JINGPIN XILIE JIAOCAI

高等财经院校“十二五”精品系列教材

# 《线性代数》学习指导

（第二版）

孟宪萌　王继强　主编

A Guide to Linear Algebra

经济科学出版社
Economic Science Press

高等财经院校“十二五”精品系列教材

# 《线性代数》学习指导

（第二版）

孟宪萌　王继强　主编　　谭香　宋浩　副主编

# A Guide to Linear Algebra

经济科学出版社
Economic Science Press

**图书在版编目（CIP）数据**

《线性代数》学习指导/孟宪萌，王继强主编．—北京：经济科学出版社，2013.7

高等财经院校“十二五”精品系列教材

ISBN 978-7-5141-3648-7

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①孟…②王…　Ⅲ.①线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第167666号

责任编辑：柳　敏　李晓杰
责任校对：靳玉环
版式设计：代小卫
责任印制：李　鹏

**《线性代数》学习指导**
（第二版）
孟宪萌　王继强　主编
谭　香　宋　浩　副主编
经济科学出版社出版、发行　新华书店经销
社址：北京市海淀区阜成路甲28号　邮编：100142
总编部电话：010-88191217　发行部电话：010-88191522
网址：www.esp.com.cn
电子邮件：esp@esp.com.cn
天猫网店：经济科学出版社旗舰店
网址：http://jjkxcbs.tmall.com
北京密兴印刷厂印装
710×1000　16开　14.25印张　270000字
2013年7月第1版　2013年7月第1次印刷
印数：00001—20000册
ISBN 978-7-5141-3648-7　定价：27.00元
**（图书出现印装问题，本社负责调换。电话：010-88191502）**

# 总　　序

大学是研究和传授科学的殿堂，是教育新人成长的世界，是个体之间富有生命的交往，是学术勃发的世界。* 大学的本质在于把一群优秀的年轻人聚集一起，让他们的创新得以实现、才智得以施展、心灵得以涤荡，产生使他们终身受益的智慧。

大学要以人才培养和科学研究为己任，大学教育的意义在于它能够给人们一种精神资源，这一资源可以帮助学子们应对各种挑战，并发展和完善学子们的人格与才智，使他们经过大学的熏陶，学会思考、学会反省、学会做人。一所大学要培养出具有健全人格、自我发展能力、国际视野和竞争意识的人才，教材是实现培养目标的关键环节。没有优秀的教材，不可能有高质量的人才培养，不可能产生一流或特色鲜明的大学。大学教材应该是对学生学习的引领、探索的导向、心智的启迪。一本好的教材，既是教师的得力助手，又是学生的良师益友。

目前，中国的大学教育已从“精英型教育”走向“平民化教育”，上大学不再是少数人的专利。在这种情况下，如何保证教学质量的稳定与提升？教材建设的功能愈显重要。

为了全面提高教育教学质量，培养社会需要的、具有人文精神和科学素养的本科人才，山东财经大学启动了“十二五”精品教材建设工程。本工程以重点学科（专业）为基础，以精品课程教材建设为目标，集中全校优秀师资力量，编撰了高等财经院校“十二五”精品系

---

* 雅斯贝尔斯著，邹进译：《什么是教育》，生活·读书·新知三联书店 1991 年版，第 150 页。

列教材。

本系列教材在编写中体现了以下特点：

1. 质量与特色并行。本系列教材从选题、立项，到编写、出版，每个环节都坚持“精品为先、质量第一、特色鲜明”的原则。严把质量关口，突出财经特色，树立品牌意识，建设精品教材。

2. 教学与科研相长。教材建设要充分体现科学研究的成果，科学研究要为教学实践服务，两者相得益彰，互为补充，共同提高。本系列教材汇集各领域最新教学与科研成果，对其进行提炼、吸收，体现了教学、科研相结合，有助于培养具有创新精神的大学生。

3. 借鉴与创新并举。任何一门学科都会随着时代的进步而不断发展。因此，本系列教材编写中始终坚持“借鉴与创新结合”的理念，舍其糟粕，取其精华。在中国经济改革实践基础上进行创新与探索，充分展示当今社会发展的新理论、新方法、新成果。

本系列教材是山东财经大学教学质量与教学改革建设的重要内容之一，适用于经济学、管理学及相关学科的本科教学。它凝聚了众多教授、专家多年教学的经验和心血，是大家共同合作的结晶。我们期望摆在读者面前的是一套优秀的精品教材。当然，由于我们的经验存在欠缺，教材中难免有不足之处，衷心期盼专家、学者及广大读者给予批评指正，以便再版时修改、完善。

**山东财经大学教材建设委员会**

2012 年 6 月

# 前　　言

《线性代数》是高等财经院校的经济数学基础课之一，其理论与方法已经渗透到经济、管理、信息、人文社科等诸多领域中．作为山东省精品课程、高等财经院校“十二五”精品系列教材《线性代数》的辅导教材，本书第一版已为我校师生使用四年有余，经受了长期的教学实践检验，取得了良好的反响．在此基础上，我们决定修订出版第二版．第二版具有以下几个特点：

1. 在内容和体系上与《线性代数》教材保持高度一致．本书每章均由“内容提要”、“重点难点”、“史海点滴”、“习题类解”、“同步练习”和“习题解答”六部分构成．“内容提要”力求对知识进行简要分析和概括，作为课堂讲授的补充和深化，让读者了解各章的“重点难点”；与第一版相比，新增的“史海点滴”介绍一些线性代数概念的来龙去脉，以激发学生的学习兴趣；“习题类解”意在强化学生对知识的理解与掌握，培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力以及运用所学知识分析解决问题能力；“同步练习”（含填空题、选择题、计算题、证明题）和“习题解答”旨在考查学生对基本概念、基本理论、基本方法的掌握与运用情况．

2. 适合多层次读者的需要．本书虽然主要是作为经济管理学科本科生的学习辅导书，但也适用于其他专业类别的本专科生的学习辅导以及教师教学参考．同时，本书中有一定比例的例题与习题选自历年全国研究生考试试题中有代表性的题目，因此，本书也不失为一本系统的考研复习参考书．

3. 在涵盖《线性代数》教材全部内容的基础上，进行了深度扩展和延伸，使学有余力的学生达到丰富和扩充知识面的目的．“习题类解”中的一些例子或给出一题多解、或点拨以思路、或强调解法之重要，或突出重点与难点，希望读者能够独立思考、深入钻研，对这些习题给出更好的解答．

4. 增加了“线性空间与线性变换”一章的习题，增强了内容体系的系统性和完整性．

本书由山东财经大学孟宪萌、王继强主编，谭香、宋浩副主编．郝秀梅、姜庆华提出总体修订编写框架，并修改定稿．

在本书的编写过程中，我们参阅并借鉴了国内外线性代数教学和研究相关领域的大量图书文献资料，得到了山东财经大学教务处和经济科学出版社的大力支持，在此一并表示感谢．

由于编者水平所限，书中不当之处在所难免，恳请广大读者和同仁不吝指正．

**编者**

2013 年 5 月

# 目　录

# 第 1 章　行　列　式

## §1.1　内容提要

在数学发展史上，线性代数的第一个研究对象是线性方程组，行列式（determinant）正是在对线性方程组的研究过程中被提出并使用的一个重要工具．其实，行列式在工程技术和应用学科中有着超越线性方程组的更为广泛的应用．本章主要介绍行列式的概念、性质、计算以及与之相关的克莱姆（Cramer）法则等内容．这些关于行列式的基本理论是学习后续各章的基础．

### 1.1.1　$n$ 阶行列式

#### 1. 二、三阶行列式

二、三阶行列式的概念是从初等数学中求解二、三元线性方程组的问题中提出来的，其计算遵循对角线法则．

（1）二阶行列式．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

（2）三阶行列式．

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

4 阶以上的行列式不满足对角线法则.

## 2. 排列与逆序

排列与逆序是为了介绍 $n$ 阶行列式的概念而引入的.

（1）$n$ 级排列.

由 1，2，…，$n$ 组成的一个有序数组（自然数 1，2，…，$n$ 的一个全排列），称为一个 $n$ 级排列，其中 $12\cdots n$ 称为标准排列.

（2）逆序与逆序数.

$n$ 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中大的在前、小的在后的两个数构成一个逆序，逆序的总个数称为逆序数，记作 $N(i_1i_2\cdots i_n)$. 根据逆序数的奇偶性，排列有奇排列和偶排列之分.

（3）两个重要的逆序数.

$N(12\cdots n)=0$，$N(n(n-1)\cdots 21)=C_n^2$.

（4）逆序数的一个重要性质.

$N(i_1i_2\cdots i_n)+N(i_n\cdots i_2i_1)=C_n^2$.

（5）对换及有关定理.

互换排列中两个数的位置称为一个对换. 经一次对换，排列的奇偶性改变. $n$ 级排列中奇、偶排列数目各半，均为$\dfrac{n!}{2}$.

## 3. $n$ 阶行列式

（1）$n$ 阶行列式的定义.

$$D=|a_{ij}|_{n\times n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$（所有取自不同行不同列的 $n$ 个元素之积的代数和）

（2）两个等价的定义.

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}=\sum_{\substack{i_1i_2\cdots i_n\\ j_1j_2\cdots j_n}}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$$

行列式的三个不同形式的定义在本质上是相同的，即行列式是所有可能的来自不同行不同列的元素之积的代数和.

显然，二、三阶行列式分别是 $n$ 阶行列式在 $n=2$，3 时的特例.

特别地，一阶行列式 $|a_{11}|=a_{11}$.

(3) 一些常用的行列式.

上、下三角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{C_n^2}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

对角形行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

## 1.1.2　行列式的性质

行列式的性质主要是为简化行列式的计算而引入的，具体如下：

(1) 转置不改变行列式的值；

(2) 交换两行时，行列式的值变号；

(3) 两行元素对应相同时，行列式的值为 0；

(4)（提公因子）某行元素都乘以数 $k$，等于以 $k$ 乘此行列式；

(5) 两行元素对应成比例时，行列式的值为 0；

推论　某行元素均为 0 时，行列式的值为 0.

(6)（拆项）某行元素均可表为两元素之和时，行列式可表为两行列式之和；

(7)（加倍）某行元素的 $k$ 倍对应加到另一行元素上时，行列式的值不变.

以上性质对列也同样成立.

### 1.1.3 行列式按行（列）展开

#### 1. 余子式与代数余子式

（1）余子式.

在 $n$ 阶行列式 $D$ 中，划去元素 $a_{ij}$ 所在的行和列，剩下的元素按原来的位置所构成的 $n-1$ 阶行列式称为 $a_{ij}$ 的余子式，记作 $M_{ij}$.

（2）代数余子式.

余子式 $M_{ij}$ 前冠以符号 $(-1)^{i+j}$ 后称为 $a_{ij}$ 在 $D$ 中的代数余子式，记为 $A_{ij}$，即

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}.$$

#### 2. 行列式按行（列）展开

（1）行列式按行（列）展开法则.

$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}$（任一行各元素与其对应的代数余子式乘积之和）

$\quad=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$（任一列各元素与其对应的代数余子式乘积之和）.

（2）异乘变零定理.

$a_{i1}A_{s1}+a_{i2}A_{s2}+\cdots+a_{in}A_{sn}=0 \quad (i\neq s)$

（某一行各元素与另一行对应元素的代数余子式乘积之和为0）

$a_{1j}A_{1t}+a_{2j}A_{2t}+\cdots+a_{nj}A_{nt}=0 \quad (j\neq t)$

（某一列各元素与另一列对应元素的代数余子式乘积之和为0）

合记作：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{sj}=\begin{cases}D, & i=s\\0, & i\neq s\end{cases}\quad（行）$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{it}=\begin{cases}D, & j=t\\0, & j\neq t\end{cases}\quad（列）$$

#### 3. 拉普拉斯（Laplace）定理

拉普拉斯定理虽为选学内容，但读者若能加以领会掌握，则对行列式计算能力的增强不无裨益．首先，将元素的余子式与代数余子式的概念推广到 $k$ 阶子式、余子式及代数余子式：

（1）$k$ 阶子式的余子式和代数余子式.

在 $n$ 阶行列式 $D$ 中，任意选定 $k$ 行 $k$ 列（$1\leqslant k\leqslant n$），其交叉处的 $k^2$ 个元素按原来的位置所构成的 $k$ 阶行列式 $M$ 称为 $D$ 的 $k$ 阶子式，剩下的元素按原来的位置所构成的 $n-k$ 阶行列式 $N$ 称为 $M$ 的余子式.

代数余子式：$A=(-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)}N$，其中 $i_1$，$i_2$，…，$i_k$ 和 $j_1$，$j_2$，…，$j_k$ 分别为 $k$ 阶子式 $M$ 在 $D$ 中的行标和列标.

（2）拉普拉斯定理.

$n(n\geqslant 2)$ 阶行列式 $D$ 的值等于在 $D$ 中任取 $k$ 行（列），由这 $k$ 行（列）元素所构成的所有 $k$ 阶子式与其代数余子式乘积之和.

显然，行列式按行（列）展开法则是拉普拉斯定理在 $k=1$ 时的特例.

（3）行列式相乘规则.

设 $D_1=|a_{ij}|$ 与 $D_2=|b_{ij}|$ 是两个 $n$ 阶行列式，则它们的乘积也可表为一个 $n$ 阶行列式 $D=|c_{ij}|$，其中 $c_{ij}$ 为 $D_1$ 的第 $i$ 行元素与 $D_2$ 的第 $j$ 列相应元素乘积的和，即

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}\quad (i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

### 1.1.4 行列式的计算

行列式的计算问题类型多样，方法不一，主要有：按行（列）展开、化为上（下）三角行列式、降阶法（化高阶行列式为低阶行列式）、递推关系式法、数学归纳法、加边法等. 读者应多加练习，以求逐渐积累经验，最终达到熟能生巧之目的.

另外，记住一些常见的结论对于计算行列式也是非常必要和有益的，如：

对称行列式：

$$\begin{vmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a & \cdots & x \end{vmatrix}_{n\times n}=[x+(n-1)a](x-a)^{n-1}$$

范德蒙德（Vandermonde）行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)$$

奇数阶反对称行列式的值为0.

## 1.1.5 克莱姆（Cramer）法则

1750年，瑞士数学家克莱姆（Cramer）在其著作《线性代数分析导引》中首次给出了一个求解一类特殊的线性方程组的方法，后世称之为克莱姆法则，其内容是：

### 1. 克莱姆法则

含 $n$ 个未知量 $n$ 个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases},$$

当系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

时有惟一解：$x_j=\dfrac{D_j}{D}$，$j=1, 2, \cdots, n$，其中 $D_j$ 是将 $D$ 的第 $j$ 列换为 $b_1$，$b_2$，$\cdots$，$b_n$，其余列不变所得到的行列式.

克莱姆法则的使用条件是：线性方程组中方程的个数等于未知量的个数，且系数行列式的值非零.

### 2. 两个推论

齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$ 仅有零解 $\Leftrightarrow D\neq 0$；有非零解 $\Leftrightarrow D=0$.

# §1.2 重点难点

## 1.2.1 重点

### 1. 行列式的概念与性质

行列式是线性代数中的一个重要而基本的概念．行列式的定义（尤其是展开式中的一般项）有三种表述方式，读者应在理解逆序数概念的基础上加以记忆．用于定义二、三阶行列式的对角线法则是 $n$ 阶行列式的定义的特殊体现．行列式的性质虽然众多，但大都简单明了，易于接受，是进行行列式计算的基础．行列式的个别性质（如提公因子的性质）与第 2 章中矩阵运算的有关性质看似相像，实则有异，读者应切实理解，避免混淆．

### 2. 行列式按行（列）展开法则

余子式和代数余子式，包括 $k$ 阶子式、余子式和代数余子式的概念是行列式按行（列）展开法则的基础，也是学习线性代数的"死角"．读者初次学习这些概念时应深刻理解，牢固掌握，否则，时间稍久，极易迷惑不解．行列式按行（列）展开法则和异乘变零定理应结合起来记忆，方能区隔异同（选定行（列）的各元素是否和自己的代数余子式相乘），认清联系，历久弥新．作为行列式按行（列）展开法则的推广，拉普拉斯定理在理论证明上的意义远大于在实际计算上的作用．

### 3. 行列式的计算

行列式的计算贯穿于整个线性代数的始终，是学习矩阵、线性方程组、特征值与特征向量、二次型等其他知识的基础．行列式的种类众多，形式繁杂，其计算无固定方法可用．大致说来，常用方法主要有：按行（列）展开、化为上（下）三角行列式、降阶法、递推关系式法、数学归纳法、加边法等．此外，记住一些常见行列式的结果也是很有必要的．

### 4. 克莱姆法则

作为行列式理论的具体应用之一，克莱姆法则可以用来求解一类特殊的（含

$n$个未知量$n$个方程）线性方程组，但其适用范围有限（要求线性方程组的系数行列式的值非零）. 读者在使用这一法则时应多加注意. 关于一般线性方程组的解法将在第4章中加以介绍.

### 1.2.2 难点

**1. 行列式的概念**

因为行列式是借助逆序数来定义的，而初学者往往对逆序数的概念感到困惑，加之行列式定义中的一般项有三种不同的形式，所以行列式的概念是本章的难点之一，也是重要的考点之一.

**2. 行列式的计算**

如上所述，行列式的计算没有一套统一的方法可以遵循，因此它既是本章的重点，也是本章乃至整个线性代数知识体系的难点.

## §1.3 行列式小史

行列式（determinant）最初是在人们研究线性方程组的求解时作为一种速记符号出现的，现在已是数学中一个非常有用的工具.

1545年，意大利数学家卡当（J. Cardan）在其著作《大术》中给出了解一次方程组的“母法”，这一方法和后来的克莱姆法则很相似，但他当时并没有给出行列式的概念.

1683年，日本数学家关孝和（Seki Takakazu）在其著作《解伏题之法》（意为解行列式问题的方法）中首次引入了行列式的概念，书中对行列式的概念及其展开已有了清楚的叙述. 1693年，德国数学家莱布尼兹（G. Leibnitz）在写给法国数学家洛必达（L'Hopital）的一封信中使用了行列式的概念，并首次使用了行列式的符号“| |”. 因此，后人多认为行列式的概念是由关孝和与莱布尼兹各自独立提出的.

1730年，英国数学家麦克劳林（C. Maclaurin）在其著作《论代数》中开始阐述行列式的理论，并记载了用行列式解二元、三元和四元一次方程的方法，并给出了四元一次方程组的一般解的形式.