；因为前者证明了，M 上没有一个组合结构(不限于被自然赋予的那一个)能和已给的微分结构相合. 不止如此，Eells 及 Kuiper 事实上曾明显地表示了，存在一个组合性的 8 维流形，它的同伦型不包含一个微分流形. 流形上的"主要猜想"说：若 M 及 N 是两个组合流形，有 $FM\sim FN$ 的关系，则 $M\sim N$. Moise 有一个定理说：对于每一拓扑 3 维流形 M，存在唯一的一组组合流形同余类 N，使得 $FN\sim M$. 上面这些例子，都可以用来说明，今天的拓扑学无处不是隐含着式(1)的[②]. 当然了，这个式子并没有启示我们，如何去解决由它所引发出来的种种问题. 然而，我们可以很恰当地说，Thom, Novikov, Kervaire, Eells 以及 Kuiper，还有 Milnor 诸人，都是用了代数拓扑学的方法. 因而我们现在能把拓扑学明确地分成三个相关的领域——而非只有代数拓扑学及微分拓扑学——即微分拓扑学的代数方法论，微分拓扑学的解析方法论，以及用代数研究拓扑空间和连续映象的代数拓扑学. 在本书内，我们将各有一章来讨论每一个领域. 这些年来，这方面所有的成就，是如此的激励人心，而进步又是如此的迅速，使我们无法在这篇短略的引言中，对它们作一个公平的评价. 不过我们可以从下面要举出来的，专门讨论代数拓扑学及微分拓扑学的大问题的

① 事实上，Pontrijagin 定义了整除同调类，而 Thom 定义了有理数；在式(3)中，Pontrijagin 类是取有理系数的.

② 事实上，我们应该在式子之右端接上"→Ⅱ"，其中"Ⅱ"为拓扑流形的范畴，而等价关系以同伦等价替代同胚等价，则我们可在扩大的式中列出庞加莱猜想.

三篇文章中,对这些神速的进展有一点可琢磨的印象. 第一篇为 Eilenberg 在 1949 年发表的,题目是 On the Problem of Topology(拓扑学问题). 值得注意的是,这篇论文正好在一次代数拓扑学的革命之前发表,这个革命是由于 Serre 把 Leray 的谱列理论应用在一般形式的纤维空间上同调论的研究上而引起的. 这一篇文章可以说把代数拓扑学带入了一个金色年代,也就是在这个飞跃前进的年代里,Eilenberg 所列出的许多问题被一一解决了,同时吸引了无数后继的青年数学家,而代数拓扑学也就被当作一门学问,被大家广泛地研读着.(第二篇)这段时期,一直持续到 Massey 在 1955 年发表了 Some Problems in Algebraic Topology and the Theory of Fibre Bundles(代数拓扑学问题及纤维丛理论)之后,代数拓扑学仍看不出是一门能自圆其说的学问.(回想 1956 年 Milnor 发表了 7 度圆球壳上之微分结构的论文)然而,纤维丛的理论(包括李群及大域微分几何的研讨)在当时被认为具有特别的重要性[①]. 正如 Massey 曾根据在康奈尔大学举行的"纤维丛及微分几何学会议"的记录所列的表一样.(第三篇)Lashof 从 1963 年在西雅图举行的"微分拓扑学及代数拓扑学暑期研讨会"的参加论文中,以主编的身份,选录了一些问题. 这些问题本身,就像会议名称一样,对微分拓扑学在拓扑学研究中所占的主要地位以及代数拓扑学所具有的广泛辅助力量作了一番考验. 这并不是说,有意贬低以往的代数拓扑学以及之前五年间代数拓扑学家伟大的成就;也非暗示说,微分拓扑学及代数拓扑学的界线已被清楚地划分了. 相反的,代数拓扑学家越来越关注和倾力耕耘的问题,却是拓扑学领域之外有关结构的问题——微分结构、解析结构,复流形以及流形上的李群运算等.[②]

因而由 Eilenberg, Massey 及 Lashof 所写的这三篇论文都反映了,而且相当地影响了过去几十年内拓扑学研究的目标、方向. 拓扑学家 S. P. Novikov 还曾把 Lashof 列出的问题作了一番分析,就作者及题目,收集了一些在西雅图会议上发表的论文,编成一本名叫《1963 年西雅图拓扑夏季研讨会》的文集. 有赖

---

① 1953 年,Thom 已经在他的论文中提出余边界的理论(Quelques propriétés globales des variétés différentiables. Comm. Math. Helv., 1953, 27: 198-232),这篇文章(Thom 即以此文赢得 1958 年在爱丁堡(Edinburgh)举行的国际大会的奖牌)被公认为非常具有影响力与说服力,而 Massey 认识到它们的重要性. Thom 利用代数拓扑学的标准方法(同伦群之计算)得到可赋向或不可赋向的余边界环上之资料,所以他的工作可以视为我们下面所将叙述的"应用代数拓扑学"之一雏形.

② 同时,代数拓扑学家另有一条路线——即代数学的方向,特别是同调代数及范畴代数. 后面这两支代数学,吸引了拓扑学家及代数学家,供给代数拓扑学发展的生机.

于 Novikov 独到的眼光，他宣布了一些问题的答案，而且几乎对所有的问题都给了高度启发性的评注.

我们一点也没有企图想要，即使只是过去几十年来鼓舞人心的结果，都网罗进本书范围内；然而，却很值得列下那些惊人的成就. 这样做之前，我们必须先对那些由于篇幅所限，不得不将他们的工作略去不提的人表示歉意. 同时，我们再强调一次，以下所举不过是杰出工作中的代表性例子.

我们读到过的 Serre 的大作，给了同伦理论，尤其是有关同伦群的计算问题，很大的刺激与动力. 接下去的几年里，Serre，Cartan，Toda，Moore 以及其他许多人，做了许多有关这个问题的杰出作品. 不止如此，Eilenberg 和 Maclane 又发现了一个关键性的观念，即一个具单一非消灭同伦群的复合形，在许多讨论中扮演着极重要的角色. 从某些观点来看，这种复合形可说是同伦理论的柱石. 除此之外，有人发现了余同调群可视为映至这种 Eilenberg－Maclane 复合形的映象的同伦类，这也就是近代最主要的代数拓扑学观念之一的"可表余同调理论"出现的先兆. Serre 同时还发现了 Steenrod，Adams 及其他人深入探讨的准则余同调运算，事实上是 Eilenberg－Maclane 复合形上的余同调群中的元素，因而，给了他们的研究一些更多的帮助和更明确的方向. Moore 受了 Eilenberg 的影响，把注意力转到空间的连续单线复合形上，他最大的功劳是，指出空间上的，主要的(有意义的)代数同伦不变都包含于连续复合形中. 这个意想，曾被许多人进一步的发挥，同时，Kan 描述出，一个自由单纯群在某种意义下，可以代表这个空间. 因而，在理论上，把同伦理论简化成群论[①]. K. A. M. Guggenhein 在为本书所写的 Semisimplicial Homotopy Theory(半单纯同伦理论)一章中，说明了 Moore 及 Kan 两人的进展，并且介绍了这个理论及其发展. 他以逻辑上相当自给的形式写下这个理论，然而论其动机，无非是从拓扑空间的研读里，从连续函子或标准建构中得来的.

代数拓扑学上的伟大进展常与 Adams 及 Bott 这两个人的名字相提并论的. 1958 年，Adams 在他的一篇题为 The Nonexistence of Elements of Hopf Invariant One 的论文中，宣布了这一个悬而未决甚久的问题之解答. 回溯至 1935 年时，Hopf 证明了，若 n 是偶数，则从 S^{2n-1} 至 S^n 的所有映象具有无限多

① 除开其他重要贡献之外，Kan 同时为自由单纯群以及 J. H. C. Whitehead 的 CW－复合形间树立下精确的关系，因而将他的方法与 Whitehead 的组合同伦理论连贯起来，而成为代数拓扑学中最成功的工具之一.

相异的同伦类. 他是展示一个数字不变量证得的，这个不变量现在被通称为同伦类的 Hopf 不变量，它可取任意偶数值. 自然的，我们要问——Hopf 自己也提出了这个问题——是否它能取奇数值呢？也就相当于说，它能否取 1 为值呢？Hopf 证明了，当 $n=2,4$ 或 8 时，答案是肯定的. G. W. Whitehead 则证明了，当 $n\geqslant4$ 时，Hopf 不变量 1 存在的必要条件是 n 被 4 整除. Adams 运用准则余同调运算，证明了只有当 n 为 2 的乘幂时，这个数才可能存在. Toda 又证明了，当 $n=16$ 时，这样的数是不存在的. Adams 用了他自己发明的，联络余同调学及同伦学的理论，一套深入的谱列及剩余同调运算，提出了这个问题的完整答案：即仅当 $n=2,4,8$ 时，这样的数存在. 我们并不是到此就结束对这件事的讨论.[①]现在转而谈谈 Bott 的著名的周期性原理. 古典群的同伦群的计算一直受到很高的重视，这个问题不仅本身极富趣味，同时由于它在纤维丛理论及其他应用的成功，也引起了人们对它的兴趣. 举例而言，考虑 $\mathbf{C}^n$ 上所有酉变换所成的酉群，记如 $U(n)$. 当我们把 $\mathbf{C}^{n+1}$ 视为 $n+1$ 维向量的集合时，存在一个自然嵌入映象，将 $\mathbf{C}^n$ 的元素映至 $\mathbf{C}^{n+1}$ 中，最后一位因子为 0 的向量. 这就导引出一个从 $U(n)$ 至 $U(n+1)$ 的自然嵌入映象. 令 U 为联集 $\bigcup\limits_n U(n)$，我们称之为大酉群或稳定酉群，其同伦群称为酉群的稳定同伦群. 事实上，当 $n\geqslant\frac{1}{2}(r+1)$ 时，$\pi_r(U(n))=\pi_r(U)$；因而我们看到，当 n 极大时，$\pi_r(U(n))$ 稳定. Bott 证明了一个漂亮的定理，即有一个标准的同构，使 $\pi_r(U)=\pi_{r+2}(U)$. 因而得到一个相当简单的结果，即当 r 为偶数时，$\pi_r(U)=0$；当 r 为奇数时，$\pi_r(U)=Z$；故 U 的同伦群之周期为 2. 如果我们把 $\mathbf{C}$ 换成 $\mathbf{R}$，而考虑大正交群 O，则极可喜的、惊人的相似结果，此时周期为 8，而且 Bott 把介于周期之间的每一项都给出了群论方式的解说. 这些结果发表在 1957 年的 Stable Homotopy of the Classical Groups（古典群的稳定同伦）一文中. 其后又有许多进展，$\pi_r(O(n))$ 及 $\pi_r(U(n))$ 被更精细地计算了. Kervaire 及 Milnor 以 Bott 的工作为基础，分别独立地证明了，当 $n>7$ 时，S^7 的不可平行化原理. 同时，Atiyah 及 Hizebruch 基于对 Grothendieck 意想的观念，发展出了实数及复数的 K－理论. 这个理论是一个特殊余同调理论. 所谓特殊的意思是指：它满足了 Eilenberg 公理系统中，除了

---

① 我们的意思是指 Adams 的证明被更换了，大抵归因于他在 K－理论上的工作；然而 Adams 氏谱序列，亦即他原来的证明所依据者，仍保持有其重要性，而且有一个模 P 变形式的 Adams 氏定理. 最重要的可能是，Adams 的结果告诉我们，布于维数不为 1，2，4，8 的实数域上之可除代数是不存在的.

维数公理以外的所有公理. 维数公理是说:0 度圆球壳的减缩化余同调群,在维数异于 0 处,皆为消灭. 因而它导出了复合形 X 上的实(复)向量丛的同余类,而产生一特殊余同调理论. 这个理论,像一般余同调理论一样,可以用 Eilenberg－Maclane 复合形表现,代表的东西通常被视为谱,亦即一般化的复合形观念. 关于一实(复)K－理论的适当谱是正交谱(酉谱). K－理论在许多地方看起来比平常的余同调理论更加自然. 这是因为我们对向量空间上的运算很熟悉,因而对向量丛上的运算也很熟悉的关系. 特别地说,Adams 研讨了 K－理论中的基本运算后,于 1961 年证明了一个值得褒扬的定理,是讲有关圆球壳上独立向量场的数目的. 对任一已给正整数 n,有一著名的 Hurwitz－Radon－Eckmann 数 $\rho(n)$,定义如下:将 n 分解成 $n=2^b k$,其中 k 为奇数,再令 $b=c+4d$,$0\leqslant c\leqslant 3$,则 $\rho(n)=2^c+8d$. $\rho(n)$的特性是在 S^{n-1} 上存在 $\rho(n)-1$ 个线性场,但不存在 $\rho(n)$个场. Adams 证明了 $\rho(n)$这个数,不仅解决了线性问题,同时还解决了连续的问题,即 S^{n-1} 上不存在 $\rho(n)$个无关的场. K－理论的另一个成果是,它导引出 Hopf 不变量 1 的答案,而且简短到令人不敢相信的程度,套用一句 Atiyah 的话:"一张扑克牌就够写了". K－理论和一般余同调理论有两个很重要的关联,(撇开用 Eilenberg－Steenrod 公理看时,它们形式上的相同不谈)其中之一是 Atiyah－Hizerbruch 谱列,联络普通余同调 H 及任意给的余同调理论 h:一有限维数复合形 X,在这个谱列中,E_2 为 $H(X;h(s^\circ))$,E_∞ 为由 X 的梁架分解导出的 $h(X)$,经过滤后,所附带的级群. 对这部分,有一个精彩的说明,可以在 Atiyah－Hizebruch 所作的 Vector Bundles and Homogeneous Space(向量丛及齐性空间)中找到. 第二个关联是"陈氏特征",这是一个从 $K(X)$至 $H(X;Q)$的乘法同伦. $H(X;Q)$表示 X 的有理系数普通同调. 1958 年,Hirzebruch 在致爱丁堡世界数学会议的报告中,对此曾作了说明. Dold 的 Relations Between Ordinary and Extraordinary Cohomology(普通余同调与特殊余同调的关系)文中,有一篇雅实的译文.

我们已提过在 1953 年产生的 Thom 氏余边界理论. 这个理论已被广泛地发展、推广及应用了. 其基本构想是,将(闭)流形就它们是否共同成某一同类开流形的边界而区分. 更精确地说,当我们考虑赋向闭微分流形 M_1 及 M_2,如果存在一 $n+1$ 维赋向开微分流形,而它的边界恰为 M_1 及 M_2 之边界的联集时,我们称 M_1 及 M_2 为余边界的. 这是一个等价关系,等价类的集合写如 Ω^n. 在相离和的运算下,Ω^n 有交换群的结构,而且,拓扑积引导出一个乘法,$\Omega^m\times\Omega^n\rightarrow$

Ω^{m+n},使得 $\Omega=\bigoplus_{n}\Omega^{r}$ 变成一个交换级环,称之为赋向余边界环. Thom 证明了 Ω^{n} 可看成某一个稳定同调群(属于我们现在所称的特殊正交群的 Thom 复合形者)来计算,Atiyah 则发现,这可导得空间 X 的余边界理论.(将 X 映入 Thom 复合形)因而,Thom 理论即为圆球壳的余边界理论. 它和余边界理论的关系有如同调理论与余同调理论间的关系一样. 这个观点使得问题大大简化了,同时,新的结果也不少. Wallace 一手完成了 Thom 所开始的 Ω 的计算. Milnor, Dold, E. H. Brown, Peterson 和其他人,对此理论也有重大贡献. Milnor 于 1962 年发表了 A Survey of Cobordism Theory,文中他讨论了已知的结果和没有解决的问题. 这一篇浏览性的介绍,强调了自 1952 年有此理论以来所有的重大进度. 这是远非它当年在 Atiyah－Singer 指数定理的证明[①]中所担当角色所可同日而语的. 下面我们要谈一些更进一步的发展,即 Smale 的所谓 h－余边界定理. E. Dyer 为本书写了一章 The Functors of Algebraic Topology (代数拓扑学之函子). 在这章中,他根据组合同伦理论的基本观念,将代数拓扑学的广泛研讨,写成纲要. 建立理论之后,他把余边界理论和稳定向量丛(K－理论)看成特别的情况. 到此为止,我们已经用了不少篇幅来读"纯粹"和"应用"代数拓扑学,现在我们必须讨论一下,前面提到过的所谓微分拓扑学的解析方法,虽然说有点不合时宜. 很幸运的,微分拓扑学在勘测方面,有很丰富的文献. 我们特别举出 Smale 的一篇文章 A Survey of Some Recent Developments in Differential Topology(微分拓扑学近期发展一览),Wallace 的一本讲稿 Differential Topology(微分拓扑学)以及 Munkres 的一些介绍性文字 Elementary Differential Topology(初等微分拓扑学).

现在微分拓扑学最出色的工具,很可能要算 Morse 理论了,这是由 Smale 修改过,用来得到微分流形上的结构理论以及相关的圆球壳修模学观念(现在我们称之为手术). 本书最后一章,由 V. Poénaru 所写的 On the Geometry of Differentiable Manifolds(可微分流形上的几何理论),讨论到这个微分拓扑学的新工具,以及它们带来的一些详细结果. 我们只在这里提纲挈领地列举它们主要的观念.

令 M 表一流形,其边界为 ∂M,而 $f: S^{k-1}\times D^{n-k}\to\partial M$ 为一圆滑嵌入映象,这里 D^{s} 是表周界为 S^{k-1} 的 s 度圆板. 我们取这两个流形 M 及 $D^{k}\times D^{n-k}$ 的相

① 它的另外一个惊人的应用,可在 Hirzebruch 对 Riemann－Roch－Hirzebruch 定理的原始证明中找到. 参阅 Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry. (Berlin: Springer－Verlag, 1966)

离和，利用 f 把它们粘贴起来. 换句话说，我们用 f 把 $D^k\times D^{n-k}$ 贴上 M. 磨圆角落周围后，即得一个新流形 $\widetilde{M}$. 我们称 $D^k\times D^{n-k}$ 为一 k 度把，而 $\widetilde{M}$ 即为 M 上粘接一 k 度把所得到的新流形. 如果我们注意观察边界 ∂M，可以看到从 ∂M 转变到 $\partial\widetilde{M}$ 的过程中，我们从 ∂M 中剪掉了 $S^{k-1}\times D^{n-k}$，而补上 $D^k\times S^{n-k-1}$，从而得到 $\partial\widetilde{M}$. 这个步骤称为 k 维手术. 这种手术可以在一般闭流形上做，并不必限定在流形的边界上. Smale 和 Wallace 各自独立地证明了每一流形都有把解体. Smale 是根据他对美妙函数方面理论的讨论. 这个理论造成 Morse 理论的另一次发展. Morse 曾证得：流形上的圆滑函数，可以用只含孤立非退化临界点的函数逼近. Smale 更进一步证明了下一件事：假设 M_1 及 M_2 为两个余边界的闭流形，亦即存在一流形 M，以 M_1 及 $-M_2$ 为其周界；则有一 W 上的函数 f，只含孤立非退化临界点，都不在 $M_1\cup M_2$ 上，且若 α 为具指数 k 之函数 f 的临界点，则 $f(\alpha)=k$（$f=\frac{1}{2}$ 于 M_2 上，$f=n-\frac{1}{2}$ 于 M_1 上）. Smale 追随 Morse 的工作，对如何从 M_2 开始建造得 W 的方法，作了一番分析，而证明了，我们可以把这个步骤视为，当经由集合 $f(\alpha)\leqslant K-\varepsilon$ 到集合 $f(\alpha)\geqslant K+\varepsilon$ 时，粘贴上一个指数为 k 的把而得到. 利用这个 W 上的把解体，Smale 证明了享誉盛名的 h—余边界定理（On the Structure of Manifold（流形结构论））.

在上面描述的情况下，我们称为介于 M_1 与 M_2 间的余边界体. 若 W 可以收缩地变形映至 M_1 上以及 M_2 上，便称之为 h—余边界体，而称 M_1 与 M_2 为 h—余边界的. 并不难知微分同构的流形为 h—余边界的. Smale 利用 W 上已知的结构，和有关把柄截除术的讨论，证明了逆定理，即假设 W 是单连通的，维数不小于 6，则它本身与 $M_2\times I$[①] 为微分同构的，而 M_1 微分同构于 M_2. 从这个结果，他演绎到对维数不小于 6 的微分流形上，一般形式的庞加莱猜想，即一个具 n 度圆球壳同伦型的微分流形与 n 度圆球壳同胚（用一种特别的讨论，他把维数等于 5 的情况也包含进去）[②]. 应该注意的是这个定理的结论，有如它在组合流形上的形式（Stallings 及 Zeeman 得到的），是纯粹拓扑的. Conner 和 Newman 最近发表了一般形式的庞加莱猜想的另一不同形式，其中的假设与结论，都是纯粹拓扑的. h—余边界定理也有一个不同的形式，其中我们免去了单连通的条件. 所付出的代价是把收缩变形改为 J. H. C. Whitehead 所给的“组合性收

---

① I 表单位区间 $0\leqslant t\leqslant 1$.

② 这也是由 Wallace 所证明.