21世纪高等医学院校
学习指南系列

（第2版）

医用物理学学习指南

主编 张立平 田春华 薛俭雷

医用物理学
学习指南

Yiyongwulixue Xuexi Zhinan

21世纪高等医学院校学习指南系列

人民军医出版社
PEOPLE'S MILITARY MEDICAL PRESS
第二军医大学出版社
Second Military Medical University Press

21世纪高等医学院校学习指南系列

医用物理学学习指南

(第2版)

主　编　张立平　田春华　薛俭雷

编　者　(以姓氏笔画为序)

万永刚　王晓东　田春华

张立平　金　成　耿　魁

薛俭雷

人民軍醫出版社
PEOPLE'S MILITARY MEDICAL PRESS

第二军医大学出版社
Second Military Medical University Press

内容简介

本书是根据21世纪高等学校规划教材《医用物理学》(北京邮电大学出版社)而编写的辅助用书。

全书共13章,内容包括医用力学基础,流体的运动,液体的表面现象,振动、波动和超声波,静电场,电路,稳恒磁场,波动光学,几何光学和眼光学,量子力学基础,激光及其医学应用,X射线,原子核物理和核磁共振成像。本书最大特点是内容既广泛又精练,所附习题都是学习中必须掌握知识要点、难点,并附有答案。

本书适合高等医学院校各专业学生使用,也可作为相关工作者的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

医用物理学学习指南/张立平,田春华,薛俭雷主编. --2版. —上海:第二军医大学出版社,2012.9
ISBN 978-7-5481-0248-9

Ⅰ. ①医… Ⅱ. ①张… ②田… ③薛… Ⅲ. ①医用物理学—医学院校—教学参考资料 Ⅳ. ①R312

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第207557号

出版人 陆小新
责任编辑 崔雪娟 高 标

医用物理学学习指南(第2版)
主编 张立平 田春华 薛俭雷
第二军医大学出版社出版发行
http://www.smmup.cn
上海市翔殷路800号 邮政编码:200433
发行科电话/传真:021-65493093
全国各地新华书店经销
江苏句容排印厂印刷
开本:787×1 092 1/16 印张:14.5 字数:278千字
2012年9月第2版 2012年9月第1次印刷
ISBN 978-7-5481-0248-9/R·1047
定价:36.00元

前　　言

医用物理学是医学院校本科各专业的必修课，由于课时少、课程难度大等原因，学生学习这门课程时普遍感到比较吃力，教师也感到可参考的指导书太少，所以我们编写了《医学物理学学习指南》(第1版)。随着教材内容的更新和教学时数的调整，原指南已经不能适应现在的教学需要，因此我们编写了这本学习指南。本书以北京邮电大学出版社出版的《医用物理学》为母本，各章内容包括“本章知识要点”、“解题指导——典型例题”、“课后训练”及“习题答案”四个部分。其中“本章知识要点”是对教材相应章节的重点知识进行归纳总结，本书对该部分进行了重新的整合，使其与学生所用教材保持一致；“解题指导——典型例题”是选取和相应章节知识相关的例题进行详细解答，便于学生熟悉习题的解法；“课后训练”是为强化学生对知识的理解而提供的部分习题；“习题答案”是应学生自主学习的需要而重新编写的部分。

本书定稿工作虽然慎之又慎，但由于编者水平有限，缺点和错误之处在所难免，恳请读者和同仁不吝指正，以便今后进一步改正和完善。

编　者
2012年7月

目　　录

第一章　医用力学基础

一、本章知识要点

（一）刚体的定轴转动

1. **刚体**(rigid body)　在任何力的作用下形状和大小都不发生改变的物体。如物体在力的作用下形状和大小的改变可以忽略，就可以将其视为刚体。

2. **定轴转动**(fixed-axis rotation)　转动物体各质量微元的圆心都在一条固定不动的直线上，这条直线叫转轴，这样的运动叫定轴转动。转动是刚体的基本运动形式之一，刚体的一般运动都可分解为平动和转动。

3. **角位移**(angular displacement)　刚体绕定轴转动时，刚体上某一垂直于转轴并与转轴相交的直线，在 Δt 时间内转过的角度 $\Delta\theta$ 称为角位移。

4. **角速度**(angular velocity)　是描述刚体转动快慢的物理量。刚体在单位时间内的角位移称为角速度，用 ω 表示。

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

5. **角加速度**(angular acceleration)　单位时间内的角速度的改变量。

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

角位移、角速度、角加速度都是矢量，其方向用右手螺旋法则判定。

6. **角量**　以角度为基础来衡量转动情况的物理量（如角位移、角速度、角加速度统称为角量）。

7. **线量**　以线度为基础来衡量运动情况的物理量（如位移、速度、加速度统称为线量）。

8. **离转轴的距离为 r 的质点的角量与线量的关系为**

$$位移：\mathrm{d}s = r\mathrm{d}\theta$$

速度：$v=r\omega$

加速度：$a_\tau=r\alpha \quad a_n=r\omega^2$

9. 刚体做匀变速转动时各个角量之间的关系($t=0,\omega=\omega_0,\theta=\theta_0$)

(1) 角加速度：$\alpha=\text{constant}$

(2) 角速度：$\omega=\omega_0+\alpha t$

(3) 角位移：$\Delta\theta=\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

(4) 角位置：$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\alpha t^2$

10. 转动惯量(moment of inertia) 转动物体的动能，其值等于组成物体的各个质点的动能的总和，即：

$$E_k=\frac{1}{2}(\sum_{i=1}^{n}m_ir_i^2)\omega^2=\frac{1}{2}J\omega^2$$

其中 J 称为转动惯量。

11. 转动惯量的计算 转动惯量是刚体转动惯性的量度，如果刚体是质量连续分布的，刚体的转动惯量为：

$$J=\int r^2\mathrm{d}m=\int r^2\rho\mathrm{d}V$$

决定转动惯量大小的因素：①质量的大小；②质量分布情况(即刚体的形状大小和各部分的密度)；③转轴的位置。

12. 转动定律(law of rotation) 转动物体的角加速度 α 与作用的力矩 M 成正比，与物体的转动惯量 J 成反比，即：

$$M=J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=J\alpha$$

13. 质点的角动量(angular moment) 设质点绕定点 O 旋动，某瞬时的动量 mV 对于点 O 的矩，定义为质点对于点 O 的角动量，用 L 表示，即：

$$\vec{L}=\vec{r}\times m\vec{V}$$

14. 质点系的角动量 质点系对某点 O 的角动量，等于各质点对同一点 O 的角动量的矢量和，即：

$$\vec{L}=\sum_{i=1}^{n}\vec{r}_i\times m\vec{V}_i$$

15. 绕定轴转动刚体对定轴的角动量 $L=\sum_{i=1}^{n}r_i\times mV_i=(\sum_{i=1}^{n}mr_i^2)\omega=J\omega$

16. **角动量守恒定律**(law of conservation angular momentum)　封闭系统中的内力矩不改变系统的总角动量(或刚体所受的合外力矩等于零时,其角动量保持不变),即:$\sum L_i$=恒矢量。

17. **旋进**　高速旋转的物体的自转轴以角速度(Ω)绕竖直轴转动的现象叫进动(precession),也称为旋进。在重力场中陀螺旋进的角速度为:

$$\Omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{mgl}{L} = \frac{mgl}{J\omega}$$

式中:J 是陀螺的转动惯量;进动角速度 Ω 与 θ 无关,而与自旋角动量 L 成反比。

(二) 物体的弹性

1. **形变**(deformation)　物体在外力作用下所发生的形状和大小的改变称为形变。形变的种类:长度改变、体积改变和形状改变。

2. **弹性形变**(elastic deformation)　在一定形变限度内,去掉外力后物体能够完全恢复原状,这种形变称为弹性形变。

3. **范(塑)性形变**(plastic deformation)　外力超过某一限度后,去掉外力后物体不再能完全恢复原状,这种形变称为范(塑)性形变。

4. **应变**(strain)　物体受外力作用时,其长度、形状或体积发生的相对变化叫应变。

5. **张应变**(tensile strain)　物体受到外力作用时,发生的长度变化 Δl 和物体原来长度 l_0 的比值称为张应变,用 ε 示。

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

6. **体应变**(volume strain)　物体受到压力作用时体积发生变化而形状不变,则体积变化 ΔV 与原体积 V_0 之比称为体应变,用 θ 表示。

$$\theta = \frac{\Delta V}{V_0}$$

7. **切应变**(shearing strain)　物体受剪切力作用,只发生形状变化而没有体积变化,若设两底面相对偏移距离为 Δx,垂直距离为 d,则剪切的程度以比值 $\frac{\Delta x}{d}$ 来衡量,这一比值称为切应变,用 γ 表示。

$$\gamma = \frac{\Delta x}{d} = tg\varphi$$

说明:①液体无形状变化的弹性,只有体积变化的弹性,但固体两种弹性都有,这

是区别液体和固体的标准之一;②应变是无量纲(无单位)的物理量。它们只是相对地表示形变的程度,而与原来的长度、体积、形状无关。

8. **应变率**(strain rate) 应变随时间的变化率,即单位时间内增加或减少的应变称为应变率,它描述的是变形速率,其单位为 s^{-1}。

9. **应力**(stress) 作用在物体内单位截面上的弹性力(内力),它反映物体发生形变时的内力情况。应力的种类:张应力、体应力、切应力。

10. **张应力**(tensile stress) 在张应变的情况下,物体内部的任一横截面上单位面积上的力称为张应力,用 σ 表示。

$$\sigma = \frac{F}{S}$$

某一点的张应力为:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$$

如果物体两端受到的不是拉力而是压力,物体的长度缩短,张应力此时为负值,也可称为压应力(compressive stress)。

11. **体应力**(volmne stress) 当物体受到来自各个方面的均匀压力,且物体是各向同性时,可发生体积变化。此时物体内部各个方向的截面上都有同样大小的压应力,或者说具有同样的压强,因此体应力可以用压强 P 表示。

12. **切应力**(shearing stress) 当发生切应变时,物体上下两个界面受到与界面平行但方向相反的剪切力的作用。剪切力 F 与截面 S 之比称为切应力,用 τ 表示。

$$\tau = \frac{F}{S}$$

某一点的切应力为:

$$\tau = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{dF}{dS}$$

说明:①与截面正交的应力叫正应力,如张应力、压应力。②与截面平行的应力称为切应力。③如果应力的方向和截面成某一角度,则称其为全应力;全应力可分解为正应力和切应力。

13. **弹性**(elastic) 在一定形变限度内,去掉外力后物体能够完全恢复变形的特性称为弹性。

14. **塑性**(plasticity) 外力除去后变形不能恢复的特性称为塑性。

15. **应力-应变关系曲线** 应力与应变之间的函数曲线称为应力-应变关系曲线。

16. **正比例极限**(proportional limit) 在应力-应变关系曲线上,当应力达到该点之

前应力与应变成正比，超过该点之后，应力与应变将不成正比例，这一点称为正比例极限。

17. **弹性极限(elastic limit)**　当应变达到一定值时除去外力后，材料刚好能恢复原状，这一点称为弹性极限。

18. **断裂点(fracture point)**　当应力达到某点时，材料断裂，这一点称为断裂点。断裂点的应力称为材料的抗张强度(tensile strength)。压缩时，断裂点的应力称为抗压强度(compressive strength)。

19. **弹性模量(modulus of elasticity)**　应力与应变之比值称为该物体的弹性模量。

20. **杨氏模量(Young's modulus)**　材料在受到张应力或压应力作用时，在正比极限范围内，张应力与张应变之比或压应力与压应变之比称为杨氏模量，用 E 表示。

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{F/S}{\Delta l/l_0}=\frac{l_0F}{S\Delta l}$$

21. **体变模量(bulk modulus)**　在体积形变中，压强与体应变的比值称为体变模量，以符号 K 表示。

$$K=\frac{-P}{\theta}=-\frac{P}{\Delta V/V_0}=-V_0\frac{P}{\Delta V}$$

式中：负号表示体积缩小时压强是增加的；体变模量的倒数称为压缩率(compressbility)，记为 k。

$$k=\frac{1}{K}=-\frac{\Delta V}{PV_0}$$

22. **切变模量(shear modulus)**　在剪切情况下，在一定弹性范围内，切应力与切应变成正比。切应力与切应变之比值称为切变模量，用 G 表示。

$$G=\frac{\tau}{\gamma}=\frac{F/S}{\varphi}=\frac{Fd}{S\Delta x}$$

弹性模量表示物体变形的难易程度，弹性模量越大，物体越不容易变形。当物体受力较小时，应力与应变成正比，比例系数——弹性模量为常量；当物体受力较大时，应力与应变表现为非线性关系，弹性模量与变形有关(不为常量)，而这样的物体称为非线性弹性体。

(三) 骨骼和肌肉的力学性质

1. **骨骼的力学性质**　骨骼是典型的非线性弹性体。与一般的金属材料不同，骨骼具有各向异性的力学性质，即在不同方向载荷作用下表现出不同的力学性能。骨骼的变形、破坏与其受力方式有关。人体的骨骼受不同方式的力或力矩作用时会有不同的

力学变化。根据外力和外力矩的方向，将骨骼的受力分为拉伸、压缩、剪切、弯曲、扭转。作用于人体骨骼上的载荷往往是上述几种载荷的复合作用。

2. **肌肉的力学特性**　与一般材料特性不同，肌肉收缩时产生的内部拉力(一般称张力)变化主要依赖于肌节内结构的变化，在肌节处于休息长度时(2 μm 左右)张力最大，但当肌节长度达到 3.6 μm 后，主动张力却变为零。肌纤维具有主动收缩性，整块肌肉伸缩时的张力应为主动张力与被动张力之和。肌肉生理横截面的增加会导致肌肉收缩力的增加，但不会影响肌肉收缩速度。

二、解题指导——典型例题

例 1-1　一汽车沿 x 轴运动，其速度为 $v=10+4t^2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，当 $t=0$ 时，汽车在原点右 20 m 处，求：(1) $t=4$ s 时物体的加速度；(2) 在上述时刻物体的位置。

已知：$v=10+4t^2\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$，当 $t=0$ 时，$x=20$ m；**求**：(1) $t=4$ s 时，$a=?$ (2) $t=4$ s 时，$x=?$

解：(1) 加速度 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}(10+4t^2)}{\mathrm{d}t}=8t\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$

当 $t=4$ s 时，$a=8\times4=32\ (\mathrm{m\cdot s^{-2}})$

(2) 因为 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，所以 $\mathrm{d}x=v\mathrm{d}t=(10+4t^2)\mathrm{d}t$

积分可得：$x=\displaystyle\int(10+4t^2)\mathrm{d}t=10t+\frac{4}{3}t^3+C$

当 $t=4$ s 时，$x=20$ m，代入上式得：$C=20$

所以，$x=10t+\dfrac{4}{3}t^3+20$

当 $t=4$ s 时，$x=145.3$ m

答：$t=4$ s 时物体的加速度为 $32\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$，此时刻物体的距原点 145.3 m。

例 1-2　质点沿 x 轴运动，加速度和速度的关系是：$a=-kv$。式中 k 为常量，$t=0$ 时，$x=x_0$，$v=v_0$。求质点的运动方程。

已知：$a=-kv$，当 $t=0$ 时，$x=x_0$，$v=v_0$；**求**：运动方程 $x=?$

解：由 $a=\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$，分离变量积分有：$\displaystyle\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{v}=\int_0^t-k\mathrm{d}t$；积分得：$v=v_0e^{-kt}$

又由 $v=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，有：$\displaystyle\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t v_0e^{-kt}\mathrm{d}t$

完成积分就得运动方程：$x=x_0+\dfrac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$

答：质点的运动方程为 $x=x_0+\dfrac{v_0}{k}(1-e^{-kt})$。

例 1-3　如图 1-1 所示，物体 1 和 2 的质量分别为 m_1 与 m_2，滑轮的转动惯量为 J，半径为 r。

(1) 如物体 2 与桌面间的摩擦系数为 μ，求系统的加速度 a 及绳中的张力 T_1 和 T_2（设绳子与滑轮间无相对滑动，滑轮与转轴无摩擦）。

(2) 如物体 2 与桌面间为光滑接触，求系统的加速度 a 及绳中的张力 T_1 和 T_2。

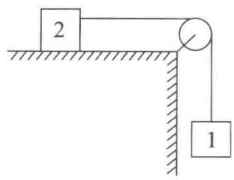

图 1-1

已知：m_1, m_2, J, r；**求**：(1) 物体 2 与桌面间的摩擦系数为 μ 时，$a=?$，$T_1=?$，$T_2=?$ (2) 当 $\mu=0$ 时，$a=?$，$T_1=?$，$T_2=?$

解：(1) 用隔离体法，分别画出三个物体的受力图，如图 1-2-a、1-2-b、1-2-c 所示。

对物体 1，在竖直方向应用牛顿运动定律：$T_1-mg=m_1(-a)$

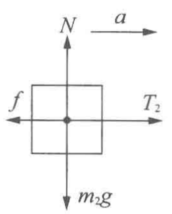

图 1-2-a

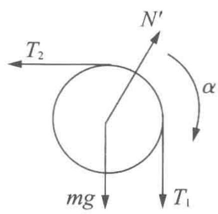

图 1-2-b

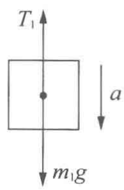

图 1-2-c

对物体 2，在水平方向和竖直方向分别应用牛顿运动定律：

$$T_2-\mu N=m_2 a$$

$$N-m_2 g=0$$

对滑轮，应用转动定律：$T_2 r-T_1 r=J(-\alpha)$

并利用关系：$a=r\alpha$，由以上各式，解得：

$$a=\frac{m_1-\mu m_2}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}\cdot g$$

$$T_1=\frac{m_2+\mu m_2+\frac{J}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}\cdot m_1 g$$

$$T_2=\frac{m_1+\mu m_1+\mu\frac{J}{r^2}}{m_1+m_2+\frac{J}{r^2}}\cdot m_2 g$$

(2) $\mu=0$ 时：$a=\dfrac{m_1}{m_1+m_2+\dfrac{J}{r^2}}\cdot g=\dfrac{m_1 r^2 g}{m_1 r^2+m_2 r^2+J}$

$$T_1=\frac{m_2+\dfrac{J}{r^2}}{m_1+m_2+\dfrac{J}{r^2}}\cdot m_1 g=\frac{(m_2 r^2+J)m_1 g}{m_1 r^2+m_2 r^2+J}$$

$$T_2=\frac{m_1}{m_1+m_2+\dfrac{J}{r^2}}\cdot m_2 g=\frac{m_1 m_2 r^2 g}{m_1 r^2+m_2 r^2+J}$$

答：略。

例 1-4　电风扇开启电源时，经 t_1 时间达到额定转速 ω_0，关闭电源时经时间 t_2 停止。设电风扇的转动惯量为 J，且电机的电磁力矩与摩擦力矩为恒量。求：电机的电磁力矩。

已知：t_1,ω_0,t_2,J；**求：**$M=?$

解：设电风扇的电磁力矩、摩擦力矩分别为 M、M_f 且恒定，电风扇开启时受电磁力矩与摩擦力矩的作用，即：$M-M_f=J\alpha_1$

当电风扇达到额定转速时：$\omega_0=\alpha_1 t_1$

电风扇关闭过程中，只受到摩擦力矩的作用，即：$-M_f=J\alpha_2$

达到停止时：$\omega_0+\alpha_2 t_2=0$

解此联立方程组得：$M=J\omega_0\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\right)$

答：电机的电磁力矩为 $J\omega_0\left(\dfrac{1}{t_1}+\dfrac{1}{t_2}\right)$。

例 1-5　一质量为 m、半径为 R 的均匀质量圆盘绕通过盘心且垂直于盘面的光滑轴以 ω_0 的角速度转动。现将盘置于粗糙的水平桌面上，圆盘与桌面间的摩擦系数为 μ。求圆盘经过多少时间、转几圈将停下来。

已知：m,R,ω_0,μ；**求：**$t=?,N=?$

解：摩擦力是分布在整个盘面上的，如图 1-3 所示。计算摩擦力的力矩时，应将圆盘分为无限多个半径为 r、宽为 $\mathrm{d}r$ 的圆环积分。故摩擦力矩为：

$$M=\int_0^R-\mu g r\frac{m}{\pi R^2}2\pi r\,\mathrm{d}r=-\frac{2}{3}\mu m g R$$

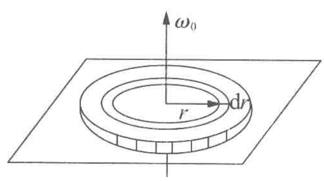

图 1-3

设 ω_0 的方向为正方向：$J=\dfrac{1}{2}mR^2$

于是得：$\alpha=\frac{M}{J}=-\frac{4\mu g}{3R}$，由：$\omega=\omega_0+\alpha t=0$

得：$t=-\frac{\omega_0}{\alpha}=\frac{3R\omega_0}{4\mu g}$

又由 $\omega^2-\omega_0^2=2\alpha\Delta\theta$，停下来时 $\omega=0$，所以停下来前转过的圈数为：

$$N=\frac{\Delta\theta}{2\pi}=-\frac{\omega_0^2}{4\pi\alpha}=\frac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g}$$

答：圆盘经$\frac{3R\omega_0}{4\mu g}$秒时间、转$\frac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g}$圈将停下来。

例 1-6　如图 1-4 所示，线密度为 ρ，质量为 m 的均匀细杆与转轴（y 轴）的夹角为 α，求其转动惯量。

已知：ρ,m,α；**求：**$J=?$

解：在杆上 l 处任取微元 dm，显然，d$m=\rho$dl。

而细杆的总长度：$l_0=\frac{m}{\rho}$，于是由：$J=\int_V r^2\mathrm{d}m$ 得：

$$J=\int_V r^2\mathrm{d}m=\int_0^{l_0}(l\sin\alpha)^2\rho\mathrm{d}l=\frac{1}{3}\rho l_0^3\sin^2\alpha=\frac{1}{3}ml_0^2\sin^2\alpha$$

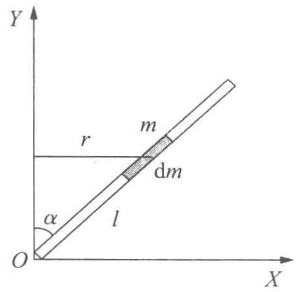

图 1-4

答：其转动惯量为 $\frac{1}{3}ml_0^2\sin^2\alpha$。

例 1-7　如图 1-5 所示，质量为 M、长为 l 的均匀直棒，可绕垂直于棒的一端的水平轴 O 无摩擦地转动。它原来静止在平衡位置上，现有一质量为 m 的弹性小球飞来，正好在棒的下端与棒垂直地相撞。相撞后，使棒从平衡位置处摆动到最大角度 $\theta=30°$处。(1) 这碰撞设为弹性碰撞，试计算小球初速 v_0 的值。(2) 相撞时，小球受到多大的冲量？

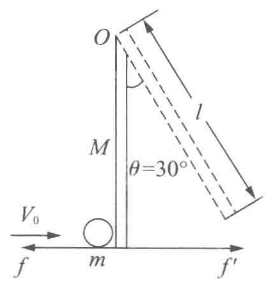

图 1-5

已知：$M,l,m,\theta=30°$；**求：**$v_0=?,I=?$

解：设碰后小球速度为 v，棒转速为 ω，因为弹性碰撞，所以：

$$\frac{1}{2}mv_0{}^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}J\omega^2 \qquad (1)$$

又因为系统合外力矩为 0，

所以角动量守恒：　$mv_0l=mvl+J\omega$　(2)

碰后机械能守恒，所以：　$\frac{1}{2}J\omega^2=Mg(1-\cos30°)$　(3)

$$J=\frac{1}{3}Ml^2 \qquad (4)$$

由(3)(4)得：$\omega=\sqrt{\dfrac{3g\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)}{l}}$

代入(1) (2)得：$v_0=\dfrac{\sqrt{6(2-\sqrt{3})}}{12}\dfrac{3m+M}{m}\sqrt{gl}$

方法一：所以 $v=v_0-\dfrac{J\omega}{ml}=\dfrac{6m-2M}{12m}\sqrt{3\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)gl}$

故：$I=\int_{t_1}^{t_2}f\mathrm{d}t=mv-mv_0=-M\dfrac{\sqrt{3\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)gl}}{3}$

方法二：利用牛顿第三定律来做：

$$\int_{t_1}^{t_2}M\mathrm{d}t=J\omega\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}f'\cdot l\mathrm{d}t=l\int_{t_1}^{t_2}f'\cdot\mathrm{d}t=J\omega\Rightarrow\int_{t_1}^{t_2}f'\cdot\mathrm{d}t=\frac{J\omega}{l}$$

因为：
$$f=-f'$$

所以：
$$I=\int_{t_1}^{t_2}f\mathrm{d}t=-\int_{t_1}^{t_2}f'\cdot\mathrm{d}t=-\frac{J\omega}{l}=-M\frac{\sqrt{3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)gl}}{3}$$

答：小球初速 v_0 的值为 $\dfrac{6m-2M}{12m}\sqrt{3\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)gl}$；相撞时，小球受到的冲量为 $M\dfrac{\sqrt{3\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)gl}}{3}$。

例 1-8 已知铅的密度为 $11.3\times10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，其极限强度为 $2\times10^7\ \mathrm{kg\cdot m^{-2}}$，应悬多长一根铅丝，其本身的重量就足以使它拉断？

已知：$\rho=11.3\times10^3\ \mathrm{kg\cdot m^{-3}}$，$\sigma=2\times10^7\ \mathrm{kg\cdot m^{-2}}$，**求**：$L=?$

解：设铅丝的长度为 L，横截面积为 S，则铅丝所受的最大拉力等于该段铅丝的重力，

即：$F=mg=LS\rho g$

因为：$\sigma=\dfrac{F}{S}=\dfrac{LS\rho g}{S}=L\rho g$

所以：$L=\dfrac{\sigma}{\rho g}=180\ \mathrm{m}$

答：所悬铅丝的长度为 180 m 时其本身的重量就足以使它拉断。

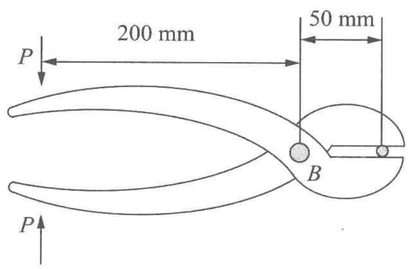

图 1-6

例 1-9 如图 1-6 所示，用夹剪剪断直径为3 mm的铅丝。若铅丝的剪切极限应力为