



“十二五”国家重点图书出版规划项目

INERTIAL SENSOR AND APPLICATION

惯性器件及应用

● 刘繁明 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



“十二五”国家重点图书出版规划项目

INERTIAL SENSOR AND APPLICATION

惯性器件及应用

● 刘繁明 编著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书全面系统地阐述了惯性元器件的工作原理、动力学规律及与其相关的测试技术,主要内容涉及经典转子陀螺仪、摆式加速度计等传统惯性元器件的动力学分析和结构介绍,以及现代的光学陀螺仪、振动陀螺仪、微机电陀螺仪和加速度计的工作原理、信号处理、测试方法及其最新发展等问题;介绍了惯性元器件在航海、航空等领域的应用方案、系统构成等方面的相关技术。

本书可作为高等院校惯性技术专业的高年级本科生和研究生的教材,也可供从事惯性技术研究与应用系统开发的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

惯性器件及应用/刘繁明编著. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2013.6
ISBN 978-7-5603-3960-3

I. ①惯… II. ①刘… III. ①惯性元件—研究
IV. ①TN965

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 005624 号

策划编辑 王桂芝 贾学斌

责任编辑 范业婷

封面设计 高永利

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451-86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂

开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 12.75 字数 295 千字

版 次 2013 年 6 月第 1 版 2013 年 6 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5603-3960-3

定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

惯性技术是一种典型的国防关键技术和重要的军民两用技术,其重要意义是它在导航与控制技术领域的应用。以惯性器件为核心的惯性仪表与系统可以实现水上和水下、陆地和空中的运载体的方位测量与控制。由于惯性系统具有高度隐蔽、高度自主的特点,使其成为各类大、中型现代化武器和武器平台最为优先考虑的系统。最近 20 年来,随着各种中、小型武器及许多民用设备对惯性装置的需求不断扩大,惯性技术走上了全面、均衡、持续发展的道路,在微机电、系统集成、多信息组合等传统及融合技术上有了重大突破,器件品种不断增多,成本逐步下降,应用范围迅速扩大。惯性器件的概念已从以牛顿力学为理论基础的机械式器件扩展到以流体力学为理论基础的射流式器件和以 Sagnac 效应为理论基础的光学式器件,并且还在向超导、粒子等更多的学科和技术领域拓展。

本书结合作者近十几年来从事惯性技术教学、科研的体会和经验,向读者介绍惯性系统的基础元件——陀螺仪和加速度计的基本力学原理、类型及测试应用等方面的知识,具体内容如下:

第 1 章为刚体定点转动的力学基础,主要介绍定点转动刚体的位置、速度表示及其基本动力学规律,为后续学习经典的转子陀螺仪及惯性系统的力学规律奠定基础。

第 2 章为加速度的测量与加速度计,在说明加速度测量有关力学原理的基础上,主要介绍摆式加速度计、振梁加速度计和光纤加速度计等的工作原理及其结构和组成。

第 3 章为旋转质量陀螺仪及其运动微分方程,主要介绍自由陀螺仪的基本特性、旋转质量陀螺仪的运动方程、传递函数及典型输入下的响应特性、陀螺仪相对运动参考坐标系的运动等内容。

第 4 章为振动陀螺仪,重点介绍石英音叉陀螺仪、半球谐振陀螺仪及振动式硅微陀螺仪等典型振动陀螺仪的工作原理、基本结构、信号检测与处理方法等内容。

第 5 章为光学角速度敏感器,在介绍光学角速度敏感器的一般原理的基础上,重点介绍环形激光陀螺仪、干涉式光纤陀螺仪的基本结构、工作机理、关键技术、信号检测与处理等方面的内容,概述了无源谐振光学陀螺仪的基本思想。

第 6 章为惯性器件的测试与标定,简要描述了惯性器件测试的过程与设备,重点介绍摆式加速度计和单自由度陀螺仪的误差模型及其测试与数据处理方法,概述了激光陀螺仪的测试过程和实验方法。

第 7 章为惯性器件的应用,简要介绍了自由陀螺、垂直陀螺、方位陀螺、陀螺稳定平台、惯性导航系统等惯性系统的应用方案和实现方法。

本书得到哈尔滨工程大学研究生教材建设专项资金(2010 年)、哈尔滨市科技创新人才研究专项资金(RC2006QN009030)及 2011 年黑龙江省精品图书出版工程专项资金的资助,在此表示感谢。

本书可作为高等院校惯性技术相关专业的高年级本科生和研究生的教材,也可作为从事惯性技术研究与应用系统开发的工程技术人员的参考资料。

作 者

2013 年 3 月

目 录

第 1 章 刚体定点转动的力学基础	1
1.1 刚体的角位置与角速度描述方法	1
1.2 常用坐标系	10
1.3 刚体定点转动的一般原理	14
第 2 章 加速度的测量与加速度计	37
2.1 加速度测量的力学原理	37
2.2 摆式加速度计	43
2.3 振梁(弦)式加速度计	56
2.4 光纤加速度计	59
第 3 章 旋转质量陀螺仪及其运动微分方程	63
3.1 旋转质量陀螺仪的基本特性	63
3.2 双自由度陀螺仪的运动方程与动力学分析	70
3.3 单自由度陀螺仪的运动方程与动力学分析	91
第 4 章 振动陀螺仪	97
4.1 石英音叉陀螺仪工作原理及其结构与性能	98
4.2 半球谐振陀螺仪	104
4.3 其他典型振动陀螺仪	110
4.4 转动式多功能敏感器	112
第 5 章 光学角速度敏感器	114
5.1 光学角速度敏感器的一般原理	114
5.2 环形激光陀螺仪	119
5.3 干涉型光纤陀螺仪	133
5.4 无源谐振光学陀螺仪	141
第 6 章 惯性器件的测试与标定	145
6.1 惯性器件测试的过程与设备	145
6.2 加速度计的测试	147

6.3	单自由度陀螺仪的测试方法	149
6.4	陀螺漂移系数的分离与确定	154
6.5	双自由度陀螺的漂移测试	158
6.6	光学陀螺仪的测试	161
第7章	惯性器件的应用	163
7.1	自由陀螺的应用	163
7.2	垂直陀螺及其工作方式	166
7.3	方位陀螺及其工作方式	175
7.4	陀螺稳定平台	186
7.5	惯性导航系统	192
术语索引		196
参考文献		198

第 1 章 刚体定点转动的力学基础

刚体定点转动力学是研究和分析旋转质量陀螺仪运动特性的基础,本章将根据这些需要,介绍定点转动力学的相关基础知识。

1.1 刚体的角位置与角速度描述方法

如果有某些不为零的力或力系作用在一个系统的某些质点或所有质点上,并且对于任意时刻,两点之间的距离始终保持不变,则该系统称为刚体。对于固结在刚体上的坐标系而言,刚体上的点没有相对运动。因此,可以用该坐标系相对参考坐标系的位置和运动来描述刚体相对参考系的位置和运动,而这个固结在刚体上的坐标系称为刚体坐标系,简称刚体系。自然界中的物体或系统,在可以忽略外力作用变形的情况下,都可简化为刚体。

空间自由刚体具有三个平动自由度和三个转动自由度(即六自由度)。如果将刚体上的一点相对于参考坐标系固定,那么这个刚体将由于固定点的约束而只能绕该点转动,从而失去平动的自由,这就是所谓的定点转动刚体。当然,如果再固定一点,定点转动的刚体将进一步受到约束,只能做定轴转动(即绕两个固定点的连线转动)。如果再固定第三点,且三点不在一条直线上,刚体将完全失去运动的自由,因而称之为固定刚体。由此可见,刚体的位置和运动,可以用刚体上三个非共线的点的位置和运动来描述。

1.1.1 质点的位置矢量及其表示方法

如图 1.1 所示,假设参考系为直角坐标系 $Oxyz$,质点 P 的位置可以用矢量 $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$ 来表示,矢量 $\mathbf{r}$ 定义为质点 P 相对于参考坐标系原点 O 的位置矢量。

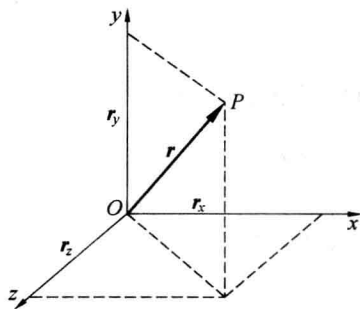


图 1.1 质点位置的矢量表示

显然,矢量 $\mathbf{r}$ 可以用其在坐标轴上的投影 r_x, r_y, r_z 及坐标系的单位矢量 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 来表

示,即

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{i} + r_y \mathbf{j} + r_z \mathbf{k} \quad (1.1)$$

式(1.1)称为质点 P 的位置矢量的单位矢量表达式,也称广义坐标表达式。

将表示 $\mathbf{r}$ 的三个分量 r_x, r_y, r_z 排列成 3×1 阶的列矩阵,可以得到位置矢量 $\mathbf{r}$ 的矩阵表达式为

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix} = [r_x \quad r_y \quad r_z]^T \quad (1.2)$$

注意,式(1.1)和式(1.2)虽然同样表示了 P 点相对于参考系原点的位置,但二者的数学意义却不同,它们分别服从矢量运算法则和矩阵运算法则。

我们知道, $\mathbf{r}$ 的三个投影分量 r_x, r_y, r_z 可以用矢量 $\mathbf{r}$ 的模 $|\mathbf{r}| = r$ 及 $\mathbf{r}$ 与三个坐标轴正方向夹角的余弦 $\cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{x}}), \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{y}}), \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{z}})$ 来表示,即

$$\begin{aligned} r_x &= r \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{x}}) \\ r_y &= r \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{y}}) \\ r_z &= r \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{z}}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

式(1.3)中的 $(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{x}}), (\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{y}}), (\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{z}})$ 分别表示矢量 $\mathbf{r}$ 与 Ox, Oy, Oz 轴正向的夹角,而 $\cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{x}}), \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{y}}), \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{z}})$ 则称为矢量 $\mathbf{r}$ 的方向余弦, r 是矢量 $\mathbf{r}$ 的模,所以

$$r^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 \quad (1.4)$$

由此可见,点 P 在参考坐标系中的相对位置可以用式(1.1)或式(1.2)中的三个参数 r_x, r_y, r_z 来表示;也可以用式(1.3)中的四个参数 $r, \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{x}}), \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{y}}), \cos(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{z}})$ 来表示。显然,前两者是三个完全独立的参数,而后者有四个参数,其中必有一个参数不独立,或者说这四个参数必然满足某个约束条件,即

$$\cos^2(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{x}}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{y}}) + \cos^2(\widehat{\mathbf{r}, \mathbf{z}}) = 1 \quad (1.5)$$

也就是 $\mathbf{r}$ 相对参考坐标系的三个方向余弦的平方和等于 1,因此可以说,三个方向余弦只有两个是完全独立的,式(1.5)是参数间的约束方程。

由以上分析可以看出,一个空间自由质点相对于参考系的位置可以用一个位置矢量来表示,而这个位置矢量可以用三个独立参数来表示,也可以用多于三个的不完全独立参数来表示,后者必须满足约束条件。

1.1.2 定点转动刚体角位置的广义坐标表示

前已述及,刚体的位置可以用刚体上三个非共线的点的位置来描述。因此,可以在刚体上任意选择三个不共线的点,并分别用矢量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 来确定其相对参考坐标系的位置。显然,这也就是刚体相对参考坐标系的位置。在参考坐标系中,矢量 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ 可以表示为

$$\begin{cases} \mathbf{r}_1 = r_{1x} \mathbf{i} + r_{1y} \mathbf{j} + r_{1z} \mathbf{k} \\ \mathbf{r}_2 = r_{2x} \mathbf{i} + r_{2y} \mathbf{j} + r_{2z} \mathbf{k} \\ \mathbf{r}_3 = r_{3x} \mathbf{i} + r_{3y} \mathbf{j} + r_{3z} \mathbf{k} \end{cases} \quad (1.6)$$

不难看出,自由刚体的空间位置可以用九个参数来确定。而实际上,由于刚体上任意两点间的距离不变,因此,这九个参数必然满足如下约束关系:

$$\begin{cases} (r_{1x} - r_{2x})^2 + (r_{1y} - r_{2y})^2 + (r_{1z} - r_{2z})^2 = C_1^2 \\ (r_{2x} - r_{3x})^2 + (r_{2y} - r_{3y})^2 + (r_{2z} - r_{3z})^2 = C_2^2 \\ (r_{3x} - r_{1x})^2 + (r_{3y} - r_{1y})^2 + (r_{3z} - r_{1z})^2 = C_3^2 \end{cases} \quad (1.7)$$

从式(1.7)可以看出,对于自由刚体,实际上只有 $9-3=6$ 个参数独立,这也就是前面提到的六自由度的含义。这六个自由度包括三个平动自由度和三个转动自由度。平动自由度反映刚体在参考坐标系中质心的位置变化,转动自由度则反映刚体相对参考坐标系的方位即角位置的变化,通常称为刚体的姿态角。

在研究旋转质量陀螺仪时,我们更感兴趣的是定点转动,即刚体上有一个点相对参考坐标系固定。不失一般性,假设固定点就是参考坐标系的原点,这时上述三个点就必然还要满足与原点距离保持不变的约束关系,即

$$\begin{cases} r_{1x}^2 + r_{1y}^2 + r_{1z}^2 = C_4^2 \\ r_{2x}^2 + r_{2y}^2 + r_{2z}^2 = C_5^2 \\ r_{3x}^2 + r_{3y}^2 + r_{3z}^2 = C_6^2 \end{cases} \quad (1.8)$$

可见,对于定点转动刚体,实际上只需 $9-3-3=3$ 个独立参数就可以描述其角位置在参考坐标系中的变化,它们反映了刚体在参考系中的方位,即姿态角。式(1.6)~(1.8)称为定点转动刚体角位置的广义坐标描述。

1.1.3 定点转动刚体角位置的方向余弦描述

设刚体绕定点 O 相对参考坐标系做定点转动,不失一般性,假定将上面讨论的三个点的位置按如下方式选择:位置向量 r_1, r_2, r_3 的方向相互正交,组成一个与参考坐标系 $Oxyz$ 共原点的坐标系 $Ox_b y_b z_b$ 。显然,坐标系 $Ox_b y_b z_b$ 就是刚体系。因此,可以用于描述定点转动刚体相对参考坐标系的角位置。确定刚体系三个轴的九个方向余弦,就可以确定刚体的角位置,这九个方向余弦列于表1.1中。

表 1.1 两个坐标系各轴之间的方向余弦

	x	y	z
x_b	$c_{11} = \cos(\widehat{x_b, x})$	$c_{12} = \cos(\widehat{x_b, y})$	$c_{13} = \cos(\widehat{x_b, z})$
y_b	$c_{21} = \cos(\widehat{y_b, x})$	$c_{22} = \cos(\widehat{y_b, y})$	$c_{23} = \cos(\widehat{y_b, z})$
z_b	$c_{31} = \cos(\widehat{z_b, x})$	$c_{32} = \cos(\widehat{z_b, y})$	$c_{33} = \cos(\widehat{z_b, z})$

写成矩阵的形式,并用大写字母 C 表示该矩阵,则

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

其中, c_{ij} 表示矩阵元素; $i, j = 1, 2, 3$ 。

这就是定点转动刚体角位置的方向余弦描述。容易理解, 对于刚体的一个角位置, 只有唯一的一个方向余弦矩阵, 反之亦然。所以, 我们称矩阵 C 为刚体的方向余弦矩阵。方向余弦矩阵可以实现坐标变换, 即把某一点或向量在一个坐标系中的坐标变换为另一坐标系中的坐标(这是导航系统中常用的基本方法之一)。

设矢量 r 的端点 M 在 $Ox_b y_b z_b$ 中的坐标为 (x_b, y_b, z_b) 而在 $Ox_n y_n z_n$ 中的坐标为 (x_n, y_n, z_n) , 于是很容易得到

$$\begin{cases} r = x_b i_b + y_b j_b + z_b k_b \\ r = x_n i_n + y_n j_n + z_n k_n \end{cases}$$

用方向余弦表示向量 r 在 $Ox_b y_b z_b$ 坐标系中的坐标, 则有

$$\begin{cases} x_b = x_n \cos(\widehat{x_b, x_n}) + y_n \cos(\widehat{x_b, y_n}) + z_n \cos(\widehat{x_b, z_n}) \\ y_b = x_n \cos(\widehat{y_b, x_n}) + y_n \cos(\widehat{y_b, y_n}) + z_n \cos(\widehat{y_b, z_n}) \\ z_b = x_n \cos(\widehat{z_b, x_n}) + y_n \cos(\widehat{z_b, y_n}) + z_n \cos(\widehat{z_b, z_n}) \end{cases}$$

写成矩阵形式, 则有

$$\begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

同样可以得到

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

容易看出, 对于任意确定点 M 或确定矢量 r 来说, 利用式(1.10)和式(1.11)就可以实现两个坐标系之间的坐标变换。

为简单起见, 我们用 n 代表坐标系 $Ox_n y_n z_n$, 用 b 代表坐标系 $Ox_b y_b z_b$, 并用下列记号代表相应的方向余弦矩阵, 即

$$C_n^b = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}; \quad C_b^n = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

将 C_n^b 称为由 n 系到 b 系的坐标转换矩阵; 而将 C_b^n 称为由 b 系到 n 系的坐标转换矩阵。

如果把 r 在 n 系中表示为 r^n , 在 b 系中表示为 r^b , 坐标变换就可以简写成

$$r^n = C_n^b r^b$$

同样

$$r^b = C_b^n r^n$$

上述两个坐标系之间的转换关系, 可推广到两个以上坐标系间的转换。如果矢量 r 在 $Ox_1 y_1 z_1$ 和 $Ox_2 y_2 z_2$ 之间的转换关系表示为

$$r^2 = C_1^2 r^1 \quad (1.13)$$

r 在 $Ox_2 y_2 z_2$ 和 $Ox_3 y_3 z_3$ 之间的转换关系可以写成

$$\mathbf{r}^3 = \mathbf{C}_2^3 \mathbf{r}^2 \quad (1.14)$$

将式(1.13)代入式(1.14),则有

$$\mathbf{r}^3 = \mathbf{C}_2^3 \mathbf{C}_1^2 \mathbf{r}^1$$

令

$$\mathbf{C}_1^3 = \mathbf{C}_2^3 \mathbf{C}_1^2 \quad (1.15)$$

于是可得到

$$\mathbf{r}^3 = \mathbf{C}_1^3 \mathbf{r}^1 \quad (1.16)$$

这就是矢量 $\mathbf{r}$ 相对 $Ox_3 y_3 z_3$ 和 $Ox_1 y_1 z_1$ 之间的转换关系,其转换矩阵为 $\mathbf{C}_1^3$ 。显然, $\mathbf{C}_1^3$ 可直接从 $Ox_3 y_3 z_3$ 和 $Ox_1 y_1 z_1$ 之间的九个方向余弦得到,也可利用式(1.15)通过中间矩阵得到,二者结果相同,而后者往往更方便。

推广到一般情况,对任意两个坐标系之间的转换关系,可以通过一个或多个的中间坐标系来表示,例如

$$\mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_G^n \mathbf{C}_p^G \mathbf{C}_t^p \mathbf{C}_b^t \quad (1.17)$$

通常把式(1.17)称为坐标变换基本公式。

观察方向余弦矩阵,不难证明,方向余弦矩阵具有以下性质:

(1) 两个方向余弦矩阵互为转置矩阵,即

$$\mathbf{C}_n^b = [\mathbf{C}_b^n]^T; \quad \mathbf{C}_b^n = [\mathbf{C}_n^b]^T \quad (1.18)$$

(2) 两个方向余弦矩阵互为逆矩阵,即

$$\mathbf{C}_n^b = [\mathbf{C}_b^n]^{-1}; \quad \mathbf{C}_b^n = [\mathbf{C}_n^b]^{-1} \quad (1.19)$$

(3) 两个方向余弦矩阵的转置矩阵与其逆矩阵相等,方向余弦矩阵是正交矩阵,即

$$[\mathbf{C}_n^b]^T = [\mathbf{C}_b^n]^{-1}; \quad [\mathbf{C}_b^n]^T = [\mathbf{C}_n^b]^{-1} \quad (1.20)$$

由上述方向余弦矩阵的性质,不难得出下列等式:

$$\begin{cases} c_{11}^2 + c_{12}^2 + c_{13}^2 = 1 \\ c_{21}^2 + c_{22}^2 + c_{23}^2 = 1 \\ c_{31}^2 + c_{32}^2 + c_{33}^2 = 1 \\ c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + c_{13}c_{23} = 0 \\ c_{11}c_{31} + c_{12}c_{32} + c_{13}c_{33} = 0 \\ c_{31}c_{21} + c_{32}c_{22} + c_{33}c_{23} = 0 \end{cases} \quad (1.21)$$

式(1.21)是九个方向余弦之间的约束条件。显然,九个方向余弦之中只有三个独立。这个方程组意味着一个坐标轴相对于另一个坐标系的三个方向余弦的平方和等于1,而两个互相垂直的坐标轴相对于另一个坐标系三个方向余弦两两相乘之和为零。

但是,由给定的三个方向余弦的数值,通过约束条件来求取其余六个方向余弦的数值,实际上非常困难,得到的解也往往不是唯一的。所以,一般说,仅仅给定三个独立的方向余弦,并不能唯一确定两个坐标系之间的相对角位置。为解决这个问题,通常采用三个独立的转角(即欧拉角),求出九个方向余弦的数值,进而唯一地确定两个坐标系之间的相对角位置。

1.1.4 刚体角位置的欧拉角描述

选用三个独立的角度来表示定点刚体的相对方位,最早由欧拉(Euler)在1776年提出,所以通常将这三个角称为欧拉角。

图1.2表示了共原点的两个坐标系 $Ox_n y_n z_n$ 和 $Ox_b y_b z_b$ 的相对方位,这个相对方位可以看成是通过以下的演变过程而最后形成的。最初 $Ox_n y_n z_n$ 和 $Ox_b y_b z_b$ 完全重合,而后顺序通过三次简单的转动达到图示位置:第一次转动可以绕刚体坐标系的任意一个轴进行;第二次转动可以绕其余两个轴中的任意一个轴进行;第三次转动则可以绕除第二次转动之外的任意一个轴进行。这样三次连续转动得到的三个独立的转角统称为欧拉角。如果第三次转动的轴与第一次转动的轴相同,所得三个角称为第一类欧拉角;如果第三次转动的轴与前两次转动的轴都不同,所得三个角则称为第二类欧拉角,也称卡尔丹角。

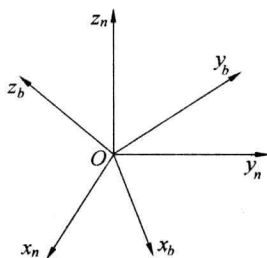


图1.2 两个坐标系的相对位置

首先看第一类欧拉角。

假定在起始位置时,刚体系与参考系 $Ox_n y_n z_n$ 重合,通过三次转动后,刚体系处于 $Ox_b y_b z_b$ 位置。

如图1.3所示,第一次绕 z_n 轴转动 ψ ,刚体系由最初与 $Ox_n y_n z_n$ 重合的位置转到 $Ox_1 y_1 z_1$ 的位置。于是, $Ox_1 y_1 z_1$ 与 $Ox_n y_n z_n$ 之间的方向余弦矩阵可写成

$$C_1^n = \begin{bmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

第二次转动是绕 x_1 轴转动 θ ,使 $Ox_1 y_1 z_1$ 到达 $Ox_2 y_2 z_2$ 位置,如图1.4所示。

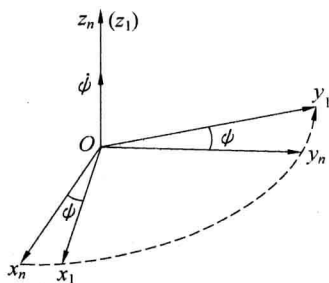


图1.3 第一次转动

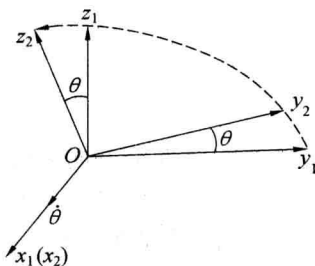


图1.4 第二次转动

$Ox_2 y_2 z_2$ 与 $Ox_1 y_1 z_1$ 之间的方向余弦矩阵可表示成

$$C_2^1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

第三次转动是绕 z_2 轴转动 φ ,使 $Ox_2 y_2 z_2$ 到达 $Ox_b y_b z_b$ 位置,如图1.5所示。

$Ox_b y_b z_b$ 与 $Ox_2 y_2 z_2$ 之间的方向余弦矩阵为

$$\mathbf{C}_b^2 = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

一般情况下,通过上述三次简单转动,即可得到两个共原点的坐标系之间的任意相对位置,三次转动的角 ψ, θ, φ 即是欧拉角。利用坐标变换基本公式有

$$\mathbf{C}_b^n = \mathbf{C}_1^n \mathbf{C}_2^1 \mathbf{C}_b^2 \quad (1.25)$$

将式(1.22) ~ (1.24) 的结果代入式(1.25),得

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} \cos \psi \cos \varphi - \sin \psi \cos \theta \sin \varphi & -\cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \theta \cos \varphi & \sin \psi \sin \theta \\ \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \cos \theta \sin \varphi & -\sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \theta \cos \varphi & -\cos \psi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi & \cos \theta \end{bmatrix} \quad (1.26)$$

这样就得到了用三个欧拉角 ψ, θ, φ 表示的任意两个坐标系之间的方向余弦矩阵。

将三个简单转动叠加在一起,就得到用三个欧拉角表示的两个坐标系相对位置的综合图,如图 1.6 所示。

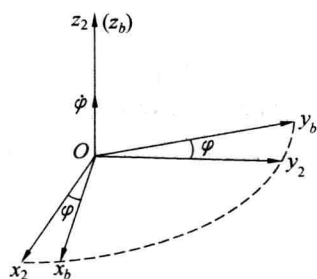


图 1.5 第三次转动

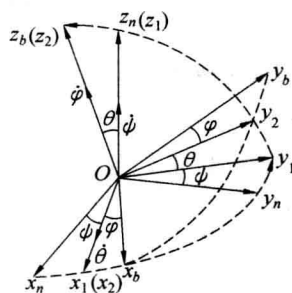


图 1.6 三次转动的叠加

从式(1.26)可以看出,用欧拉角表示的方向余弦矩阵非常繁琐,通常多用于经典的刚体动力学,其中欧拉角 ψ, θ, φ 是有限的角位移。对于实际应用的陀螺仪,由于高速旋转具有的稳定性,这些角位移是小角位移,可以进行线性化处理,以简化其中繁琐的三角函数运算。把 ψ, θ, φ 看成一阶小量,并略去二阶小量时,式(1.26)变为

$$\mathbf{C}_b^n = \begin{bmatrix} 1 & -(\psi + \varphi) & 0 \\ (\psi + \varphi) & 1 & -\theta \\ 0 & \theta & 1 \end{bmatrix} \quad (1.27)$$

形式虽然简单了,但式(1.27)中的元素 $(\psi + \varphi)$ 正好合二为一,矩阵中的九个元素只有两个独立参数,少于必要的三个参数,丧失了单值性,用两个参数并不能唯一地确定刚体的相对位置。由此可见,上述欧拉角仅适用于有限角位移,而不能表示无限小角位移时刚体的相对位置,而后者正是陀螺仪技术中最感兴趣的。

下面讨论第二类欧拉角。第二类欧拉角与广泛使用的陀螺仪卡尔丹环架密切相关,因为它们可以由卡尔丹环架各部件之间夹角来确定,故称为卡尔丹角。

前面的第一类欧拉角是先绕 z_n 轴,再绕 x_1 轴,最后绕 z_2 轴转动得到的,转动顺序表示

为

$$z_n \xRightarrow{\psi} x_1 \xRightarrow{\theta} z_2 \xRightarrow{\varphi} (x_n y_n z_n), (x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2) \rightarrow (x_b y_b z_b)$$

简单表示为

$$z \rightarrow x \rightarrow z$$

下面改变一下转动轴,相应的转角用 α, β, γ 表示,以区别 ψ, θ, φ 。

$$x_n \xRightarrow{\alpha} y_1 \xRightarrow{\beta} z_2 \xRightarrow{\gamma} (x_n y_n z_n), (x_1 y_1 z_1), (x_2 y_2 z_2) \rightarrow (x_b y_b z_b)$$

这个转动也可简单表示为 $x \rightarrow y \rightarrow z$,其特点是 x, y, z 轴各出现一次;而前者第一次与第三次转动同为 z 轴, y 轴不出现。

用同样的方法可以得到用 α, β, γ 表示的方向余弦矩阵

$$C_b^n = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \gamma & -\cos \beta \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \\ -\cos \alpha \sin \beta \cos \gamma + \sin \alpha \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos \gamma & \cos \alpha \cos \beta \end{bmatrix} \quad (1.28)$$

中间过程略去,按这样的方式转动,得到的 α, β 和 γ 称为卡尔丹角。

如前所述,这里的 C_b^n 只是转动轴的不同选择得到的,与欧拉角没有本质差别,所以称之为第二类欧拉角。但它可以用于无限小角位移情况,略去 α, β 和 γ 的二阶以上小量,式(1.28)将简化为

$$C_b^n = \begin{bmatrix} 1 & -\gamma & \beta \\ \gamma & 1 & -\alpha \\ -\beta & \alpha & 1 \end{bmatrix} \quad (1.29)$$

显然,式(1.29)与式(1.27)不同,它的九个元素仍然包括三个独立参数,故仍能在无限小角位移的情况下,单值地表示刚体系与参考系的相对位置。

综上所述,所谓第一类欧拉角和第二类欧拉角,只是选择不同的轴和不同的转动顺序做有限的角位移形成的。选择不同的轴和不同的转动顺序,所得结果不同。因为共有三次转动,第一次可以是三个坐标轴中的任意一个,第二次可选用第一次未用的两轴之一,而第三次又可以选用第二次未用的两轴之一。所以,连续三次转动有 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 种组合。在这些不同的组合当中,有两种最基本的形式,这两种基本形式的差别在于:在第三次转动时,是用第一次转动用过的轴还是用前两次都未用过的轴,前者得到的是第一类欧拉角,后者得到的是第二类欧拉角,即卡尔丹角。

这里必须强调有限转动和无限小转动的差别。不论是第一类欧拉角还是第二类欧拉角,当转动角度是有限角位移时,称为有限转动和有限转动的合成;当转动角度是无限小位移时,称为无限小转动。有限转动与转动顺序有关,反映在数学上,是矩阵乘法运算, $C_b^n = C_1^n C_2^n C_3^n$ 的右端矩阵相乘的顺序不能随意交换。这个事实说明,有限角位移的转动不具有向量性质,即有限转动不是向量;而无限小角位移则不同,它具有向量性质,因而在做

无限小转动的合成时,与转动顺序无关。

1.1.5 定点转动刚体的角速度表达式

先看第一类欧拉角情况下定点转动刚体瞬时角速度的表达式。假定坐标系的转动顺序为 $z \rightarrow y \rightarrow z$, 转角为 ψ, θ, φ , 则任意时刻刚体相对参考系的瞬时角速度 ω 可以表示成 $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}$ 三个角速度的矢量和, 即

$$\omega = \dot{\psi} + \dot{\theta} + \dot{\varphi} \quad (1.30)$$

式(1.30)中的角速度在刚体系 $Ox_b y_b z_b$ 各轴上的投影关系可以写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_{x_b} \\ \dot{\psi}_{y_b} \\ \dot{\psi}_{z_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x_b} \\ \dot{\theta}_{y_b} \\ \dot{\theta}_{z_b} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{x_b} \\ \dot{\varphi}_{y_b} \\ \dot{\varphi}_{z_b} \end{bmatrix}$$

根据坐标变换公式,可以得到

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_2^e \mathbf{C}_1^e \mathbf{C}_n^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{C}_2^e \mathbf{C}_1^e \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_2^e \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_b} \\ \omega_{y_b} \\ \omega_{z_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\theta} \cos \varphi \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi + \dot{\theta} \sin \varphi \\ \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

我们也可以求出刚体转动角速度 ω 在中间坐标系 $Ox_2 y_2 z_2$ 中的投影, 即

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_2} \\ \omega_{y_2} \\ \omega_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\psi}_{x_2} \\ \dot{\psi}_{y_2} \\ \dot{\psi}_{z_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}_{x_2} \\ \dot{\theta}_{y_2} \\ \dot{\theta}_{z_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\varphi}_{x_2} \\ \dot{\varphi}_{y_2} \\ \dot{\varphi}_{z_2} \end{bmatrix}$$

根据坐标变换公式,得

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_2} \\ \omega_{y_2} \\ \omega_{z_2} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_1^e \mathbf{C}_n^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{C}_1^e \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

于是,刚体角速度 ω 在中间坐标系 $Ox_2 y_2 z_2$ 中的投影为

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_2} \\ \omega_{y_2} \\ \omega_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ 0 \\ \dot{\psi} \cos \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dot{\psi} \sin \theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi} \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

现在来看第二类欧拉角情况下定点转动刚体瞬时角速度的表达式。假定坐标系的转动顺序为 $x \rightarrow y \rightarrow z$, 转角为 α, β, γ , 则任意时刻刚体相对参考系的瞬时角速度 ω 可以表示成 $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dot{\gamma}$ 三个角速度的矢量和, 即

$$\omega = \dot{\alpha} + \dot{\beta} + \dot{\gamma} \quad (1.33)$$

不难得出第二类欧拉角情况下定点转动刚体瞬时角速度在 $Ox_2 y_2 z_2$ 中的投影为

$$\begin{bmatrix} \omega_{x_2} \\ \omega_{y_2} \\ \omega_{z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ 0 \\ \dot{\alpha} \sin \beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\beta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \cos \beta \\ \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma} \end{bmatrix} \quad (1.34)$$

式(1.31)、(1.32)和式(1.34)就是刚体定点转动的运动学方程,该方程把刚体定点转动的动力学方程中的角速度化为欧拉角及其导数的函数,从而使动力学方程式中的广义坐标变为欧拉角。如果通过积分运算求出刚体定点转动动力学方程式中的欧拉角变化规律,就可以唯一地确定定点转动刚体的运动规律。

1.2 常用坐标系

一切物体都是运动的,物体在空间的位置只能相对于另一物体而确定。这样,后一物体就构成了描述前一物体运动的参考坐标系,并通常采用直角坐标系来代表。在研究惯性器件或运载体的运动时,同样需要参考坐标系。

1.2.1 惯性坐标系

牛顿的经典力学假定了一个保持匀速直线运动或绝对静止的参考坐标系,这个参考系称为惯性坐标系。牛顿力学定律及其由此推导的各种定理都建立在这个假定之上,以描述自然界中物体的动力学规律。但是,保持匀速直线运动或绝对静止的惯性坐标系实际上是不存在的,所以工程上所取的惯性系都只是一种近似。实践表明,在地球上研究一般物体的运动时,选取与地球固结的坐标系作为惯性坐标系是足够精确的,虽然因地球的自转和绕太阳的公转运动使该坐标系具有转动角速度,且其原点还具有向心加速度,但这并不影响所研究问题的精确性。

需要说明的是,在研究惯性器件的运动时,经常用到“惯性空间”这一术语。惯性空间与惯性坐标系具有同等含义,即它是一个相对恒星没有转动的空间。也可以说,惯性坐标系的三个轴所构成的空间,就实体代表了惯性空间。

在地球上研究惯性器件的动力学规律,必须考虑地球的自转。这时就需选取一个相对于太阳或其他恒星没有转动的坐标系作为参考坐标系。根据原点选取不同,通常采用以下两个惯性坐标系作为参考坐标系:

(1) 日心惯性坐标系 $Ox_s y_s z_s$ 。日心坐标系的原点取在太阳中心,三个轴指向确定的恒星。根据天文学的测量,太阳绕银河系中心的旋转周期为 190×10^6 年,旋转速度约为每年 $0.001'$,太阳对银河系的向心加速度约为 $2.4 \times 10^{-11} g$ (g 为地球重力加速度的量值)。因此,采用日心惯性坐标系作为研究惯性器件运动的惯性参考系是相当精确的。

(2) 地心惯性坐标系 $Ox_i y_i z_i$ 。地心坐标系的原点设在地球中心, Ox_i 和 Oy_i 两个轴位于地球赤道平面并分别指向确定的恒星,通常取 Oz_i 与地球自转轴(地球极轴)重合,并指向北极星。地心惯性系不参与地球自转,由于地球公转的向心加速度仅约为 $6.05 \times 10^{-4} g$,因此,在忽略地球公转情况下,该坐标系可视为静止不动的惯性坐标系。采用地心