高等教育“十二五”规划教材

微积分（上册）

Calculus

沈仙华 蔡剑 主编

科学出版社

高等教育“十二五”规划教材

微积分

（上册）

沈仙华　蔡　剑　主编

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书是编者总结多年本科数学教学经验，探索民办高等院校、独立学院本科数学教学发展动向，分析同类教材发展趋势，并结合“微积分课程教学基本要求”编写而成的. 本书遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了微积分学课程教学时数减少的趋势，着重突出微积分学的基本思想和基本方法. 为了更好地与中学数学教学相衔接，适当加入了一些中学数学的基础内容.

《微积分》分上、下两册，本书为上册. 上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分和定积分等内容. 书中例题、习题较多，除每节配有习题外，在每章最后都配有适量的总习题，分为 A、B 两类，其中 A 类为基本题，B 类是提高题. 书末附有部分习题答案与提示.

本书可作为民办高等院校、独立学院文科类专业的教材，也可供其他高等院校文科类专业的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

微积分(上册)/沈仙华，蔡剑主编. —北京：科学出版社，2012
(高等教育“十二五”规划教材)
ISBN 978-7-03-035568-3

Ⅰ. ①微… Ⅱ. ①沈…②蔡… Ⅲ. ①微积分-高等学校-教材 Ⅳ. ①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 219323 号

责任编辑：张振华 / 责任校对：刘玉靖
责任印制：吕春珉 / 封面设计：科地亚盟

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

百 善 印 刷 厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2012 年 9 月第 一 版 开本：787×1092 1/16
2012 年 9 月第一次印刷 印张：13
字数：293 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈百善〉）
销售部电话 010-62134988 编辑部电话 010-62135235（VP04）

前　言

当前，民办高校、独立学院大多定位于培养创新应用型本科人才，但此类院校往往照搬公立大学成熟的微积分学教材，导致教学效果不佳. 因此通过基础课教学改革，加强学生实践能力与创新能力的培养，逐步提升办学质量，逐步形成民办高校、独立学院的办学特色已成为此类院校的当务之急. 正是在这种形势下，编者在总结多年本科数学教学经验、探索此类院校本科数学教学发展动向、分析同类教材发展趋势的基础上，编写了这本适合民办高校、独立学院文科类各专业本科生使用的微积分学教材.

本书依据教育部制定的"微积分学课程教学基本要求"编写而成，同时，遵循重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用的原则，并充分考虑了微积分学课程教学时数减少的趋势，体现了以下特色：

首先，突出微积分学的基本思想和基本方法. 本书着眼于帮助学生掌握基本概念，了解相关内容的内在联系，在教学理念上不过分强调严密论证. 书中有些定理没有给出严格证明，只要求会应用定理.

其次，加强基本能力的培养. 本书例题、习题较多，除每节配有习题外，在每章最后都配有适量的总习题，分为 A、B 两类，其中 A 类为基本题，B 类为提高题，书末附有部分习题答案与提示，以帮助读者检测学习效果和巩固相关知识.

《微积分》分上、下两册，本书为上册. 上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数应用、不定积分和定积分等内容. 下册包括向量代数与空间解析几何、多元函数微分法及其应用、重积分、无穷级数和微分方程. 上册由沈仙华、蔡剑编写，由沈仙华统稿. 下册由陆伟民、郁大刚编写，由陆伟民统稿.

南京航空航天大学张兴泰教授审阅了本书，提出了许多宝贵意见和建议，编者在编写本书时参阅了不少现有文献，出版社编辑也做了不少具体工作，谨在此表示衷心感谢.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中的疏漏之处在所难免，恳请广大读者批评指正.

编　者

2012 年 5 月

目　　录

第一章　函数与极限

初等数学研究的对象是常量，而高等数学研究的对象是变量. 变量之间的依赖关系称为函数. 极限概念是微积分的基本概念，极限是研究函数微分与积分的重要工具. 本章主要介绍函数、极限和函数的连续性等基本内容.

第一节　函　　数

一、预备知识

1. *数学归纳法*

适用范围：只适用于证明与正整数 n 有关的命题.

证明步骤：

(1) 证明 n 取第一个可取值 n_0（例如 $n_0=1$ 或 2 等）时，命题正确；

(2) 假设当 $n=k$（$k\in\mathbf{N}^+$ 且 $k\geqslant n_0$）时结论正确，证明当 $n=k+1$ 时结论也正确.

由这两个步骤，就可以断定命题对于从 n_0 开始的所有正整数 n 都正确.

注意：*第一步是递推的基础，第二步是递推的根据，两步缺一不可.*

这种方法可用于：证明代数和或三角恒等式；证明不等式；证明整除性；证明几何命题等.

数学归纳法的思想类似于多米诺骨牌玩法：第一，要求第一张骨牌被推倒；第二，假如某一张骨牌倒下，则其后一张骨牌必须跟着倒下.

例 1　用数学归纳法证明：$1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

证　(1) 当 $n=1$ 时，等式左边 $=1^2=1$，右边 $=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$，等式成立.

(2) 假设当 $n=k$ 时，等式成立，即

$$1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1),$$

那么当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}\text{左边}&=1^2+2^2+3^2+\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2\\&=\frac{1}{6}(k+1)[k(2k+1)+6(k+1)]=\frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)=\frac{1}{6}(k+1)[(k+1)+1][(2(k+1)+1]=\text{右边}.$$

故当 $n=k+1$ 时等式也成立.

综上可知,等式对任何 $n\in\mathbf{N}^+$ 都成立.

证毕.

2. 一些常用的三角函数公式

(1) 同角三角函数间的关系.

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;\qquad \tan^2\alpha+1=\sec^2\alpha;$$

$$\cot^2\alpha+1=\csc^2\alpha;\qquad \csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha};$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha};\qquad \cot\alpha=\frac{1}{\tan\alpha};$$

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};\qquad \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

(2) 三角函数的**积化和差公式**.

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)];$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)];$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

当 $\alpha=\beta$ 时,即为**倍角公式**.

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1;$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

(3) 三角函数的**和差化积公式**.

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

(4) 三角函数的**万能公式**.

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}};\qquad \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}};\qquad \tan\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}.$$

3. 二项式定理

我们知道:

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 = C_2^0a^2+C_2^1ab+C_2^2b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = C_3^0a^3+C_3^1a^2b+C_3^2ab^2+C_3^3b^3;$$

$$(a+b)^4 = a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = C_4^0a^4+C_4^1a^3b+C_4^2a^2b^2+C_4^3ab^3+C_4^4b^4;$$

$$\cdots$$

由数学归纳法可以得到:

$$(a+b)^n = C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+C_n^2a^{n-2}b^2+\cdots+C_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+C_n^nb^n,\quad n\in\mathbf{N}^+.$$

这个公式所表示的定理叫做**二项式定理**,右边的多项式叫做$(a+b)^n$ 的**二项展开式**(共 $n+1$ 项).其中的系数 C_n^r 叫做**二项式系数**,$C_n^ra^{n-r}b^r$ 叫做二项展开式的**通项**,用 T_{r+1} 表示,通项是展开式的第 $r+1$ 项.即 $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$.

二项展开式的性质:

(1) 展开式共有 $n+1$ 项;

(2) a 的指数幂递减,b 的指数幂递增,两者之和为 n;

(3) 与展开式首、末两项等距离的两项的系数相等;

(4) 展开式中的第 $r+1$ 项 $T_{r+1}=C_n^ra^{n-r}b^r$.

4. 复数

定义 1 对任意两实数 x,y,称 $z=x+\mathrm{i}y$ 为**复数**,其中 $\mathrm{i}=\sqrt{-1}$是虚单位,x 叫做复数 z 的**实部**,y 叫做复数 z 的**虚部**.称 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$ 为 z 的**共轭复数**.

复数的四则运算:设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$,$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,

(1) $z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$;

(2) $z_1\cdot z_2=(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2+\mathrm{i}y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1+x_1y_2)$;

(3) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1+\mathrm{i}y_1}{x_2+\mathrm{i}y_2}=\dfrac{(x_1+\mathrm{i}y_1)\cdot(x_2-\mathrm{i}y_2)}{(x_2+\mathrm{i}y_2)\cdot(x_2-\mathrm{i}y_2)}=\dfrac{(x_1x_2+y_1y_2)+\mathrm{i}(x_2y_1-x_1y_2)}{x_2^2+y_2^2}\ (z_2\neq0)$.

复数的几何表示:

(1) **三角表示法**.

令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$则 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$.

(2) **指数表示法**.

由欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$,则 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

5. 常用逻辑符号

$\forall$——任意；$\exists$——存在.

二、区间和邻域

1. 区间

定义 2　设实数 a 和 b，且 $a<b$，则称数集 $\{x|a<x<b\}$ 为**开区间**，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

类似地，$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为**闭区间**. 而称数集

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$$

和

$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$$

为**半开半闭区间**.

以上区间都称为**有限区间**，**区间长度**为 $b-a$.

除了有限区间外，还有**无限区间**，无限区间有：

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\};\quad [a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\};$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\};\quad (-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}.$$

全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

2. 邻域

定义 3　设 δ 是任一正实数，则开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 称为**点 a 的 δ 邻域**，记为

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}.$$

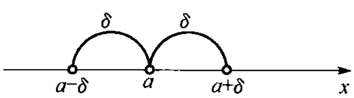

图 1-1

数集

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为**点 a 的去心 δ 邻域**，见图 1-1，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}.$$

三、函数

定义 4　设 D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集，则从 D 到 $\mathbf{R}$ 的对应关系 f 称为定义在 D 上的函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为函数 f 的**定义域**，记为 D_f.

集合 $R_f=\{y|y=f(x),x\in D\}$ 称为函数 f 的**值域**，R_f 也记成 $f(D)$.

注意：函数的定义域与对应法则称为函数的两个要素. 两个函数相等的充分必要条件是它们的定义域和对应法则均相同.

关于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定；如果讨论的是纯数学问题，则往往取使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合作为该函数的定义

域，这种定义域又称为函数的**自然定义域**.

例如，函数 $y=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的(自然)定义域即为开区间$(-1,1)$.

在平面直角坐标系下，点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

称为函数 $y=f(x)(x\in D)$的**图像**.

若自变量在定义域内任取一个数值，对应的函数值总是只有一个，这种函数称为**单值函数**，否则称为**多值函数**.

例如，方程 $x^2+y^2=a^2,x\in[-a,a]$，则

$$y=\pm\sqrt{a^2-x^2},$$

即 y 是多值函数.

注意：若无特别声明，本教程中的函数均指单值函数.

函数的常用表示法：

(1) **表格法**：将自变量的值与对应的函数值列成表格的方法.

(2) **图像法**：在坐标系中用图形来表示函数关系的方法.

(3) **公式法(解析法)**：将自变量和因变量之间的关系用数学表达式(又称为解析表达式)来表示的方法. 根据函数的解析表达式的形式不同，函数也可分为**显函数**和**隐函数**两种.

(i) 显函数：函数 y 由 x 的解析表达式直接表示. 例如，$y=x^2+1$.

(ii) 隐函数：函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定. 例如，$\ln y=\sin(x+y)$.

下面举几个函数的例子.

例 2　函数

$$y=3$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{3\}$，它的图形是一条平行于 x 轴的直线，如图 1-2 所示.

例 3　函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0,\\ -x, & x<0\end{cases}$$

的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，它的图形如图 1-3 所示. 这个函数称为**绝对值函数**.

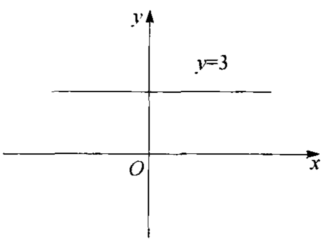

图 1-2

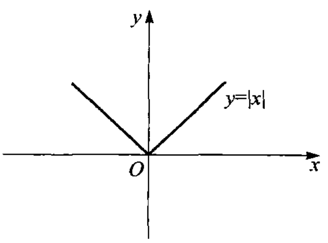

图 1-3

例 4 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为**符号函数**,它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$,值域 $R_f=\{-1,0,1\}$,它的图像如图 1-4 所示,对于任何实数 x,下列关系成立:

$$x = \operatorname{sgn} x \cdot |x|.$$

例 5 取整函数

$$y = [x]$$

表示不超过 x 的最大整数,它的图像如图 1-5 所示,如

$$[1.35] = 1, \quad [-3.4] = -4, \quad [-2] = -2.$$

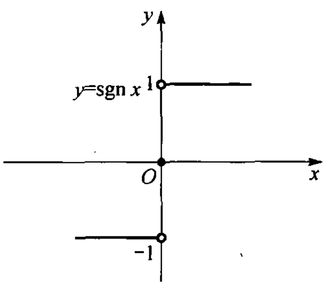

图 1-4

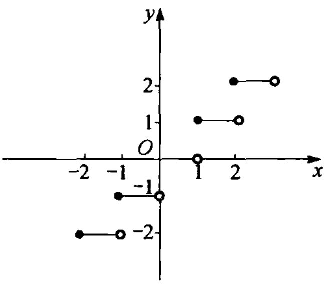

图 1-5

注意:分段函数是一个函数,不是几个函数相加而成.

四、函数的性质

1. 奇偶性

定义 5 设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称.如果对于任意的 $x \in D$,都有

$$f(-x) = f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为**偶函数**;如果对于任意的 $x \in D$,都有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称函数 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于坐标原点对称.

容易证明,两个奇(偶)函数之和仍是奇(偶)函数;两个奇(偶)函数之积是偶函数;一个奇函数与一个偶函数之积是奇函数.

例 6 判断函数 $f(x)=\begin{cases} 2+3x, & x<0, \\ 2, & x=0, \\ 2-3x, & x>0 \end{cases}$ 的奇偶性.

解　由于

$$f(-x)=\begin{cases}2+3(-x), & -x<0\\ 2, & x=0\\ 2-3(-x), & -x>0\end{cases}=\begin{cases}2-3x, & x>0,\\ 2, & x=0\\ 2+3x, & x<0,\end{cases}=f(x),$$

故 $f(x)$是偶函数.

2. 周期性

定义 6　设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在 $T>0$,使得对于任意的 $x\in D$,有 $(x\pm T)\in D$,且

$$f(x+T)=f(x)$$

恒成立,则称 $f(x)$为**周期函数**,T 称为 $f(x)$的**周期**. 通常所说周期函数的周期是指最小正周期.

例如函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数,函数 $y=\tan x$,$y=|\sin x|$ 是以 π 为周期的周期函数.

例 7　求函数 $y=\cos(3x+5)$的周期.

解　因为如果存在 $T>0$,使得对于任意 $x\in\mathbf{R}$ 有

$$\cos[3(x+T)+5]=\cos(3x+5+3T)=\cos(3x+5),$$

则最小的 T 应满足 $3T=2\pi$,即 $T=\frac{2\pi}{3}$,所以该函数的周期为$\frac{2\pi}{3}$.

3. 单调性

定义 7　设函数 $f(x)$的定义域为 D,对于 D 上任意两点 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,如果恒有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在定义域 D 上是**单调增加**的;如果恒有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$在定义域 D 上是**单调减少**的.

4. 有界性

定义 8　设函数 $f(x)$的定义域为 D. 如果存在数 M_1,使得对任意的 $x\in D$ 都有

$$f(x)\leqslant M_1,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上有**上界**,M_1 称为函数 $f(x)$在 D 上的一个上界. 如果存在数 M_2,使得对任意的 $x\in D$ 都有

$$f(x)\geqslant M_2,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上有**下界**,M_2 称为函数 $f(x)$在 D 上的一个下界. 如果存在正数 M,使得对任意的 $x\in D$ 都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$在 D 上**有界**. 如果这样的 M 不存在,就称函数 $f(x)$在 D 上**无界**.

例如,$y=\sin x$ 在$(-\infty,+\infty)$上有界;$y=e^x$ 在$(-\infty,+\infty)$上无界,但如定义域取有限区间,则它也是有界的. 可见,函数的有界性与讨论的区间 D 有关.

五、初等函数

1. 反函数

定义 9 设函数 $y=f(x)$的定义域为 D_f,值域为 $R_f=f(D)$. 若对 R_f 中每一值 y_0,D_f 中必有唯一一个值 x_0,使 $f(x_0)=y_0$,则令 x_0 与 y_0 相对应,便可在 R_f 上确定一个函数,称此函数为函数 $y=f(x)$的反函数,记作

$$x=f^{-1}(y),\quad y\in R_f.$$

习惯上,总是将自变量用 x 表示因变量用 y 表示,所以 $y=f(x)(x\in D_f)$的反函数常写成

$$y=f^{-1}(x),\quad x\in R_f.$$

对每个 $y\in R_f$,只能有一个 $x\in D_f$ 使得 $y=f(x)$,从而可以确定新的函数 $x=f^{-1}(y)$. 因此,由反函数定义不难证明单调函数必有反函数. 但反之不然,即有反函数的函数不一定是单调的.

一般来说,并非每个函数都可以唯一确定一个反函数.

例 8 $y=x^2(x\in\mathbf{R})$,它在定义域 D 上不单调,对于给定的 $y>0$,有两个 x 与之对应,即 $x=\pm\sqrt{y}$. 所以不能确定一个反函数. 但在$(-\infty,0)$上 $y=x^2$ 单调减少,在$(0,+\infty)$上 $y=x^2$ 单调增加. 所以

$y=x^2(x\in(-\infty,0))$有反函数 $y=-\sqrt{x}$ $(x\in(0,+\infty))$;

$y=x^2(x\in(0,+\infty))$有反函数 $y=\sqrt{x}$ $(x\in(0,+\infty))$.

如果把函数 $y=f(x)$和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像画在同一坐标平面上,则这两个图像关于 $y=x$ 对称,如图 1-6 所示.

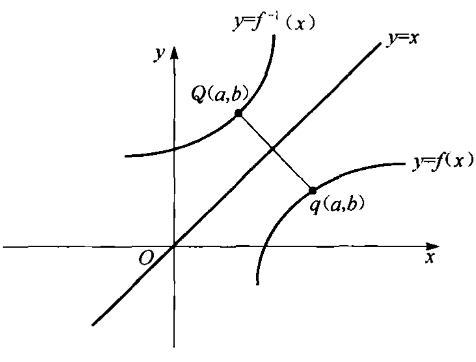

图 1-6

例 9 求函数 $y=1+\sqrt{e^x-1}$的反函数.

解 定义域 $x\geqslant0$,值域 $y\geqslant1$,则

$$x=\ln(y^2-2y+2),\quad y\geqslant1,$$

将 x,y 互换，得反函数

$$y=\ln(x^2-2x+2),x\geqslant 1.$$

2. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为**基本初等函数**. 其主要性质归纳如下：

(1) 常数函数.

$$y=C(C\text{为常数}).$$

其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，图像是一条平行于 x 轴，且在 y 轴上的截距为 C 的直线.

(2) 幂函数.

$$y=x^\alpha(\alpha\text{为常数}).$$

幂函数的定义域要视 α 而定，例如，当 $\alpha=\frac{1}{3}$ 时，其定义域是 $(-\infty,+\infty)$，当 $\alpha=\frac{1}{2}$ 时，其定义域是 $[0,+\infty)$. 但不论 α 是什么值，它在 $(0,+\infty)$ 内总有定义，并且图像总是过点 $(1,1)$，如图 1-7 所示.

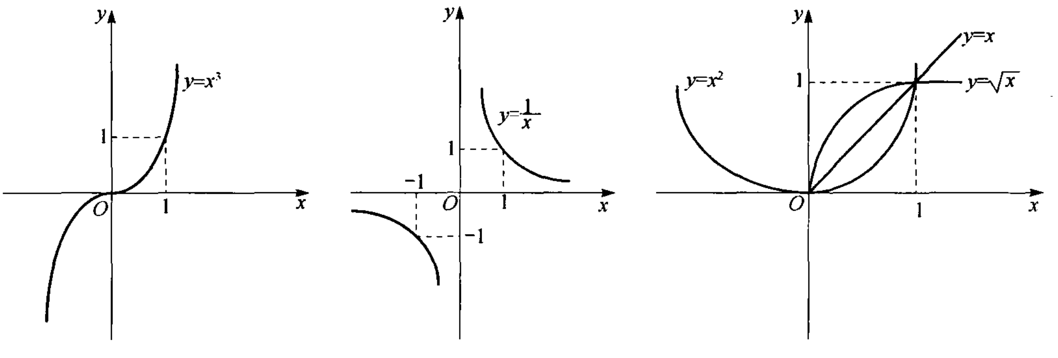

图 1-7

(3) 指数函数.

$$y=a^x(a>0\text{ 且 }a\neq 1).$$

它的定义域是 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$，其图像总是在 x 轴的上方，且过点 $(0,1)$. 当 $\alpha>1$ 时，函数单调增加；当 $0<\alpha<1$ 时，函数单调减少. 如图 1-8 所示.

(4) 对数函数.

$$y=\log_a x(a>0\text{ 且 }a\neq 1).$$

它的定义域是 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，其图像总是过点 $(1,0)$. 当 $\alpha>1$ 时，函数单调增加；当 $0<\alpha<1$ 时，函数单调减少. 如图 1-9 所示. 对数函数与指数函数互为反函数.

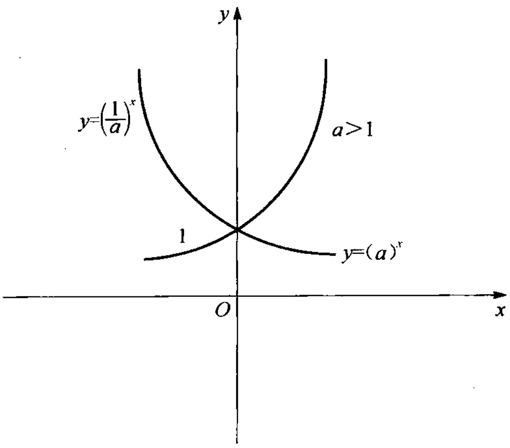

图 1-8

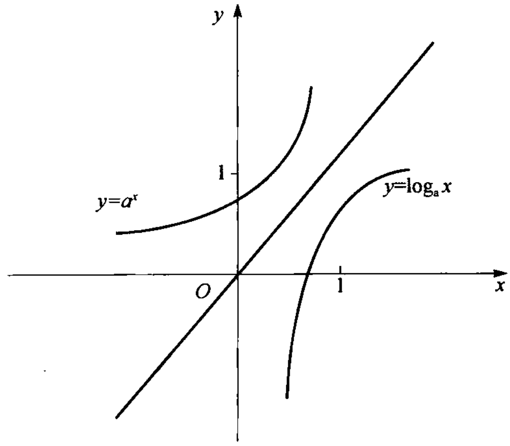

图 1-9

(5) 三角函数.

三角函数共有 6 个,它们是:

正弦函数 $y=\sin x$(图 1-10);

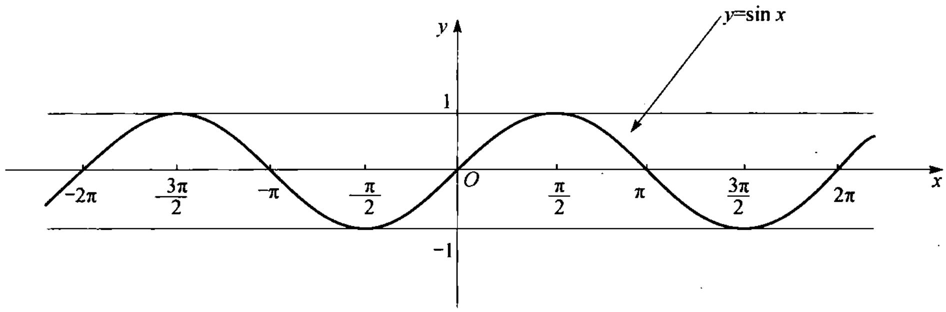

图 1-10

余弦函数 $y=\cos x$(图 1-11);

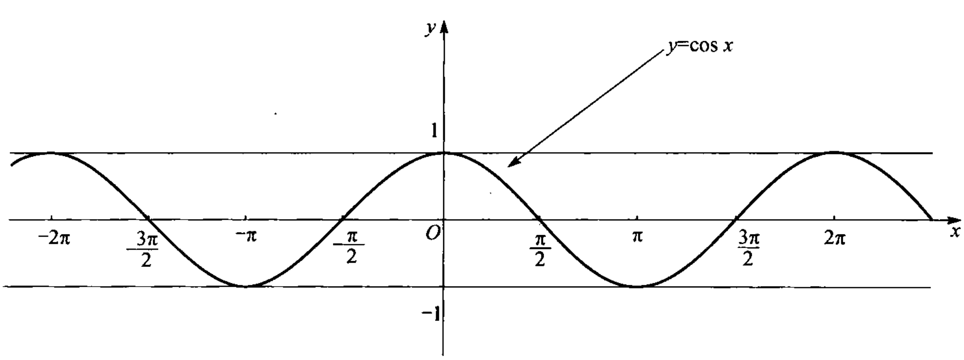

图 1-11