小学教师继续教育丛书

数学思想方法与小学数学教学

主编 夏俊生

河海大学出版社

·小学教师继续教育丛书·

数学思想方法与小学数学教学

主　编　夏俊生

副主编　刘思清

河海大学出版社

责任编辑　周　勤
特约编辑　陈吉平
封面设计　张世立

数学思想方法与小学数学教学

主编　夏俊生

出版发行:河海大学出版社
(南京市西康路 1 号　邮政编码:210098)
经　销:江苏省新华书店
印　刷:南京上新河印刷厂

开本 850mm×1168mm　1/32　印张 6　字数 150 千字
1998 年 12 月第 1 版　1998 年 12 月第 1 次印刷
印数　1－5000 册

ISBN 7－5630－1351－2/G·208

定价:8.00 元

《小学教师继续教育丛书》编委会

序

振兴民族的希望在教育，振兴教育的希望在教师，这已成为全民的共识。小学教育是基础性的公民素质教育，高质量的小学教育必须依靠高质量的小学教师队伍予以保证和支持，这也是无可辩驳的事实。教育要实现现代化，最重要、最急迫的任务是提高广大在职教师的思想修养和专业水平。

我们正处在科学技术发展速度日益加快、知识陈旧率周期进一步缩短的信息化时代。尽管在职教师已取得法定的资格，但仍须在知识和能力方面不断有所前进，不断有所更新；否则，将跟不上科学技术发展的步伐，也完不成时代赋予的神圣使命。

在现代社会中，教师在职进修，已从自由选择教育变成了义务教育。教师有义务接受国家举办的在职进修教育。我国的教师在职进修，正由补课性质的学历达标和专业合格证书教育，转向知识更新、教学研究和提高业务能力的继续教育。这一任务对象更多，要求更高，研究课题更为复杂。师资培训的课程、教材是最为基础也是最为关键的一项工作。为此，我们小教培训工委约请全国有关省、市的同行，经反复切磋研究，编撰了这一套《小学教师继续教育丛书》，以适应当前小学教师培训的迫切需要。我们期望这套丛书的问世能推动小学教师继续教育工作更加扎实、更加深入地发展，使在职小学教师的水平能更为迅速、更为有效地得到提高。同时，这套丛书在使用过程中也将得到修正和改进。

全国高师数学教育研究会
小教培训工作委员会
1998 年 5 月

前言

数学教育乃是文化素质的教育。通过数学教育培养数学能力，即运用数学解决实际问题和创造思维的能力。这种能力不仅表现在对数学知识的记忆上，而更突出地反映在数学思想方法的修养上。因此,数学教育就是数学思想方法的培养与教育。美国当代教育家布鲁纳有句名言:“一个坏的教师奉送真理给学生，一个好的教师则教人发现真理。”我国古人也说过:“授人以渔而不是鱼。”这些均强调了数学思想方法教学的重要性。

目前有关数学思想方法的各种著作已有不少，但针对小学数学教学，使数学思想方法与小学数学教学紧密联系起来的读本尚不多见。为此,我们撰写了本书,期望读者通过本书的学习能进一步提高自身的数学素养，进而在小学数学教学中渗透数学思想方法,提高教学质量。

本书由夏俊生任主编，刘思清任副主编，第一章由藏雷编写，第二章、第三章由曹一鸣编写，第四章由夏俊生编写，第五章由廖学艺、廖家瑞编写，第六章由常谦礼编写。全书由刘云章统稿审定。

限于我们的水平，书中定会有诸多不当之处，我们殷切希望得到广大读者和专家的批评指正。

编　者

1998 年 5 月

目　录

第一章　数学思想、数学方法与数学思想方法

本章讨论“什么是数学思想，什么是数学方法”，“数学思想方法与数学发展的关系”，“数学思想史上几次重大转折及其意义”等问题。目的是通过对上述问题的讨论，深化对数学思想方法的理解，深化对数学思想方法的素质教育意义的认识。

第一节　数学思想方法

所谓思想，是指客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的认识或结果。方法，在古希腊文里指是“道路”的意思，意为人们为了达到一定目的所采取的途径和方式。一般地，思想方法就是指人们观察、分析、研究问题的角度和逻辑方法，具体包括思想观念、思维方式、思维习惯等。那么，什么是数学思想方法？顾名思义，数学思想方法是人们研究数学问题的角度和思维方法。但是，这一提法似乎过于宽泛，未能揭示其本质。我们先来看一下数学家或学者是怎样看待这个问题的。

朱学志在《数学的历史、思想和方法》一书中指出：“数学思想是人们对数学研究对象统一的、本质的认识。它包括对数学本质的理解；对数学基本特性，数学对象，数学与其他科学，数学与客观世界的关系的认识，以及数学中所创立的新概念、新理论、新模型和新方法的认识。”

有的学者从观念角度出发来阐述这一问题，认为：所谓观念，即“思想意识”，是客观事物在人脑中留下的概括的形象；而数学观念，是指“人们用数学的思考方法去考虑问题、处理问题的自觉

意识或思维习惯”。曹才翰先生说:“数学思想和方法是数学概念、理论的相互联系和本质所在,是贯穿于数学的、具有一定统摄性和概括性的概念。”

还有的学者认为，数学思想是指从某些具体的数学方法过程中提升的那样一些观点，它在后继的认识活动中被反复运用和证实其正确性。

从上述论述中，我们不难概括出其共同的本质认识，即:数学思想是人们对数学科学的本质及规律的深刻认识。这种认识就是数学知识的精髓。

对数学思想含义的理解有两种。一种是狭义理解，就中小学数学知识体系而言,数学思想是指那些最常见、最基本、较浅显的规律性认识或结果,比如函数思想、化归思想等等。这些最常见、最基本的数学思想也是从某些具体的数学认识过程中提升出来的认识结果或观点，并在后继的认识活动中被反复运用和证实其正确性。如当我们具体求解方程 $2x+3=0$ 时,认识到解形如 $ax+b=0$ 这样的方程就是转化为 $x=A$ 这种形式，并且还能进一步认识到解 $ax^2+bx+c=0$ 这样的方程，实质上也是转化为 $x^2=A$ 再转化为 $x=B$ 这种形式。因而,确认这种认识(化归思想)是解方程的“法宝”。所以,在中小学数学教学中,人们普遍比较重视这种认识结果的应用教学，我们经常会在各种数学期刊上发现“浅谈××思想的教学”、“××思想的应用”等等这类文章就不足为怪了。另一种是广义理解,即数学思想除前一种所述内容外,还应包括关于数学概论、理论、方法以及形态的产生与发展规律的认识。数学思想的历史是数学基本概念、重要理论产生和发展的历史，也是哲学家和数学家的数学观发展的历史。从数的概念的形成和发展，到微积分的产生以及现代数学各分支的形成，即对数学发展中所创立的新概念、新理论、新模型和新方法的认识都可以纳入数学思想范畴。就中小学数学知识内容而言，数的演变与

形成、负数产生的背景、数轴概念的形成等等都体现数学研究和发展的思想。又如数学中的许多规定如 $a^0=1(a\neq0)$, $0!=1$ 等，探究规定的合理性、必要性、优越性，也就是探究者数学思想的发展过程。因此，数学思想既可以“泛指某些有重大意义的、内容比较丰富、体系相当完整的数学成果”，又包括对数学的起源与发展，数学的本质和特征，数学与现实世界的关系及地位作用的认识。

那么，数学思想与数学方法之间有什么不同和关系呢？一般来讲，数学方法是人们从事数学活动时的程序、途径，是实施数学思想的技术手段。我们可以作一个比喻：数学思想相当于建筑的一张蓝图，数学方法则相当于建筑施工的手段。数学思想是内隐的，而数学方法是外显的。数学思想比数学方法更深刻、更抽象地反映数学对象间的内在联系，是数学方法的进一步的概括和升华。若从狭义角度理解数学思想，往往把某一数学成果称之为数学思想方法。而当用它去解决某些具体数学问题时，又可具体称之为数学方法。比如，用“化归”去解方程 $\sqrt{x^2-9}=4$，就是化归方法。而当评价它在数学体系中的自身价值和意义时，又可称之为数学思想。比如，考察“化归”在整个方程体系中的价值和意义时，就会自然将其升华为化归思想。若从广义角度去理解，人们比较注重数学发展中的重大贡献，数学家的创见和发明，突出其文化功能、思想价值，以及它对社会、科学进步、发展的意义，因而更多地称之为数学思想。某些情形，人们为了将两重意思结合在一起表述，便统称为“数学思想方法”。

数学思想是人们对数学知识和数学方法的本质认识。这种本质认识具有以下特征：

1. 导向性

所谓数学思想的导向性，是指它是研究数学和解决数学问题的指导思想，是数学思维的策略。数学思想的导向性表现在它既是数学产生和发展的根源，又是建立数学体系的基础，还是解决具体

问题的“向导”。正如日本学者米山国藏所说:“数学的精神、思想是创造数学著作，发现新的东西，使数学得以不断地向前发展的根源。”比如,极限思想是微积分理论的基础,又是解决许多数学问题的重要方法。而在解决具体问题中，数学思想往往起作主导的作用。尤其是它对产生好“念头”、好“思路”、好“猜想”,提供了方向。当然,数学思想在指示解题的方向时,还为数学方法的具体实施留有应变的余地。例如,解一元二次方程问题,尽管化归思想指导思维活动定向于目标 $x=a$,但具体采用哪种化归方法(如配方法还是因式分解),还须具体问题具体分析。数学思想的导向性的重要价值被爱因斯坦的名言所证:“在一切方法的背后,如果没有一种生气勃勃的精神,它们到头来,不过是笨拙的工具。”

2. 统摄性

数学思想对于具体的数学知识和方法具有巨大的凝聚力，它是联系知识的纽带,具有举一纲而万目张的作用。数学思想的统摄性主要表现在两个方面。一是优化数学知识结构。虽然数学知识点数量的不同是影响学生数学能力的一个方面,但是,即使是具备同样数量知识点的学生,由于知识点之间联系结构的差异,也是造成学生数学能力发展不平衡的主要因素。正像金刚石和石墨都是由六个碳原子组成那样，由于碳原子的结构方式不同，所以前者坚硬，后者松软。用映射思想可以将纵横两方面的数学知识联结起来,起到化繁为简、化难为易、化不可能为可能的作用。比如:用对数(映射)方法易将原问题中的乘、除、乘方和开方分别化为较低层次的加、减、乘、除运算;用坐标法(映射)可将几何问题转化为代数中的数量关系。二是发展数学认知结构。数学思想在知识转化为能力过程中起到重要的中介作用。如果说能力是知识的结晶,那么思想往往起着结晶核的作用。学生在学习教材中的定义、定理、公式等外显知识时,若未能了解这些知识所蕴含的数学思想,则很难真正理解知识,深刻认识知识,因而数学知识虽然学了不少,但缺乏

数学思想的统领,知识没有活性,数学能力就不可能得到发展。另一方面，数学思想能够将分散的知识吸附起来，组成一个有机整体,并且能像滚雪球那样越滚越大。比如,学生在掌握了用降次、消元、有理化等方法解一般代数方程之后,对化归思想有了进一步的认识,因而就会把这种思想用于解其他超越方程中去。这就推动着学生数学认知结构的不断发展。

3. 概括性

人们的理性认识之所以高于感性认识，是因为理性认识能反映、揭示事物的普遍的必然的本质属性和联系。这是理性认识的一大特点。数学思想在这方面具有突出的表现,即数学思想具有较高的概括性。概括性程度的高低决定着数学思想有层次之分。概括化程度高,“抽象度”就大,对数学对象本质属性揭示得越深刻,对问题的理解也就愈深刻。例如,几何中研究各种各样的角,两直线相交所成的角,两异面直线所成的角,直线与平面所成的角,这些角的度量方法最终可由化归思想的概括性统一、归结为两相交直线的角来度量。数学思想的概括性还表现在它能反映数学对象之间的联系和内部规律上。例如,有关二次三项式、一元二次方程、一元二次不等式等问题，往往都可以归结为一元二次函数的图像与坐标轴交点间问题的探究，同时也反映了函数思想是对数学知识的高度概括。再如,数学中基本方法——配方法、换元法、构造法、参数法等,进一步上升概括为化归方法,再进一步上升,概括为映射思想。

4. 迁移性

高度的概括性导致数学思想具有广泛的迁移性。这种迁移性既表现在数学内部:数学思想是数学知识的精髓,它是数学知识迁移的基础和源泉，是沟通数学各部分、各分支间联系的桥梁和纽带,是构建数学理论的基础。例如,对几何中有关角的度量的概括性认识可以指导我们对二面角的研究，导致二面角的平面角概念

的建立。又如，由圆内接正多边形边数倍增而趋近于圆面积的极限思想可以进一步发展为分割求和的微积分思想。希尔伯特的巨著《几何基础》是迄今为止用公理化方法建立数学体系的最典型的著作。另一方面，这种迁移性也表现在数学外部：能沟通数学与其他科学与社会的联系，产生更加广泛的迁移。如公理化思想已超越数学理论范围，渗透到其他学科领域。17 世纪的唯心主义者斯宾诺莎仿效《几何原本》的公理化思想，把人的思想、情感和欲望等当作几何学中的点、线、面来研究，写出了名著《伦理学》；20 世纪 40 年代，波兰数学家巴拿赫完成了理论力学的公理化；物理学家还将相对论表述为公理化形式。

第二节 数学思想的发展

数学发展史表明，数学是在许许多多民族和地区世世代代的生产斗争和科学实践中逐渐形成、发展而成的。数学的发展，既有比较缓慢的渐变过程，也有重大的突变过程。从远古到现在，数学发展大致经历了四个重要阶段，而这四个阶段恰恰是数学思想方法的四次重大转折。因此，深入开展数学思想方法的研究，探讨其产生与发展的规律，对于数学研究及数学教学研究都有十分重要的意义。

一、从算术到代数

从算术发展到代数，是人们对数及其运算在认识上的一次突破，也是数学在思想方法上产生的一次重大转折。

算术，古人称为计数的方法，后来引申为数(sū，名词)，并且还有“数学”的意思。我国春秋时用“算”(suàn)(即计数用的筹码)来计数，即算筹，于是就有了成语“运筹帷幄”。世界各民族，在历史上都有自己独特的记数方法。比如：英语中含有计算之意的tally，来源于拉丁语刻划(talea)；拉丁语中的calculus(计算)本来就是小石子。古代算术的主要内容是自然数、分数和小数的性质与四则运算。算术的产生，表明人类对现实世界的数量关系的认识已提高到新的水平。特别是记数符号的出现，使人们可以用它以抽象的形式进行运算。比如，作加法只是将被计算的对像在想象中“放在一起”，而对被计算的对象来说却什么也没有发生。算术作为最基本的数学工具之一，在生产和生活实践中有着广泛的用途，解决了诸如行程问题、工程问题、盈亏问题和流水问题等应用题。

人们在社会实践中又发现，算术在解决问题中有很大的局限性。这是因为，算术的运算方法只限于对具体的、已知的数进行运

算,不允许有抽象的未知数参加。即用算术法解题是先列出算式,然后通过对已知数进行四则运算直接求出算式的结果。对于那些具有简单数学关系的问题,通常容易列出相应的算式,但对于那些具有复杂数量关系的应用问题,要通过已知量来列出相应的算式就不是一件容易的事了,往往需要很高的技能技巧。由于算术自身运算上的这种局限性,在很大程度上限制了它的应用和普及。但是,人们在实践中接触到的问题变得更为复杂,解决问题的方法、技巧与现实问题之间的矛盾显得日益尖锐起来。正是数学自身、数学与社会实践的矛盾运动,导致了数学思想方法上的重大突破,由此数学史上产生了从算术进入代数的新时期。

早期的代数学,出现在不同的国家和地区,虽然在时间上有先有后,但却是独立地产生和发展的,并在发展中出现一些相当于"代数学"的专门名称,如中国的"天元术"、日本的"点窜术"、阿拉伯和欧洲的"求根术"、意大利的"未知数的规则"等。用代数方法解决问题的产生过程及其发展过程,就是代数学的形成过程。

什么是代数方法泥?它与算术方法的区别在哪里呢?我们知道,在算术法中,只允许具体的、已知的数字参加运算,算出的结果就是所求的未知数的值。代数是算术的发展。代数之所以是算术的发展,是因为其思想方法在代数学中引入了未知数,并使未知数与已知数构成一个有机统一体。在这个统一体中,未知数不再是算术法中只能担当运算结果符号的等价物,而是与已知数有着同等"权利"、平等地位的运算对象;在这个统一体中,未知数不再是算术法中消极、被动地静等在等式一边的"旁观者",而是和已知数一样,可以接受和执行各种运算指令,并可以依照某种法则从等式一边移动到另一边。可见,代数法的基本特征就是对未知数进行运算。这种运算实质上就是未知数和已知数进行重组的过程,也是未知数向已知数转化的过程。这就是所谓的"解方程"。

解方程是代数学的基本特征。"代数"一词,原意就是"方程的

科学"。这个词的拉丁文是algebra。用"代数"作为学科的名称始于14世纪。我国于1859年首先由李善兰在翻译《Elements of Algebra》时提出:"该学科的特点是以字代数:或不定数(指变数),或未知的已定数。……恒用之已知数或因太繁,亦以字代",从而把该学科定名为"代数学",沿用至今。

方程思想的产生在数学发展中起了重大的推动作用。它的出现不仅使许多用算术法难以解决的问题能够获得解决,而且数学中的许多重大发现及分支学科的建立都与它密切相关。例如:对二次方程的求解,导致虚数的发现;对五次和五次以上方程的求解,导致群论的诞生;对一次方程组的研究,导致线性代数的建立;应用代数法解决几何问题,导致解析几何的形成。

二、从常量数学到变量数学

约从公元前6世纪开始到17世纪初期,是数学发展的初等数学时期,又称常量或有限数学时期。这一时期数学研究的主要内容是:算术,初等代数,初等几何和三角。我们今天中学里所学的数学内容,除解析几何等外,都是这个时期形成的。例如有古希腊的欧几里得的《几何原本》,我国唐朝中期的以《九章算术》为代表的《算经十书》。这个时期,除虚数以外,初等数学基本上完备了。从经验知识到理论知识,从感性认识到理性认识以及由零散材料到系统知识,是这个时期数学的主要特征。

由于这段时期人们的认识水平还不高,只能了解事物之间的固定的关系,还不能从运动变化和发展中把握事物,即数学研究对象都是常量和固定的图形,因此这部分内容也称为常量数学。

从17世纪到19世纪末的将近3个世纪的时间里,西方资产阶级夺取政权,资本主义工场手工业向机器大生产转化。这时,社会生产和自然科学研究发展过程中出现了一系列必须从运动变化和发展观点来研究事物的新问题。概括起来,大致有五种:第一,描