

“十一五”国家重点图书



俄罗斯数学
教材选译

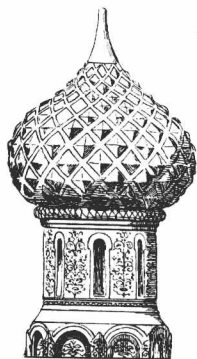
数学分析原理

(第一卷)(第9版)

□ Г. М. 菲赫金哥尔茨 著
□ 吴亲仁 陆秀丽 丁寿田 译



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS



俄罗斯数学
教材选译

013050203

“十一五”国家重点图书

017
170-2
V1

● 数学天元基金资助项目

数学分析原理

(第一卷)(第9版)

SHUXUE FENXI YUANLI

□ Г.М.菲赫金哥尔茨 著
□ 吴亲仁 陆秀丽 丁寿田 译



北航

C1657016

017
170-2
V1



高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

202020810

Translation from the Russian language edition:

Basis of the mathematical analysis by Grigoriy Mikhailovich Fichtenholz

Copyright © 2012 Publisher Lan All Rights Reserved

图书在版编目(CIP)数据

数学分析原理：第9版. 第1卷 / (俄罗斯) 菲赫金
哥尔茨著；吴亲仁，陆秀丽，丁寿田译. -- 2版. -- 北
京：高等教育出版社，2013.3

(俄罗斯数学教材选译)

ISBN 978-7-04-034526-1

I. ①数… II. ①菲… ②吴… ③陆… ④丁… III.
①数学分析 IV. ①O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 277437 号

策划编辑 赵天夫
责任校对 殷 然

责任编辑 李 鹏
责任印制 韩 刚

封面设计 赵 阳

版式设计 余 杨

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京鑫丰华彩印有限公司
开 本 787mm × 1092mm 1/16
印 张 24
字 数 357 千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598

网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 1959 年 6 月第 1 版
2013 年 3 月第 2 版
印 次 2013 年 3 月第 1 次印刷
定 价 59.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 34526-00

《俄罗斯数学教材选译》序

从 20 世纪 50 年代初起,在当时全面学习苏联的大背景下,国内的高等学校大量采用了翻译过来的苏联数学教材.这些教材体系严密,论证严谨,有效地帮助了青年学子打好扎实的数学基础,培养了一大批优秀的数学人才.到了 60 年代,国内开始编纂出版的大学数学教材逐步代替了原先采用的苏联教材,但还在很大程度上保留着苏联教材的影响,同时,一些苏联教材仍被广大教师和学生作为主要参考书或课外读物继续发挥着作用.客观地说,从解放初一直到“文化大革命”前夕,苏联数学教材在培养我国高级专门人才中发挥了重要的作用,起了不可忽略的影响,是功不可没的.

改革开放以来,通过接触并引进在体系及风格上各有特色的欧美数学教材,大家眼界为之一新,并得到了很大的启发和教益.但在很长一段时间中,尽管苏联的数学教学也在进行积极的探索与改革,引进却基本中断,更没有及时地进行跟踪,能看懂俄文数学教材原著的人也越来越少,事实上已造成了很大的隔膜,不能不说是一个很大的缺憾.

事情终于出现了一个转折的契机.今年初,在由中国数学会、中国工业与应用数学学会及国家自然科学基金委员会数学天元基金联合组织的迎春茶话会上,有数学家提出,莫斯科大学为庆祝成立 250 周年计划推出一批优秀教材,建议将其中的一些数学教材组织翻译出版.这一建议在会上得到广泛支持,并得到高等教育出版社的高度重视.会后高等教育出版社和数学天元基金一起邀请熟悉俄罗斯数学教材情况的专家座谈讨论,大家一致认为:在当前着力引进俄罗斯的数学教材,有助于扩大视野,开拓思路,对提高数学教学质量、促进数学教材改革均十分必要.《俄罗斯数学教材选译》系列正是在这样的情况下,经数学天元基金资助,由高等教育出版社组织出版的.

经过认真选题并精心翻译校订,本系列中所列入的教材,以莫斯科大学的教材为主,也包括俄罗斯其他一些著名大学的教材.有大学基础课程的教材,也有适合大学高年级学生及研究生使用的教学用书.有些教材虽曾翻译出版,但经多次修订重版,面目已有较大变化,至今仍广泛采用、深受欢迎,反射出俄罗斯在出版经典教材方面所作的不懈努力,对我们也是一个有益的借鉴.这一教材系列的出版,将中俄数学教学之间中断多年的链条重新连接起来,对推动我国数学课程设置和教学内容的改革,对提高数学素养、培养更多优秀的数学人才,可望发挥积极的作用,并起着深远的影响,无疑值得庆贺,特为之序.

李大潜

2005 年 10 月

序 言

《数学分析原理》是作为大学数学系一二年级学生的分析教科书而编写的;因此也就把书分成两卷. 在编写本书时, 广泛地采用了我的三卷本《微积分学教程》的材料; 但为了要使本书接近于正式的数学分析教学大纲与讲课的实际可能性, 我已把这三卷中包含的材料加以精简与修改.

我给自己定下的任务是这样的:

1. 我认为在数学分析原理中主要的一个任务是要做到叙述上的系统性与在可能范围内的严格性. 为了使给予学生的知识有一定的系统, 我认为对于教科书来说, 材料的叙述有必要按照逻辑的顺序.

虽然如此, 但教本这样的编排仍然使讲课者在个别的地方 —— 从教学法着眼 —— 有可能放弃严格的系统性 (也许, 甚至使他更容易获得这种可能). 例如, 我自己在讲课中通常把那种对于初学者困难的东西, 如实数理论、收敛性原理或者连续函数的性质都稍稍延后.

2. 同时, 数学分析教程对于学生来说, 不应该只是一连串的“定义”与“定理”, 而应该是行动的指南. 必须教会学生把这些定理应用到实际中去, 帮助他们掌握分析的计算工具. 虽然这个任务大部分是落到分析的习题课上, 可是随着理论材料的叙述, 我也按照需要采用了一些例题; 例题为数虽不多, 但却是为了培养学生能自觉地做习题而选择的.

3. 大家知道, 数学分析无论在数学本身方面或在相近的知识领域方面都有着何等奇妙的与多种多样的应用; 学生以后将会时常碰到它们. 可是关于数学分析与其他数学分支, 以及与实际需要相联系的这种思想, 在研究分析原理时就应该为学生所通晓. 正因为如此, 所以一有可能, 我就引进了分析在几何上、在力学上以及在物理上与工程上的应用的例题.

4. 关于把分析计算一直算到求出数字的结果的问题, 在原则上与实用上有着同样的重要性. 因为只有在最简单的情况下, 分析上的问题才有“准确的”解或“有限形式的”解, 所以使学生熟悉近似方法的运用与学会作出近似公式都有其重要性. 在本书中也注意到了这一点.

5. 关于叙述本身方面, 我想作少许说明. 首先要提到的是极限概念, 它在分析的基本概念中占有主要的地位, 并且以各种形式出现而贯穿全部教程. 这种情况向我们提出了一项任务, 那就是要建立各种形式的极限的统一概念. 这不仅在原则上是重要的, 而且在实际上也是必需的, 为的是避免时常要重新建立极限的理论. 要达到这个目的, 有两条途径: 或者一开始就给出“有序变量”的最一般的极限定义 (例如, 照沙都诺夫斯基与摩尔-史密斯那样去做), 或者把各种极限归结为最简单的情形——在编号数列上变化着的变量的极限. 第一种观点对初学者是不易理解的, 所以我采用了第二种观点: 每一种新形式的极限定义首先都用序列的极限给出, 然后才用“ ϵ - δ 语言”给出.

6. 还要指出叙述上的一个细节: 在第二卷中, 讲到曲线积分与曲面积分时, 我提出了“第一型”的曲线积分与曲面积分 (恰好与沿无定向的区域的普通积分及二重积分相似) 和“第二型”的这些积分 (其中相似之处已经局部地失去了) 之间的区别. 根据多次的经验, 我深信这样的区分有助于更好地理解, 并且也便于应用.

7. 在对教学大纲所作的为数不多的补充中, 我把椭圆积分 (这是在实际上常遇到的) 简要介绍到书内, 并且有些时候提出了一些恰好要引用椭圆积分的问题. 使得那种由于解答一些简单问题养成的有害错觉——仿佛认为分析计算的一些结果一定是“初等式子”, 从此消灭!

8. 在本书中各个地方, 读者可找到带有数学史性质的说明. 并且第一卷是以“数学分析基本观念发展简史”结尾的, 而在第二卷末载出了“数学分析进一步发展概况”. 当然, 这一切绝不是用来代替学生以后在一般的“数学史”教程中所要熟悉的数学分析的历史. 如果在上面提到的前一概述中涉及概念本身的来源, 那么带有历史意义的说明就在于使读者至少了解分析学历史中最重要的事件在年代上一般的次序.

我现在要把和刚才所说的密切有关的事直接告诉读者——学生. 那就是, 书中叙述的次序是按照现代对于数学的严格性的要求安排的, 这种要求是在长时间内形成起来的, 因此, 叙述的次序自然和数学分析在历史上的发展所经过的道路有所不同. 如马克思所说: “……正如一切科学的历史进程一样, 在摸到它们的真正出发点之前, 总先走过许多弯路. 科学不同于其他建筑师, 它不只画出空中楼阁, 而且在它打下地基之前, 先造出房屋的各层.”^①

读者一开始研究分析学时就会遇到与此类似的情况: 本书第一章讲述“实数”, 第三章讲述“极限论”, 从第五章起才开始微分学与积分学的系统的叙述.

^①马克思. 马克思政治经济学批判. 北京: 人民出版社, 1955: 30.

在历史上的次序恰恰是与此相反的: 微分学与积分学起源于 17 世纪, 而在 18 世纪发现了很多重要的应用, 有了进一步的发展; 在 19 世纪初, 极限论才成为数学分析的基础, 至于用来论证最精密的极限论原理的实数理论, 它的明晰概念一直到 19 世纪后半期才建立起来.

这部书总结了我在列宁格勒大学教数学分析的多年经验. 希望它对苏联青年将会是有用的.

Г. М. 菲赫金哥尔茨

目 录

《俄罗斯数学教材选译》序

序言

第一章 实数	1
§1. 实数集合及其有序化	1
1. 前言	1
2. 无理数定义	2
3. 实数集合的有序化	4
4. 实数的无尽十进小数的表示法	5
5. 实数集合的连续性	7
6. 数集合的界	8
§2. 实数的四则运算	10
7. 实数的和的定义及其性质	10
8. 对称数·绝对值	11
9. 实数的积的定义及其性质	13
§3. 实数的其他性质及其应用	14
10. 根的存在性·具有有理指数的乘幂	14
11. 具有任何实指数的乘幂	16
12. 对数	17
13. 线段的测量	18

第二章 一元函数	20
§1. 函数概念	20
14. 变量	20
15. 变量的变域	21
16. 变量间的函数关系·例题	21
17. 函数概念的定义	22
18. 函数的解析表示法	24
19. 函数的图形	25
20. 以自然数为变元的函数	26
21. 历史的附注	28
§2. 几类最重要的函数	29
22. 初等函数	29
23. 反函数的概念	32
24. 反三角函数	33
25. 函数的叠置·结束语	36
第三章 极限论	38
§1. 函数的极限	38
26. 历史的说明	38
27. 数列	38
28. 序列的极限定义	39
29. 无穷小量	41
30. 例	42
31. 无穷大量	44
32. 函数极限的定义	45
33. 函数极限的另一定义	47
34. 例	48
35. 单侧极限	53
§2. 关于极限的定理	54
36. 具有有限的极限的自然数变元的函数的性质	54
37. 推广到任意变量的函数情形	56
38. 在等式与不等式中取极限	57
39. 关于无穷小量的引理	58
40. 变量的算术运算	59
41. 未定式	61

42. 推广到任意变量的函数情形	63
43. 例	64
§3. 单调函数	67
44. 自然数变元的单调函数的极限	67
45. 例	69
46. 关于区间套的引理	70
47. 在一般情形下单调函数的极限	71
§4. 数 e	73
48. 数 e 看作序列的极限	73
49. 数 e 的近似算法	74
50. 数 e 的基本公式 · 自然对数	76
§5. 收敛原理	78
51. 部分序列	78
52. 以自然数为变元的函数存在有限极限的条件	80
53. 任意变元的函数存在有限极限的条件	81
§6. 无穷小量与无穷大量的分类	83
54. 无穷小量的比较	83
55. 无穷小量的尺度	84
56. 等价的无穷小量	84
57. 无穷小量的主部的分离	86
58. 应用问题	86
59. 无穷大量的分类	88
第四章 一元连续函数	89
§1. 函数的连续性 (与间断点)	89
60. 函数在一点处的连续性的定义	89
61. 单调函数的连续性条件	91
62. 连续函数的算术运算	91
63. 初等函数的连续性	92
64. 连续函数的叠置	94
65. 几个极限的计算	94
66. 幂指数表达式	96
67. 间断点的分类 · 例子	97
§2. 连续函数的性质	98
68. 关于函数取零值的定理	98
69. 应用于解方程	100

70. 关于中间值的定理	101
71. 反函数的存在性	102
72. 关于函数的有界性的定理	103
73. 函数的最大值与最小值	104
74. 一致连续性的概念	105
75. 关于一致连续性的定理	106
第五章 一元函数的微分法	108
§1. 导数及其计算	108
76. 动点速度的计算问题	108
77. 作曲线的切线的问题	109
78. 导数的定义	111
79. 计算导数的例	114
80. 反函数的导数	116
81. 导数公式汇集	117
82. 函数增量的公式	118
83. 计算导数的几个最简单法则	119
84. 复合函数的导数	121
85. 例	122
86. 单侧导数	124
87. 无穷导数	124
88. 特殊情况例子	125
§2. 微分	126
89. 微分的定义	126
90. 可微性与导数存在之间的关系	127
91. 微分的基本公式及法则	129
92. 微分形式的不变性	130
93. 微分作为近似公式的来源	131
94. 微分在估计误差中的应用	132
§3. 高阶导数及高阶微分	133
95. 高阶导数的定义	133
96. 任意阶导数的普遍公式	134
97. 莱布尼茨公式	136
98. 高阶微分	138
99. 高阶微分形式不变性的破坏	139

第六章 微分学的基本定理	140
§1. 中值定理	140
100. 费马定理	140
101. 罗尔定理	141
102. 有限增量定理	142
103. 导数的极限	144
104. 有限增量定理的推广	144
§2. 泰勒公式	145
105. 多项式的泰勒公式	145
106. 任意函数的展开式	147
107. 余项的其他形式	150
108. 已得的公式在初等函数上的应用	152
109. 近似公式·例	153
第七章 应用导数来研究函数	157
§1. 函数的变化过程的研究	157
110. 函数为常数的条件	157
111. 函数为单调的条件	158
112. 极大及极小·必要条件	159
113. 第一法则	160
114. 第二法则	162
115. 函数的作图	163
116. 例	164
117. 高阶导数的应用	166
§2. 函数的最大值及最小值	167
118. 最大值及最小值的求法	167
119. 问题	168
§3. 未定式的定值法	169
120. $\frac{0}{0}$ 型未定式	169
121. $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式	172
122. 其他类型的未定式	173

第八章 多元函数	176
§1. 基本概念	176
123. 变量之间的函数关系·例	176
124. 二元函数及其定义区域	177
125. m 维算术空间	179
126. m 维空间中的区域举例	181
127. 开区域及闭区域的一般定义	183
128. m 元函数	184
129. 多元函数的极限	186
130. 例	188
131. 累次极限	189
§2. 连续函数	191
132. 多元函数的连续性及间断	191
133. 连续函数的运算	193
134. 关于函数取零值的定理	194
135. 波尔查诺-魏尔斯特拉斯引理	195
136. 关于函数有界性的定理	196
137. 一致连续性	196
第九章 多元函数的微分学	199
§1. 多元函数的导数与微分	199
138. 偏导数	199
139. 函数的全增量	200
140. 复合函数的导数	203
141. 例	204
142. 全微分	205
143. 一阶微分形式的不变性	207
144. 全微分在近似计算中的应用	209
145. 齐次函数	210
§2. 高阶导数与高阶微分	212
146. 高阶导数	212
147. 关于混合导数的定理	213
148. 高阶微分	216
149. 复合函数的微分	218
150. 泰勒公式	219

§3. 极值、最大值与最小值	220
151. 多元函数的极值·必要条件	220
152. 静止点的研究 (二元函数的情况)	222
153. 函数的最大值与最小值·例子	225
154. 问题	227

第十章 原函数 (不定积分) 230

§1. 不定积分及其最简单的算法	230
155. 原函数概念 (及不定积分概念)	230
156. 积分与求面积问题	233
157. 基本积分表	234
158. 最简单的积分法则	235
159. 例	237
160. 换元积分法	238
161. 例	240
162. 分部积分法	242
163. 例	242
§2. 有理式的积分	244
164. 有限形式积分法问题的提出	244
165. 简单分式及其积分	245
166. 真分式的积分	246
167. 奥斯特罗格拉茨基的积分有理部分分出法	249
§3. 某些根式的积分法	251
168. $R\left(x, \sqrt[m]{\frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}}\right) dx$ 型根式的积分法	251
169. 二项式微分的积分法	252
170. $R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$ 型根式的积分法·欧拉替换法	254
§4. 含有三角函数及指数函数的式子的积分法	258
171. 微分式 $R(\sin x, \cos x)dx$ 的积分法	258
172. 其他情形概述	260
§5. 椭圆积分	261
173. 定义	261
174. 化为典式	262

第十一章 定积分	264
§1. 定积分定义及存在条件	264
175. 解决面积问题的另一途径	264
176. 定义	265
177. 达布和	267
178. 积分存在条件	269
179. 可积函数类别	270
§2. 定积分性质	272
180. 依有向区间的积分	272
181. 可用等式表出的性质	273
182. 可用不等式表出的性质	274
183. 定积分作为上限的函数	277
§3. 定积分的计算及变换	279
184. 用积分和的计算	279
185. 积分学基本公式	281
186. 定积分中变量替换公式	282
187. 定积分的分部积分法	283
188. 沃利斯公式	284
§4. 积分的近似计算	285
189. 梯形公式	285
190. 抛物线公式	287
191. 近似公式的余项	289
192. 例	291
第十二章 积分学的几何应用及力学应用	293
§1. 面积及体积	293
193. 面积概念的定义·可求积区域	293
194. 面积的可加性	294
195. 面积作为极限	295
196. 以积分表出面积	296
197. 体积概念的定义及其性质	299
198. 以积分表出体积	301
§2. 弧长	305
199. 弧长概念的定义	305
200. 引理	307
201. 以积分表出弧长	308

202. 变弧及其微分	311
203. 空间曲线的弧长	313
§3. 力学及物理上的数量的计算	314
204. 定积分应用程式	314
205. 旋转面面积	316
206. 曲线的静矩及质心的求法	318
207. 平面图形的静矩及质心的求法	320
208. 力功	321
第十三章 微分学的一些几何应用	323
§1. 切线及切面	323
209. 平面曲线的解析表示法	323
210. 平面曲线的切线	324
211. 切线的正方向	328
212. 空间曲线	329
213. 曲面的切面	331
§2. 平面曲线的曲率	332
214. 凹向·拐点	332
215. 曲率概念	334
216. 曲率圆及曲率半径	336
第十四章 数学分析基本观念发展简史	339
§1. 微积分前史	339
217. 17 世纪与无穷小分析	339
218. 不可分素方法	339
219. 不可分素学说的进一步发展	341
220. 求最大及最小 (极大极小)·切线作法	343
221. 借助运动学想法来作切线	345
222. 切线作法问题与求积问题的互逆性	345
223. 上述的总结	346
§2. 依萨克·牛顿 (Isaac Newton, 1642—1727)	347
224. 流数计算法	347
225. 流数计算法的逆算法·求积	349
226. 牛顿的“原理”及极限理论的萌芽	351
227. 牛顿的奠基问题	351