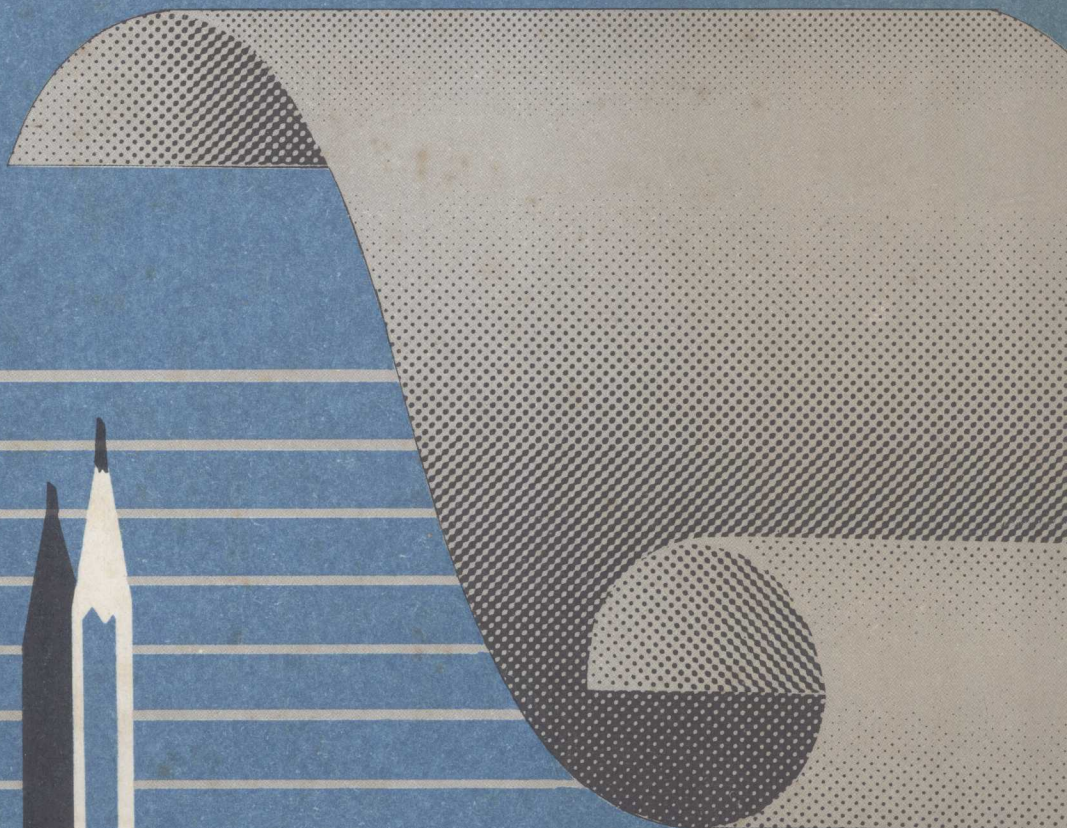


数学分册(下)

北京大学附属中学数学教研组 编写

北京大学出版社

北京大学附属中学高三学生用书



• 北京大学附属中学高三学生用书

数 学 分 册

(下 册)

北京大学附属中学数学教研组 编写

北 京 大 学 出 版 社

新登字(京)159号

图书在版编目(CIP)数据

数学分册(下)/北京大学附属中学数学教研组编写. —北京:北京大学出版社, 1993.9

北京大学附属中学高三学生用书

ISBN 7-301-02332-4

I. 数…

II. 北…

III. 数学-高中-学生用书

IV. G633.6

出版者地址: 北京大学校内(邮政编码: 100871)

排印者: 北京大学印刷厂

发行者: 北京大学出版社

经销者: 新华书店

版本记录: 787 × 1092毫米 16开本 13.875印张 346千字

1993年9月第一版 1993年9月第一次印刷

印数: 00001—8,000册

定 价: 7.50元

前 言

多年来,我们一直为没有一套比较理想的高三年级学生用书而感到遗憾。因此,我校高三教师一般都只能自己编写讲义或提纲印发给学生,学生也只能将教师在课堂上讲授的内容记在笔记本上,以备课下复习时使用。这样,不仅加重了师生双方的负担,同时也严重地影响了课堂教学效率的提高。从1977年起,我校各教研组的老师们在高三年级的教学实践中不断地进行探索,总结和积累了丰富的资料和经验,逐渐形成了一套具有北大附中特色的传统教案。目前,把这些教案用教材的形式相对固定下来的条件已经成熟。为此,我们在北京大学出版社的协助下,编写了这套《北京大学附属中学高三学生用书》,以便在今后若干年内,供我校高三年级使用。

这套学生用书目前共包括数学、语文、物理、化学、英语5个学科(共6分册),是我校教师在长期教学实践中积累起来的丰富的教学经验的结晶,充分体现了北大附中的办学指导思想,即“打好基础,培养能力,发展个性,提高素质。”我们认为:“打好基础”和“培养能力”两者是相辅相成、不可分割的。如果没有坚实的基础,所谓的“能力”只能是空中楼阁。往往有些同学在遇到问题时,会出现“一看就会,一做就错”这样一种眼高手低的毛病,就是因为他们基础打得不扎实的缘故。但是要真正打好基础,又不能单纯靠死记硬背,靠题海战术,“大运动量”训练来达到,这样获得的知识 and 训练出来的技能是不可能融会贯通和运用自如的。只有在教学过程中注意培养学生的学习能力,让他们在教材和教师的引导、启发下,通过研究、讨论,自己形成概念或自行探索出问题的结论,从而获得知识,提高能力。这样才能使学生对基础知识理解得更透彻,掌握得更牢固,运用得更自如。我们的这套学生用书就是以“在打好坚实基础的前提下提高学生的能力,通过提高学生的学习能力来使他们基础打得更扎实”这一辩证的教学思想为指导来编写的。

参加本套图书编写工作的有:数学特级教师陈剑刚,高级教师孙曾彪、董世奎、朱传渝、张宁、邓均;语文特级教师李裕德,高级教师吴祖兴、李学敏、张文敏;物理特级教师陈育林,高级教师刘宝振、林承慧、丁敬忠、迟永昌;化学高级教师刘石文、陶琅、刘建真、黄丽光、刘雅颜、张莺;英语一级教师孟学军、杨小洋等同志。

我们希望,这套学生用书的出版,不仅适时地为我校高三学生提供了教材,而且能为广大高三同学所欢迎,从而为其殷切期望提高自己学习能力和水平贡献出我们一点微薄的力量。由于编写时间仓促,难免有疏漏之处,恳切期望读者和专家们批评指正。

北京大学附属中学

1993年8月

编者说明

为了我校高中毕业班数学总复习的需要,以提高课堂教学质量,帮助师生加深理解教学内容;为了帮助各界青年提高复习效果与质量,我们编写了这套教材。本教材共分四个部分:代数、立体几何、平面三角、平面解析几何,分成上、下两册书出版。

这套教材是在我校多年来高中数学教学与毕业总复习的实践基础上汇编、补充、整理而成,力求能反映我们对毕业总复习的教学指导思想与经验体会。根据教学大纲、全国统编教材与考试大纲的要求,根据我校的教学实际,组织编写本套教材。既立足于基础知识与基本方法的训练,又注意培养学生的分析问题与解决问题的能力;既强调知识的系统性,又突出总结分析问题的规律与解题方法;有利于学生与各界青年利用总复习的机会,既全面系统地复习基础知识与基本方法,又能在分析问题与解决问题的能力上得到考察与锻炼,便于读者在复习过程中总结与提高。

为了扩大学生的知识面与解题思路,这套教材的内容,在全国统编教材的基础上作了不少补充与引伸。在内容编排上,没有按照教科书上的顺序,而是按照初等数学的中心内容编排,有利于在总复习中突出课题的主题,有利于学生对所学知识的前后呼应与融会贯通。对内容较深、要求较高的课题,或超出考试大纲要求的内容,用*标出,供读者选读或参考。

这套教材的基础知识部分,大部分采取填空形式或问题形式,让学生课前预习,供其他读者思考与自测,并在教材上也可做必要的笔答,教师在课堂上除做必要的核对外,把精力集中在重点讲授上。我们在教材上编了号码,在每章后面汇集注解,读者可翻阅核对。这套教材的例题部分,不给出解题过程,让学生课前思考,教师在课堂上可加强提问、启发与重点分析或组织课堂讨论,最后作出总结。在每章后面汇集例题精解,给出题意分析、主要解题过程与答案。这套教材的练习部分,在每章后面汇集练习答案,对部分练习还做必要的提示。

这套教材是在平时教学实践的基础上,反复修改与补充,分工执笔编写。参加执笔编写的有陈剑刚、孙曾彪、董世奎、朱传渝、张宁、邓均等同志,教研组的其他同志提供了不少意见与素材。

这套教材是根据我校教学实际编写的,供我校高中毕业班使用,同时也提供给各兄弟学校与广大读者阅读与参考。根据编写这套教材的指导思想与特点,更适用于在总复习的第一阶段内使用。这套教材还会有错误与不足之处,请广大读者多提宝贵意见,我们可再作修改与补充,并向各位读者致以谢意。

北京大学附属中学数学教研组

1993年8月

目 录

平 面 三 角

第一章 角和三角函数的概念	(1)
一、弧度制	(1)
二、角	(1)
三、三角函数的定义	(2)
四、单位圆和三角函数线	(4)
五、最简单的三角不等式与不等式组的解法	(5)
注解、例题精解、练习答案与提示	(6)
第二章 三角函数的恒等变形	(13)
一、同角三角函数关系	(13)
二、诱导公式	(14)
三、两角和两角差的三角函数	(15)
四、倍角公式	(16)
五、倍角公式的半角形式	(16)
六、半角公式	(16)
七、三倍角公式	(17)
八、 $15^\circ, 75^\circ, 105^\circ$ 和 $22^\circ 30'$ 的三角函数值	(17)
九、和差化积公式	(18)
十、积化和差公式	(19)
十一、不查表求值	(20)
十二、化简	(20)
十三、恒等式的证明	(21)
十四、条件等式的证明	(22)
十五、有关三角形内的恒等变形	(23)
十六、一些三角不等式的证明	(26)
注解、例题精解、练习答案与提示	(26)
第三章 三角函数的图像与性质	(54)
一、正弦函数和余弦函数的图像与性质	(54)
二、正切函数和余切函数的图像与性质	(55)
三、周期函数	(56)
四、形如 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ 的函数	(57)
五、形如 $y = a \sin x + b \cos x$ 这类函数的周期、最大值和最小值	(59)
六、一些三角函数式的最大值和最小值	(59)

注解、例题精解、练习答案与提示	(61)
第四章 反三角函数和三角方程	(74)
一、反三角函数的定义	(74)
二、有关反三角函数的一些恒等式	(74)
三、化简 $\arcsin(\sin x)$, $\arcsin(\cos x)$ 等一类三角函数的反三角函数式	(74)
四、求反三角函数的三角函数值	(76)
五、反三角函数的和(差)	(77)
六、反三角函数的图像与性质	(78)
七、三角方程	(81)
八、有关的不等式、不等式组	(82)
注解、例题精解、练习答案与提示	(83)
第五章 解三角形	(99)
一、解直角三角形	(99)
二、解斜三角形	(99)
三、求三角形的面积和一些常用线段	(100)
四、解三角形的应用问题	(101)
注解、例题精解、练习答案与提示	(103)

平面解析几何

第一章 基础知识	(106)
一、平面直角坐标系中点的坐标	(106)
二、两点间的距离公式	(106)
三、定比分点	(106)
四、面积公式	(108)
五、坐标轴的平移	(109)
六、解析法	(109)
注解、例题精解、练习答案与提示	(110)
第二章 直线方程	(115)
一、直线的倾角、斜率和截距	(115)
二、直线方程的各种形式	(115)
三、直线方程的确定	(116)
四、直线方程的应用	(117)
五、对称问题	(118)
六、定点问题	(118)
注解、例题精解、练习答案与提示	(120)
第三章 圆	(127)
一、圆的定义	(127)
二、圆的方程	(127)
三、圆的方程的应用	(127)

四、圆的方程的确定	(128)
注解、例题精解、练习答案与提示	(130)
第四章 椭圆、双曲线、抛物线的定义、方程及性质	(135)
一、定义	(135)
二、二次曲线的固有性质	(135)
三、定义、图像、方程及性质	(136)
四、曲线方程的确定	(137)
注解、例题精解、练习答案与提示	(139)
第五章 参数方程和极坐标	(146)
一、参数方程	(146)
1. 参数方程的概念	(146)
2. 直线的参数方程	(146)
3. 二次曲线的参数方程	(147)
4. 参普互化及其等价性	(148)
二、极坐标	(151)
1. 极坐标系	(151)
2. 极坐标方程的确定	(151)
3. 极坐标方程的简单应用	(153)
4. 等速螺线方程	(154)
注解、例题精解、练习答案与提示	(156)
第六章 曲线方程的应用	(164)
一、根据曲线方程研究曲线自身的固有性质	(164)
二、点和圆锥曲线位置关系的判定方法	(164)
三、直线和圆锥曲线的位置关系	(164)
四、直线与曲线、曲线与曲线的交点	(165)
五、特殊弦和弦长的求法	(166)
六、证明题	(168)
七、最值问题	(170)
八、含参数的问题	(172)
注解、例题精解、练习答案与提示	(175)
第七章 曲线与方程	(198)
一、轨迹、曲线的方程	(198)
二、轨迹问题的分类与解题规律	(198)
1. 单动点轨迹	(198)
2. 多动点轨迹	(199)
注解、例题精解、练习答案与提示	(205)

平面三角

第一章 角和三角函数的概念

一、弧度制

1. 怎样的角叫做 1 弧度的角? [1]

2. 半径为 R 的圆中, 弧长为 L 的弧所对的圆心角的弧度数 $\theta =$ [2] (其中 $\theta > 0$).

3. 扇形的半径为 R , 圆心角的弧度数是 θ , 则这个扇形的弧长 $L =$ [3], 面积 $S =$ [4], 周长 $L =$ [5].

4. 弧度制与角度制的换算:

$180^\circ =$ [6] 弧度, $1^\circ =$ [7] 弧度.

1 弧度 = _____ 度 $\approx$ _____ 度, 即 _____ 度 _____ 分. [8]

练习 1.1

1 计算:

$0^\circ =$ _____ 弧度, $90^\circ =$ _____ 弧度, $270^\circ =$ _____ 弧度,

$360^\circ =$ _____ 弧度, $30^\circ =$ _____ 弧度, $45^\circ =$ _____ 弧度,

$60^\circ =$ _____ 弧度, $75^\circ =$ _____ 弧度, $22.5^\circ =$ _____ 弧度,

$43^\circ =$ _____ 弧度 $\approx$ _____ 弧度 (精确到四位有效数字),

2.5 弧度 $\approx$ _____ 度 _____ 分.

2 正五边形的每一个外角是 _____ 弧度; 正八边形的每一个内角是 _____ 弧度; 正十七边形的每一个内角是 _____ 弧度.

3 圆锥的母线长是它的底面半径的 3 倍, 求它侧面展开图的扇形中心角的弧度数.

二、角

1. 角是怎样形成的? 什么叫角的顶点? 什么叫角的始边? 什么叫角的终边? [9]
通常我们规定怎样的角是正角? 怎样的角是负角? 怎样的角是零角? [10]

2. 终边相同的角:

(1) 怎样的角叫做终边相同的角? 写出与角 α 终边相同的一切角的集合. [11]

(2) 若角的顶点在原点, 始边在 x 轴的正半轴上, 那么:

① 终边在 x 轴正半轴上的角的集合 (用角度制表示) 是 [12];

② 终边在 x 轴上的角的集合 (用弧度制表示) 是 [13];

- ③ 终边在 y 轴负半轴上的角的集合(用弧度制表示)是 [14] ;
 ④ 终边在 y 轴上的角的集合(用角度制表示)是 [15] ;
 ⑤ 终边在坐标轴上的角的集合(用弧度制表示)是 [16] .

3. 象限角:

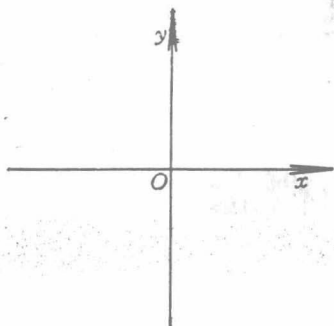


图 1-1

(1) 怎样的角叫做第二象限的角? [17]

(2) 若集合 $A = \{\text{第二象限的角}\}$, 集合 $B = \left\{ \alpha \mid \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \right\}$, 则集合 A, B 有怎样的关系? [18]

(3) 用弧度制写出第四象限角的集合. [19]

(4) 若 α 是第四象限的角, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是哪个象限的角? 在平面直角坐标系中(图1-1)画出 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的区域. [20]

练习 1.2

- π 的偶数倍怎样表示? π 的奇数倍怎样表示? π 的整数倍怎样表示?
- 集合 $A = \{\beta \mid \beta = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{\beta \mid \beta = 2(k+1)\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$, $C = \{\gamma \mid \gamma = 2(k-1)\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$, 集合 A, B, C 相同吗?
- 集合 $A = \{x \mid x = 2k\pi + (2\pi - \alpha), k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = 2k\pi - \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$, 集合 A, B 相同吗?
- 集合 $A = \left\{ \beta \mid \beta = 2k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, $B = \left\{ \beta \mid \beta = 4k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, $C = \left\{ \beta \mid \beta = k\pi + \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$, 集合 A, B, C 相同吗? 为什么? 它们之间有怎样的关系?
- 集合 $A = \{x \mid x = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}\} \cup \{y \mid y = 2k\pi + (\pi + \alpha), k \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{x \mid x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$, 集合 A, B 相同吗?
- 若角的顶点在原点, 始边在 x 轴的正半轴上, 用弧度制分别表示下列角的集合.
 - 终边在第一象限和第三象限的角平分线上的角的集合.
 - 终边在第二象限和第四象限的角平分线上的角的集合.
 - 终边不属于任何象限的角的集合.

三、三角函数的定义

1. 锐角三角函数的直角三角形定义:

(1) 设锐角 α 的顶点为 A , 在角的任意一边上任取一点 B , 过 B 作 BC 垂直角的另一边于 C , 得到一个直角三角形(图1-2), 我们把 AB 叫斜边, BC 叫 $\angle \alpha$ 的对边, AC 叫 $\angle \alpha$ 的邻边. 则:

$$\angle \alpha \text{ 的正弦 } \sin \alpha = \frac{(\text{对})\text{边}}{(\text{斜})\text{边}},$$

$$\angle \alpha \text{ 的余弦 } \cos \alpha = \frac{(\text{邻})\text{边}}{(\text{斜})\text{边}},$$

$$\angle \alpha \text{ 的正切 } \operatorname{tg} \alpha = \frac{(\text{对})\text{边}}{(\text{邻})\text{边}},$$

$$\angle \alpha \text{ 的余切 } \operatorname{ctg} \alpha = \frac{(\text{邻})\text{边}}{(\text{对})\text{边}},$$

$\angle \alpha$ 的正割 $\sec \alpha = \frac{(\quad)\text{边}}{(\quad)\text{边}}$,

$\angle \alpha$ 的余割 $\csc \alpha = \frac{(\quad)\text{边}}{(\quad)\text{边}}$.

(2) 比较 $\angle \alpha$ 的各三角函数的定义: [21]

正弦和正切有什么共同点?

余弦和余切有什么共同点?

正弦和余弦有什么共同点?

正切和余切有什么共同点?

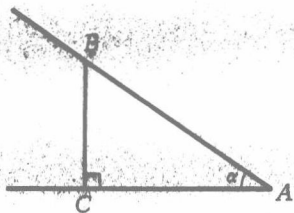


图 1-2

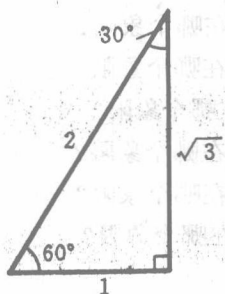


图 1-3

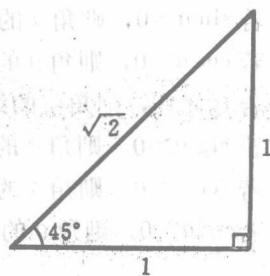


图 1-4

(3) 由画出的求 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ 角的各三角函数值的两个直角三角形(图1-3和图1-4), 求出这些三角函数的值:

① $\sin 30^\circ = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \cos 30^\circ = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \operatorname{tg} 30^\circ = \underline{\hspace{1cm}},$

$\operatorname{ctg} 30^\circ = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \sec 30^\circ = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \csc 30^\circ = \underline{\hspace{1cm}}.$

② $\sin 60^\circ = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \cos 60^\circ = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \underline{\hspace{1cm}},$

$\operatorname{ctg} 60^\circ = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \sec 60^\circ = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \csc 60^\circ = \underline{\hspace{1cm}}.$

③ $\sin 45^\circ = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \cos 45^\circ = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \underline{\hspace{1cm}},$

$\operatorname{ctg} 45^\circ = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \sec 45^\circ = \underline{\hspace{1cm}}, \quad \csc 45^\circ = \underline{\hspace{1cm}}.$

2. 任意角三角函数的坐标法定义:

(1) 以 $\angle \alpha$ 的顶点为原点, $\angle \alpha$ 的始边为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系. 在 $\angle \alpha$ 的终边上任取一点 P , 设点

P 的坐标为 (x, y) , OP 的长为 r (显然 $r = \underline{\hspace{1cm}}$) (图1-

5), 则:

$\sin \alpha = \frac{(\quad)}{(\quad)}, \quad \cos \alpha = \frac{(\quad)}{(\quad)},$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{(\quad)}{(\quad)}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{(\quad)}{(\quad)},$

$\sec \alpha = \frac{(\quad)}{(\quad)}, \quad \csc \alpha = \frac{(\quad)}{(\quad)}.$

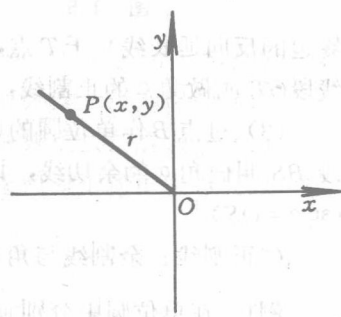


图 1-5

(2) 这个定义与锐角三角函数的直角三角形定义有何联系? [23]

3. 三角函数值的正负:

(1) 当角 α 的终边在第一象限时, 它的哪些三角函数值是正的? [24]

(2) 当角 α 的终边在第二象限时, 它的哪些三角函数的值是正的? [25]

(3) 当角 α 的终边在第三象限时, 它的哪些三角函数的值是正的? [26]

(4) 当角 α 的终边在第四象限时, 它的哪些三角函数的值是正的? [27]

练习 1.3

- 1 在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, $\angle C = \text{Rt}\angle$, $\angle B = \theta$, $AC = a$, $CD \perp AB$ 于 D , 用 θ 的三角函数分别表示出 AB, BC, CD, BD .
- 2 在平面直角坐标系 XOY 中, 以原点 O 为顶点, OX 轴正向为始边的角 α 终边上一点的坐标为 $P(1 - \sqrt{3}, -1 - \sqrt{3})$, 用任意角三角函数的定义分别求出 $\angle \alpha$ 的六个三角函数值.
- 3 若 $\sin \alpha > 0$, 则角 α 的终边在哪个象限?
若 $\cos \alpha > 0$, 则角 α 的终边在哪个象限?
若 $\tan \alpha > 0$, 则角 α 的终边在哪个象限?
若 $\cot \alpha > 0$, 则角 α 的终边在哪个象限?
若 $\sec \alpha > 0$, 则角 α 的终边在哪个象限?
若 $\csc \alpha > 0$, 则角 α 的终边在哪个象限?

四、单位圆和三角函数线

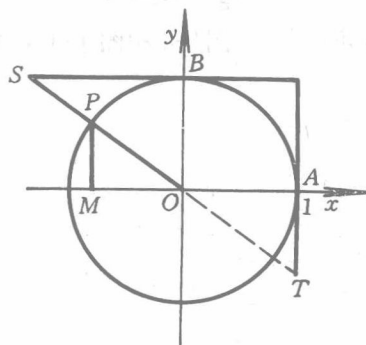


图 1-6

1. 三角函数线的定义: 以角 α 的顶点为原点, 始边为 x 轴正向, 建立平面直角坐标系, 并以原点为圆心, 单位长 1 为半径作单位圆. 设单位圆与 x 轴正向交于 A 点, 与 y 轴正向交于 B 点, 与角 α 的终边交于 P 点 (图1-6).

(1) 过点 P 作 PM 垂直 x 轴于 M , 有向线段 MP 叫做角 α 的正弦线, 记作: $\sin \alpha = MP$. 有向线段 OM 叫做角 α 的余弦线, 记作: $\cos \alpha = OM$.

(2) 过点 A 作单位圆的切线, 交角 α 的终边 (或者终边的反向延长线) 于 T 点, 有向线段 AT 叫做角 α 的正切线, 记作: $\tan \alpha = AT$. (*有向线段 OT 叫做角 α 的正割线, 记作: $\sec \alpha = OT$)

(3) 过点 B 作单位圆的切线, 交角 α 的终边 (或者终边的反向延长线) 于 S 点, 有向线段 BS 叫做角 α 的余切线, 记作: $\cot \alpha = BS$. (*有向线段 OS 叫做角 α 的余割线, 记作: $\csc \alpha = OS$)

(*正割线、余割线与角 α 的终边方向一致时为正, 相反时为负)

例1 在单位圆中分别画出 $\frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, -\frac{2\pi}{3}$ 各角的三角函数线.

2. 将三角函数值填入表1.1, 并说明它们是怎样求出来的. [28]

表 1.1

	0°	90°	180°	270°	360°
正 弦					
余 弦					
正 切					
余 切					

3. 利用单位圆和三角函数线讨论当角 α 从 0 变到 2π 时, α 的各三角函数值增减变化的情况, 并填入表 1.2 中(增加填 “ $\nearrow$ ”, 减小填 “ $\searrow$ ”).

表 1.2

	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	π	$\rightarrow$	$\frac{3\pi}{2}$	$\rightarrow$	2π
正 弦	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0				
余 弦									
正 切									
余 切									

例2 在单位圆中, 画出适合下列条件的角 α 的终边.

(1) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$;

(2) $\sin \alpha = -\frac{3}{4}$;

(3) $\operatorname{tg} \alpha = 2$;

(4) $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{3}{2}$.

五、最简单的三角不等式与不等式组的解法

例3 在单位圆中画出适合下列条件的角 α 的终边所在的区域, 并根据画出的图写出角 α 的取值范围.

(1) $\sin \alpha > \frac{1}{2}$;

(2) $\cos \alpha \leq \frac{1}{2}$;

(3) $\cos \alpha > \frac{1}{2}$;

(4) $\sin \alpha \leq \frac{1}{2}$;

(5) $\operatorname{ctg} \alpha > -1$;

(6) $\operatorname{ctg} \alpha \leq -\sqrt{3}$;

(7) $\operatorname{tg} \alpha > -1$;

(8) $\operatorname{tg} \alpha \leq \sqrt{3}$;

(9) $|\sin \alpha| < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

(10) $|\operatorname{ctg} \alpha| \geq 1$.

例4 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{1 - \operatorname{tg} x}$;

(2) $y = \lg \sqrt{1 + 2\sin x}$.

例5 在单位圆中画出满足条件

$$\begin{cases} \sin \alpha \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \operatorname{tg} \alpha \geq \frac{\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

的角 α 的终边所在的区域, 并写出角 α 的

取值范围.

练 习 1.4

1 分别在单位圆中画出下列各角的三角函数线.

(1) $\frac{2}{3}\pi$;

(2) $\frac{7}{4}\pi$;

(3) $-\frac{11}{6}\pi$;

(4) $-\frac{5}{6}\pi$.

2 分别在单位圆中画出适合下列条件的角 α 的终边。

$$(1) \cos \alpha = -\frac{2}{3}; \quad (2) \operatorname{tg} \alpha = -3; \quad (3) \sin \alpha = \frac{4}{5}; \quad (4) \operatorname{ctg} \alpha = \frac{4}{3}.$$

3 利用单位圆和三角函数线, 解下列不等式和不等式组。

$$(1) \sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (2) \cos x \geq -\frac{1}{2}; \quad (3) \operatorname{tg} x \geq -\sqrt{3};$$

$$(4) \operatorname{ctg} x \geq \sqrt{3}; \quad (5) |\cos x| < \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad (6) |\operatorname{tg} x| \geq 1;$$

$$(7) |\operatorname{ctg} x| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad (8) \begin{cases} \sin x \leq \frac{1}{2}; \\ \cos x \geq \frac{1}{2}; \end{cases} \quad (9) \begin{cases} \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \cos x \geq -\frac{\sqrt{3}}{2}; \end{cases} \quad (11) \begin{cases} \sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \operatorname{tg} x \leq 1; \end{cases} \quad (12) \begin{cases} \cos x \geq -\frac{1}{2}; \\ \operatorname{tg} x \leq -1; \end{cases}$$

$$(13) \begin{cases} \cos x \geq \frac{1}{2}; \\ \operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}; \end{cases} \quad (14) \begin{cases} \cos x \geq -\frac{1}{2}; \\ \operatorname{ctg} x \leq 1; \end{cases} \quad (15) \begin{cases} \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}; \\ \operatorname{ctg} x \geq -1. \end{cases}$$

注解、例题精解、练习答案与提示

【注解】

一、[1] 圆弧的长度等于半径时, 这条圆弧所对的圆心角叫作 1 弧度的角 [2] $\theta = \frac{L}{R}$

$$[3] L = R\theta \quad [4] S = \frac{1}{2}R^2\theta \quad [5] L = R(2 + \theta) \quad [6] \pi \quad [7] \frac{\pi}{180} \quad [8] \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx (57.30)^\circ, \\ \text{即 } 57^\circ 18'$$

二、[9] 在平面内, 由一条射线绕着它的端点旋转而成的几何图形。射线的端点叫角的顶点, 旋转开始的射线叫角的始边, 旋转终止时的射线叫角的终边 [10] 射线按逆时针方向旋转所形成的角叫做正角, 按顺时针方向旋转所形成的角叫做负角, 一条射线没有做任何旋转所形成的角叫零角 [11] 当两个角的顶点重合、始边重合时, 它们的终边也重合的角叫作终边相同的角。 $\{\beta | \beta = 2k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$, 或者写成 $\{\beta | \beta = k \cdot 360^\circ + \alpha, k \in \mathbb{Z}\}$ [12] $\{\alpha | \alpha = k \cdot 360^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ [13] $\{\alpha | \alpha = k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ [14] $\{\alpha | \alpha = 2k\pi - \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ [15] $\{\alpha | \alpha = 180^\circ \cdot k + 90^\circ, k \in \mathbb{Z}\}$ [16] $\{\alpha | \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ [17] 若角的顶点与平面直角坐标系的原点重合, 始边与 x 轴正向重合时, 角的终边在第二象限的角叫作第二象限的角 [18] $A \supset B$ [19] $\{\alpha | 2k\pi$

$+\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2(k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}$ }. 或者写作 $\{\alpha | 2k\pi - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ [20] $\frac{\alpha}{2}$ 是第二或

者第四象限的角, $\because 2k\pi + \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2k\pi + 2\pi, \therefore k\pi + \frac{3\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < k\pi + \pi$. 当 $k = 2n$ 时, $2n\pi$

$+\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi + \pi$; 当 $k = 2n - 1$ 时, $2n\pi - \frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} < 2n\pi$. ($k \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$)

三、[21]正弦和正切都以对边为比的前项, 余弦和余切都以邻边为比的前项; 正弦和余弦都以斜边为比的后项; 正切和余切都是两直角边的比 [22] $y = \sqrt{x^2 + y^2}$ [23] 当角 α 是锐角时, 这个定义与锐角三角函数的直角三角形定义是一致的, 终边上一点 P 的横坐标 x 就相当于角 α 的邻边, 纵坐标 y 就相当于角 α 的对边, $|OP|$ 就相当于斜边 [24] 正弦、余弦、正切、余切、正割、余割的值均为正的 [25] 正弦和余割值为正的 [26] 正切和余切值为正的 [27] 余弦和正割值为正的

四、[28] 利用三角函数的坐标法定义。例如设 270° 角的终边上任意一点的坐标为 $P(0, -m)$, (其中 $m > 0$), $|OP| = m, \therefore \sin 270^\circ = \frac{-m}{m} = -1, \cos 270^\circ = \frac{0}{m} = 0, \operatorname{tg} 270^\circ$ 不存在, $\operatorname{ctg} 270^\circ = \frac{0}{-m} = 0$

【例题精解】

例 1: 如图 1-7, 1-8, 1-9, 1-10.

$$\sin \frac{\pi}{3} = MP, \quad \cos \frac{\pi}{3} = OM,$$

$$\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = AT, \quad \operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} = BS,$$

$$*\sec \frac{\pi}{3} = OT, \quad *csc \frac{\pi}{3} = OS.$$

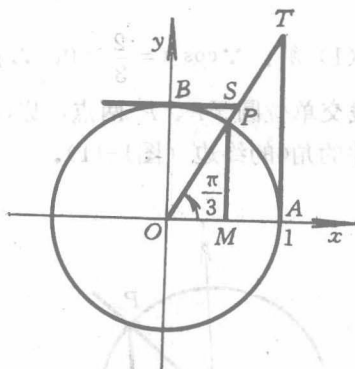


图 1-7

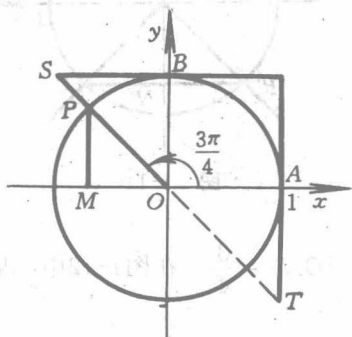


图 1-8

$$\sin \frac{3\pi}{4} = MP, \quad \cos \frac{3\pi}{4} = OM,$$

$$\operatorname{tg} \frac{3\pi}{4} = AT, \quad \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} = BS,$$

$$*\sec \frac{3\pi}{4} = OT, \quad *csc \frac{3\pi}{4} = OS.$$

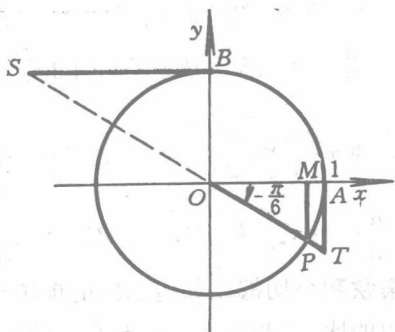


图 1-9

$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = MP, \quad \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = OM,$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = AT, \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right) = BS,$$

$$*\sec\left(-\frac{\pi}{6}\right) = OT, \quad *csc\left(-\frac{\pi}{6}\right) = OS.$$

$$\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = MP, \quad \cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = OM,$$

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = AT, \quad \operatorname{ctg}\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = BS,$$

$$*\sec\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = OT, \quad *csc\left(-\frac{2}{3}\pi\right) = OS.$$

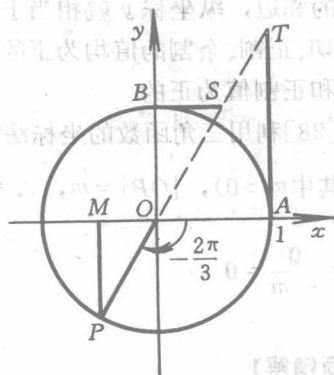


图 1-10

例2 (1) 解: $\because \cos \alpha = \frac{2}{3} > 0$, $\therefore$ 在 x 轴的正半轴上截取 OM , 使得 $|OM| = \frac{2}{3}$. 过 M 作 x 轴垂线交单位圆于 P 、 P' 两点, 以 O 为端点, 分别过 P 和 P' 点作射线. 则射线 OP 和 OP' 为适合的角 α 的终边 (图1-11).

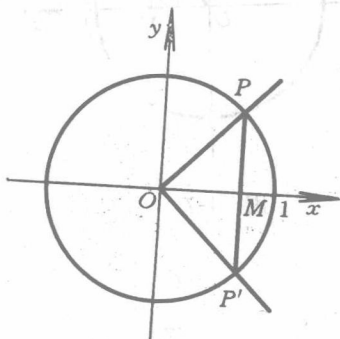


图 1-11

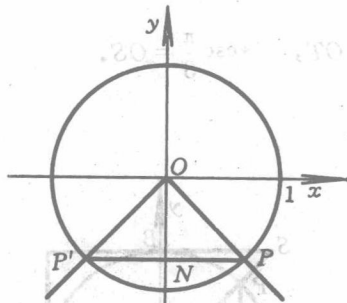


图 1-12

(2) 类似(1)的方法, 在 y 轴的负半轴上, 截取 $|ON| = \frac{3}{4}$, 在图1-12中, 射线 OP' 和 OP 为所求.

(3) 解: $\because \operatorname{tg} \alpha = 2 > 0$, $\therefore$ 过点 $A(1,0)$ 作单位圆的切线, 在其上取一点 T , 使有向线段

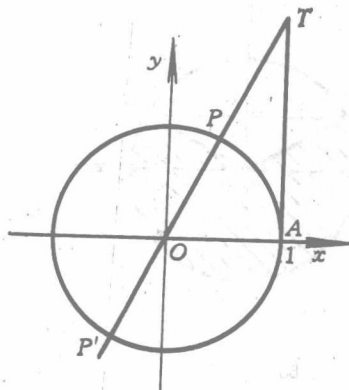


图 1-13

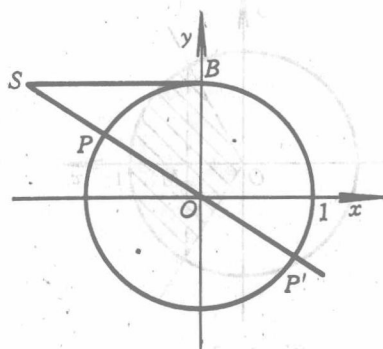


图 1-14

$AT=2$, 以 O 为端点, 过 T 作射线 OT 交单位圆于 P , 其反向延长线交单位圆于 P' 点, 则射线 OP 和 OP' 为适合条件的角 α 的终边 (图1-13)。

(4) 类似(3)的方法, 在过点 B 的切线上取点 S , 使有向线段 $BS = -\frac{3}{2}$, 在图1-14中, 射线 OP 和 OP' 为所求。

例3 (1) 解: 如图1-15,

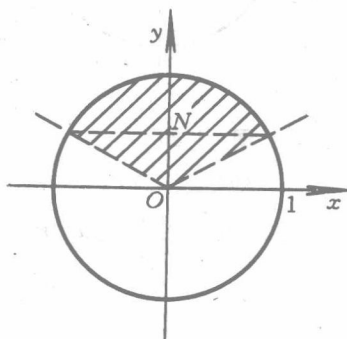


图 1-15

$$(ON = \frac{1}{2})$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{\pi}{6} < \alpha < 2k\pi + \frac{5\pi}{6}.$$

(k 是整数, 以下各题答案中 k 均为整数。)

(3) 解: 如图1-17,

$$\therefore 2k\pi - \frac{\pi}{3} < \alpha < 2k\pi + \frac{\pi}{3}.$$

(5) 解: 如图1-19,

(2) 解: 如图1-16,

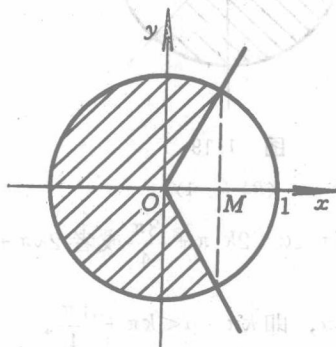


图 1-16

$$(OM = \frac{1}{2})$$

$$\therefore 2k\pi + \frac{\pi}{3} \leq \alpha \leq 2k\pi + \frac{5\pi}{3}.$$

(4) 解: 如图1-18,

$$\therefore 2k\pi - \frac{7\pi}{6} \leq \alpha \leq 2k\pi + \frac{\pi}{6}.$$

(6) 解: 如图1-20,