现代数学基础丛书 149

索伯列夫空间导论

陈国旺 编著

科学出版社

现代数学基础丛书　149

索伯列夫空间导论

陈国旺　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要讲述索伯列夫空间一般理论和在非线性偏微分方程中的应用. 内容涉及 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ 及其基本性质; 整数阶索伯列夫空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 及其性质; $W^{m,p}(\Omega)$ 空间的嵌入定理、紧嵌入定理和插值定理以及连续函数空间的嵌入定理. 论述研究非线性发展方程时, 常用到的含有时间的空间和含有时间的索伯列夫空间. 介绍类似于索伯列夫空间嵌入定理的离散函数的插值公式, 并利用离散函数的插值公式证明广义 Schrödinger 型方程组初边值问题整体广义解的存在唯一性. 讲述速降函数、缓增广义函数以及它们的 Fourier 变换和 Lebesgue 空间的 Fourier 变换, 分数阶索伯列夫空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 和 $H^s(\Omega)$ 及其性质. 介绍近年来国内外关注的几个非线性发展方程的初边值问题和 Cauchy 问题解的存在唯一性以及解的爆破现象和解的渐近性质, 使读者较快地利用索伯列夫空间这个有力理论工具, 进入研究偏微分方程等学科的前沿.

本书可作为偏微分方程、计算数学、泛函分析、数学物理、控制论和微分几何等专业的本科生、研究生的教材和参考书, 也可供从事相关专业研究的科技工作者参考.

图书在版编目(CIP)数据

索伯列夫空间导论/陈国旺编著. —北京: 科学出版社, 2013
(现代数学基础丛书; 149)

ISBN 978-7-03-038239-9

Ⅰ. ①索… Ⅱ. ①陈… Ⅲ. ①索伯列夫空间 Ⅳ. ①O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 176683 号

责任编辑: 赵彦超 徐园园 / 责任校对: 桂伟利
责任印制: 赵德静 / 封面设计: 陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013 年 8 月第 一 版 开本: B5(720×1000)
2013 年 8 月第一次印刷 印张: 26 1/2
字数: 530 000

定价: 118.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于“文化大革命”的浩劫已经破坏与中断了 10 余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高做出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

前　言

著名数学家、前苏联科学院院士索伯列夫 · 谢尔盖 · 李沃维奇 (Соболев Серге Львович)1908 年 10 月 6 日生于圣彼得堡, 1989 年 1 月 7 日逝世于莫斯科. 索伯列夫的主要工作在偏微分方程理论、数学物理、泛函分析和计算数学等方面. 他是最早在偏微分方程理论中系统运用泛函分析方法的数学家. 由于他引进了一类泛函空间, 为偏微分方程理论的发展作出了基础性贡献, 所以人们称这一类泛函空间为索伯列夫空间. 索伯列夫研究了这些空间的结构以及它们之间的嵌入定理, 还引入了偏微分方程广义解概念, 并在 1935 年给出了广义函数的第一个严格定义. 现在索伯列夫空间已成为研究偏微分方程、数学物理、计算数学、微分几何和许多其他学科的理论基础和重要工具. 但是目前国内外关于索伯列夫空间理论的专著和研究生教材不多, 而且内容侧重面也不同, 在教学中有很多不便. 一般专著起点高, 有些重要定理的证明比较简略或没有证明, 对初学者或研究生来讲, 学习起来比较困难[1−9]. 涉及偏微分方程的专著或教科书, 往往将索伯列夫空间的内容作为预备知识, 不但内容少, 而且大部分都把证明略去了[10−23]. 这比较适合已掌握索伯列夫空间知识的读者, 而不适合初学者.

本书作者已为郑州大学数学系研究生和青年教师讲授索伯列夫空间课程二十多年, 比较了解他们应该学习和掌握索伯列夫空间的哪些内容. 在讲授索伯列夫空间课程与指导硕士生和博士生的实践过程中, 体会到现有的索伯列夫空间方面的教科书侧重点不同, 不能满足研究生的教学需求. 为了方便教学, 并使他们学好专业和提高科研能力, 作者编写了这本适合研究生教学和青年学者自学的教材.

索伯列夫空间课程是数学系硕士研究生和博士研究生学习偏微分方程、数学物理、泛函分析、计算数学、微分几何等方向的专业基础课, 所以作者确定内容时, 既要照顾到不同的专业要求, 还要考虑到书的系统性, 为此参阅了与索伯列夫空间有关的专著、教科书和文献, 吸收了它们的长处 (见每章中所引文献). 并根据讲授情况和师生们反映的意见, 经过逐年增补, 修改写成本书. 本书是一本为研究生和青年学者踏进偏微分方程等学科研究领域打好索伯列夫空间理论基础的入门书, 书中内容由浅入深, 有广度和深度, 结构严谨, 定理论证严密详细, 语言表达流畅, 全书自成体系. 特别为使读者掌握索伯列夫空间理论后, 能够较快地运用它, 进入研究偏微分方程等学科的前沿. 学完整数阶索伯列夫空间后, 在第 6 章中介绍国内外关注的非线性抛物型方程和非线性波动方程的初边值问题等; 学完离散函数空间和插值公式后, 在第 7 章中介绍 Schrödinger 型方程组的初边值问题; 在

第 8 章中介绍分数阶索伯列夫空间. 第 9 章作为索伯列夫空间在偏微分方程中的应用, 主要讨论非线性波动方程的 Cauchy 问题. 研究具阻尼项的 N 维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题. 还研究具 Stokes 阻尼项的一维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题.

为了方便读者, 书中用到实变函数和泛函分析的定理时, 只写出定理, 不做证明. 具备数学分析、实变函数和泛函分析基础的读者容易读懂和掌握书中的内容.

本书共分九章, 下面简要介绍各章内容.

第 1 章是基础知识, 讲述泛函分析的一些概念、定义和定理, 大多数定理不加证明, 只证明 $C^m(\overline{\Omega})$ 空间和 $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ 空间的完备性. 这一章的内容是以后讨论问题的基础.

第 2 章论述 Lebesgue 空间 $L^p(\Omega)$ 的完备性、弱完备性、可分性、一致凸性和自反性等基本性质. 还讲述下面章节需要的 $L^p(\Omega)$ 空间的 Riesz 表示定理、Marcinkiewicz 插值定理和混合范数 L^p 空间等. 因为索伯列夫空间是 $L^p(\Omega)$ 空间的子空间, 学习好 $L^p(\Omega)$ 空间理论对掌握索伯列夫空间内容至关重要, 所以为了完整和系统起见, 不但每个定理都有证明, 而且都较为详细.

第 3 章介绍索伯列夫空间的预备知识: 广义函数, 广义函数的支集、直积、卷积和导数以及区域的几何性质. 论述整数阶索伯列夫空间的基本性质, 如完备性、可分性、一致凸性和自反性等. 还证明单位分解定理和 Gagliardo 定理. 最后论述对偶性与空间 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 和证明有关定理.

第 4 章主要论述索伯列夫空间的嵌入定理、连续函数空间的嵌入定理、插值定理和紧嵌入定理. 这些都是很重要的内容, 所以都做了详细证明.

第 5 章讲述研究非线性发展方程时, 常常用到含有时间的空间和含有时间的索伯列夫空间. 为此, 先介绍必要的预备知识：抽象函数及其 Bochner 积分, 然后介绍含有时间的空间和含有时间的索伯列夫空间, 最后介绍 Aubin 引理. 对所有定理都作了证明.

第 6 章为了使读者较快地利用索伯列夫空间这个有力工具阅读和研究非线性偏微分方程, 讨论近年来国内外所关注的一类非线性抛物型方程初边值问题的整体广义解和整体古典解的存在性、唯一性和解的渐近性质; 证明一般线性椭圆型方程的 Dirichlet 问题存在唯一的弱解; 考虑具阻尼非线性双曲型方程初边值问题和广义立方双色散方程初边值问题解的爆破现象; 研究一类四阶非线性发展方程初边值问题解的渐近性质以及讨论广义 IMBq 型方程组的初边值问题. 在这些讨论的问题中用到了索伯列夫空间嵌入定理、紧嵌入定理、内插定理和含有时间的索伯列夫空间等.

第 7 章介绍离散函数空间的插值公式和应用. 索伯列夫空间的嵌入定理和插值定理对于研究偏微分方程和数值分析起着重要的作用. 对于离散函数空间也有

类似的插值公式, 这些插值公式对于研究偏微分方程和有限差分方法同样起着重要的作用. 我们介绍离散函数空间之后, 作为其应用, 讨论广义 Schrödinger 型方程组初边值问题, 利用有限差分方法证明其存在唯一的整体广义解.

第 8 章主要介绍; 速降函数、缓增广义函数和 Lebesgue 空间函数的 Fourier 变换; 分数阶索伯列夫空间 $H^s(\mathbb{R}^N)$ 和 $H^s(\Omega)$ 及其性质.

第 9 章作为分数阶索伯列夫空间的应用, 证明具阻尼项的 N 维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题在两个不同空间中存在唯一的整体广义解和唯一的整体古典解, 并给出解爆破的充分条件, 还研究具 Stokes 阻尼项的一维广义 IMBq 方程的 Cauchy 问题.

第 3~9 章可以说是本书的主要部分.

在本书中, 参考文献用方括号, 方程和公式用圆括号标出. 区域这个术语和符号 Ω 专门用来表示实 N 维欧氏空间 $\mathbb{R}^N$ 中的开集. 其他符号当第一次出现时说明其表示的意思, 以后表示同样的意思, 将不再说明.

本书在郑州大学讲授和撰写过程中, 苗长兴教授、杨志坚教授、王书彬教授、邢家省副教授、任留成教授、赵占才副教授、郭秀兰教授、宋长明教授、江成顺教授、张宏伟教授、呼青英教授、王艳萍教授、韩献军博士、薛红霞博士、郭红霞博士、王玉柱博士、耿世峰博士、郭青博士、陈翔英副教授和达芳讲师等曾提出过宝贵意见, 在此一并致谢. 特别是杨志坚教授曾以本书为教材为郑州大学数学系的研究生讲授索伯列夫空间课程, 并提出宝贵意见, 特此向他表示感谢. 还要感谢胡明瑞女士、陈翔宇先生、陈翔英副教授、郭红霞博士和达芳讲师, 为本书打印和排版所付出的劳动. 本书获得中国科学院出版基金的资助, 特此表示感谢!

由于作者学识所限, 书中不妥之处, 真诚地欢迎读者批评指正.

陈国旺

2012 年 12 月于郑州

目　　录

第 1 章　基 础 知 识

为了更方便地阅读本书, 本章介绍一些今后常用的泛函分析中的基本概念和定理, 其中除了证明个别定理外, 一般只写出定理的具体内容, 不加证明, 更详尽的内容可以从其他教科书或专著中查到[24−27].

1.1　几个基本空间的定义

1.1.1　距离空间

定义 1.1.1　设 X 是一非空集合. X 称为距离空间 (又称度量空间), 是指在 X 上定义了一个双变量的实值函数 $\rho(x,y)$ 满足下列三个公理:

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$, 而且 $\rho(x,y)=0$, 当且仅当 $x=y$;

(2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

(3) $\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)\quad(x,y,z\in X)$,

其中 ρ 称为 X 上的一个距离; $x\in X$ 表示 X 包含元素 x 或 x 属于 X.

定义 1.1.2　设 X 是一距离空间. 称 $L:X\mapsto X$ 是一个压缩映射, 如果存在 $0<a<1$, 使得 $\rho(Lx,Ly)\leqslant a\rho(x,y)$, $\forall x,y\in X$, 其中符号 $\forall$ 表示 "对于每一个".

定理 1.1.1 (Banach 不动点定理–压缩映射原理)　设 X 是一完备的距离空间, L 是将 X 映入自身的一个压缩映射, 则 L 存在唯一的不动点, 即存在唯一的 $x\in X$, 使得 $Lx=x$.

定义 1.1.3　设 X 是一距离空间, M 为其一子集, 称 M 是列紧集, 如果 M 中任一无穷点集在 X 中有一个收敛子列. 如果这个子列还收敛到 M 中的点, 则称 M 是自列紧的. 如果空间 X 是列紧的, 则称 X 为列紧空间.

定义 1.1.4　设 X 是一距离空间, X 中的集合 M 称紧集, 如果 X 中的每个覆盖 M 的开集族中有有穷个开集覆盖集合 M. 如果空间 X 本身按定义 1.1.3 是紧的, 则称 X 为紧距离空间. 距离空间 X 的子集 M 称准紧的, 如果其闭包 $\overline{M}$ (在距离拓扑下) 是紧的.

定理 1.1.2　设 X 是一距离空间, 则 X 中的集合 M 是紧的充要条件是它为自列紧集.

定理 1.1.3　(1) $\mathbb{R}^N$($\mathbb{R}^N$ 表示 N 维 Euclid 空间, 简称 N 维欧氏空间, $\mathbb{R}^1=\mathbb{R}$) 中的任意有界集是列紧集, 任意有界闭集是自列紧集;

(2) 列紧空间内任意 (闭) 子集都是 (自) 列紧集;

(3) 列紧空间必是完备空间.

1.1.2　线性空间

定义 1.1.5　设 X 是由元素 $x, y, z, \cdots$ 组成的集合. 在集合 X 中定义加法和数乘运算如下:

(1) X 中的加法运算, 即 X 中每一对元素 x 和 y 与 X 中的元素 z 对应, 称为 x 与 y 的和, 并记为 $x+y$, 即

$$z = x + y;$$

(2) X 中的数乘运算, 即 X 中每一个元素 x 和数域 $\mathbb{K}$($\mathbb{K}$ 是实 (或复) 数域) 中任一数 a (称为标量) 对应 X 中一元素 z, 称为 a 和 x 的积, 记为 ax, 即

$$z = ax;$$

(3) 集合 X 在其内定义了加法运算和数乘运算后, 称为实 (或复) 线性空间, 如果满足下列公理:

(i) $x + y = y + x, \quad \forall x, y \in X$;

(ii) $x + (y + z) = (x + y) + z, \quad \forall x, y, z \in X$;

(iii) X 中存在唯一的元素 θ, 称为零元素, 使得对于每一个元素 $x \in X$, 有

$$x + \theta = x;$$

(iv) 对于 $x \in X$ 在 X 中存在唯一的元素 $(-x)$, 使得

$$x + (-x) = \theta;$$

(v) $a(x + y) = ax + ay, \quad \forall a \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

(vi) $(a + b)x = ax + bx, \quad a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

(vii) $a(bx) = (ab)x, \quad \forall a, b \in \mathbb{K}, \forall x \in X$;

(viii) $1 \cdot x = x$.

线性空间的元素又称为向量, 因而线性空间也称为向量空间.

注 1.1.1　除了特别声明外, 本书主要讲实的线性空间.

1.1.3　线性赋范空间

定义 1.1.6　如果集合 X 满足下列两类条件, 则称 X 为线性赋范空间.

(1) X 是线性空间;

(2) X 是赋范空间, 即每一个元素 $x \in X$, 有唯一的一个实数与之对应, 此数称为元素 x 的范数, 记为 $\|x; X\|$ 或 $\|x\|_X$, 且满足下列范数公理:

(i) $\|x;X\| \geqslant 0$, 而且 $\|x;X\| = 0$, 当且仅当 $x = \theta$ (正定性公理);

(ii) $\|x+y;X\| \leqslant \|x;X\| + \|y;X\|$ (三角不等式公理);

(iii) $\|ax;X\| = |a|\|x;X\|(a \in \mathbb{R})$ (齐次性公理).

设 x, y 是线性赋范空间 X 中的一对元素, 称

$$\rho(x,y) = \|x-y;X\|$$

为 X 中两点 x 和 y 之间的距离. 如果按上式定义距离, 每一线性赋范空间是一距离空间.

定义 1.1.7 设 X 是一线性赋范空间, 并令 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 是 X 的两个范数, 称 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_2$ 等价, 如果存在常数 $c, d > 0$, 使得

$$c\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant d\|x\|_1, \quad \forall x \in X.$$

定义 1.1.8 设 X 是一线性赋范空间和 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 X 中一元素序列, 我们称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中收敛于 $x \in X$, 如果

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x;X\| = 0.$$

我们也称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中强收敛于 x 或称 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 的范数意义下收敛于 x. 有时也把这种收敛简记为在 X 中 $x_n \to x$.

定义 1.1.9 称序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是线性赋范空间 X 中一基本序列(或称为 Cauchy 序列), 如果

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n;X\| = 0.$$

易证每一个收敛序列是基本序列, 反之一般不成立. 如果对于线性赋范空间 X 中任一基本序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 总存在一个元素 $x \in X$, 使得 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 中强收敛于 x, 则称 X 为一完备的线性赋范空间, 或称其为 Banach 空间.

定义 1.1.10 线性赋范空间 X 称为可分的, 如果存在可列集 $M \subset X$ ($M \subset X$ 表示 X 包含集合 M), 且 M 在 X 中稠密, 即对 X 中任一元素 x, 可在 M 中找到元素序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, 它在 X 的范数意义下收敛于 x.

定义 1.1.11 设 $n \in \mathbb{N}$($\mathbb{N}$ 是所有正整数集合) 和 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 n 个线性赋范空间. $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ 是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的笛卡儿乘积, X 中的元素 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$, 其中 $f_i \in X_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 元素 f 的范数可以由下式之一定义:

$$\|f;X\| = \left(\sum_{i=1}^{n} \|f_i;X_i\|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leqslant p < \infty,$$

或

$$\|f;X\| = \max_{i=1,2,\cdots,n} \|f_i;X_i\|,$$

则 X 也是线性赋范空间, 并称其为 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的乘积空间.

易证以上两种范数是等价的. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是可分的线性赋范空间, 则乘积空间 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 也是可分的线性赋范空间. 如果 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是 Banach 空间, 那么乘积空间 $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ 也是 Banach 空间.

1.1.4　Hilbert 空间

定义 1.1.12　如果集合 H 满足下列五类条件, 则称 H 为 Hilbert 空间.

(1) H 为线性空间, 数乘运算中的数可取复数.

(2) H 中的任意一对有序元素 x,y 有唯一的复数与之对应, 此数称为 x 和 y 的内积, 记为 (x,y), 并满足以下条件:

(i) $(x,y)=\overline{(y,x)}$, 其中 $\bar{a}$ 表示 a 的共轭复数, 所以 (x,x) 是实数;

(ii) $(x_1+x_2,y)=(x_1,y)+(x_2,y)$;

(iii) $(ax,y)=a(x,y)$, $a\in\mathbb{C}$ ($\mathbb{C}=\mathbb{C}^1$ 为复平面);

(iv) $(x,x)\geqslant 0$, 而且 $(x,x)=0$, 当且仅当 $x=\theta$.

实数 $\sqrt{(x,x)}$ 称为元素 x 在 H 中的范数, 记为 $\|x;H\|$. 容易证明此范数满足定义 1.1.6 中的范数公理.

(3) H 在其范数意义下是 Banach 空间.

(4) 对于任意正整数 n, 在空间 H 中可以找出 n 个线性无关的元素.

(5) H 是可分的.

引理 1.1.1(Cauchy-Schwarz 不等式)　设 H 为一 Hilbert 空间, 则有

$$|(x,y)|\leqslant \|x;H\|\|y;H\|, \quad \forall x,y\in H,$$

其中等号成立当且仅当 x 与 y 线性相关.

1.2　线性算子与线性泛函

1.2.1　线性算子

定义 1.2.1　设 X,Y 是两个线性赋范空间, M 为 X 中的一集合. 又设给定一法则: 由每一个 $x\in M$ 在 Y 中唯一对应一个确定的元素, 记此元素为 Lx, 且称此法则在 M 上定义了一算子 L. 集合 M 称为算子 L 的定义域, 记为 $D(L)$, 集合

$$R(L)=\{y\in Y|\ y=Lx,\ \forall x\in M\}$$

称为算子 L 的值域.

定义 1.2.2 设 X,Y 是两个线性赋范空间, M 为 X 中的一集合. $L: M \mapsto Y$ 是一算子. 如果对所有的 $x, y \in M$, 当 $x \neq y$ 时, 有 $Lx \neq Ly$, 则对每一个 $\overline{y} \in R(L)$ 依据法则 $Lx = \overline{y}$ 确定唯一的元素 $x \in M$, 记为 $x = L^{-1}\overline{y}$, 并称 L^{-1} 为 L 的逆算子, 且有 $D(L^{-1}) = R(L)$, $R(L^{-1}) = D(L) = M$.

定义 1.2.3 设 X,Y 是两个线性赋范空间. 由 X 到 Y 的算子 L 称为线性算子, 如果 $D(L)$ 是线性集合并满足下列两条件

(1) 可加性:

$$L(ax+by) = aLx + bLy, \quad \forall x, y \in D(L), \quad \forall a, b \in \mathbb{R};$$

(2) 连续性: 由 X 到 Y 的算子 L 称为在 $x \in D(L)$ 是连续的, 如果 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D(L)$, 且在 X 中 $x_n \to x$, 就在 Y 中成立

$$Lx_n \to Lx.$$

定义 1.2.4 设 X,Y 是两个线性赋范空间, 称线性算子 $L: X \mapsto Y$ 是有界的, 如果存在常数 $K > 0$, 使得 $\|Lx; Y\| \leqslant K\|x; X\|$, $\forall x \in X$.

定理 1.2.1 设 X,Y 是两个线性赋范空间. 在算子 $L: X \mapsto Y$ 满足可加性的条件下, 算子 L 是连续的, 当且仅当 L 有界.

定理 1.2.2 设 X,Y 是两个线性赋范空间, L 是定义在 X 的子空间 E 上, 而值域包含在 Y 中的满足可加性的算子, 则 L 有界的充要条件是 L 将 E 中的任一有界集映成 Y 中的有界集.

定义 1.2.5 设 X,Y 是两个线性赋范空间, 用 $\mathscr{L}(X,Y)$ 表示一切由 X 到 Y 的线性算子的全体, 并规定

$$\|L\| = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq \theta}} \frac{\|Lx; Y\|}{\|x; X\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x; X\| = 1}} \|Lx; Y\|$$

为 $L \in \mathscr{L}(X,Y)$ 的范数 (所谓算子的范数).

定义 1.2.6 设 X,Y 是两个线性赋范空间. 而 L 是映 X 到 Y 中的一个算子. 算子 L 称为紧的, 如果当 M 在 X 中有界时, L 将 M 映为 Y 的准紧集. 如果 L 连续而且是紧的算子, 那么 L 是全连续的.

定义 1.2.7 两个线性赋范空间 X,Y 称为同构的, 如果存在一线性算子 L, 使得 $D(L) = X$, $R(L) = Y$ 和存在线性逆算子 L^{-1}. 这个算子 L 称为同构映射或简称 X 与 Y 之间同构.

定义 1.2.8 两个线性赋范空间 X,Y 称为等距同构, 如果存在一线性算子 L, 使得 $D(L) = X$, $R(L) = Y$ 和对每一对 $x, y \in X$, 有