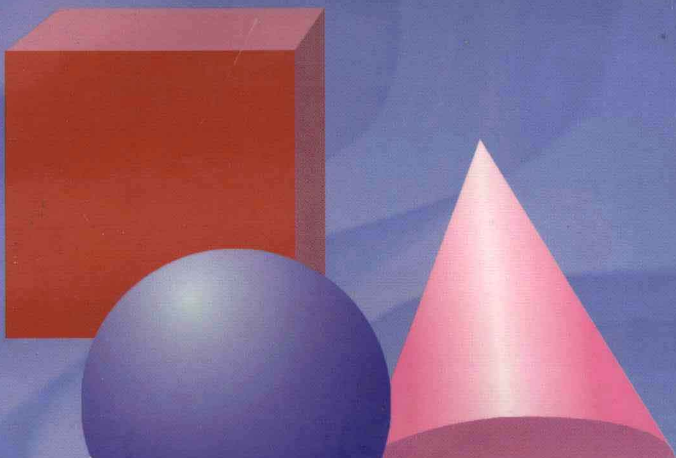
新编中学数学解题指要丛书

陈　彤　吴长江　编著

LI TI JI HE JIE TI ZHI YAO



立体几何解题指要

方出版中心

新编中学数学解题指要丛书

立体几何解题指要

陈　彤　吴长江　编著

东 方 出 版 中 心

说　　明

经中央机构编制委员会办公室和中华人民共和国新闻出版署批准，原中国大百科全书出版社上海分社、知识出版社（沪），自1996年1月1日起，更名为东方出版中心。

立体几何解题指要　　陈　彤　吴长江　编著

出版：东方出版中心
　　（上海仙霞路335号　邮编200336）
发行：东方出版中心
经销：新华书店上海发行所
印刷：昆山市亭林印刷总厂

开本：787×1092(毫米)　1/32
印张：9.75
字数：200千字
版次：1999年6月第1版第1次印刷
印数：1—8,000

ISBN 7-80627-408-1/G·117　　定价：11.00元

内 容 提 要

本书系“新编中学数学解题指要丛书”之一种。本书根据中学数学教学大纲的要求及新教材的具体内容，针对教学上的重点、要点、难点，概要地介绍了立体几何解题的基本思路、途径、方法和技巧，将其分门别类地归纳为诸如怎样解选择题，怎样证明共面、共线与共点，怎样求解角度问题、距离问题，怎样处理切割与拼补问题、截面问题，怎样解开放题、信息题、应用题，怎样用向量法、等积法、构造法解题等。本书可帮助学生灵活掌握立体几何的基本知识，便捷地解决各类立体几何习题，也可供有关教师参考。

出 版 说 明

数学是研究现实世界的空间形式和数量关系的科学,数学的理论广泛地应用到自然科学和技术的各个部门,对人类认识自然和改造自然起着重要的作用。中学数学是数学的基础,是中学的重要课程,学好中学数学既能训练学生的逻辑思维能力,培养学生的分析问题和解决问题的能力,又对学好中学的其他课程,特别是理科课程(物理、化学、生物、地理等)有着直接的关系。

要学好中学数学,在熟练掌握中学数学的基本概念和基本理论的同时,学会解题,掌握解题技巧也是很重要的,它能帮助学生迅速地找到解题思路,简便地作出正确解答。为此,我们出版这套“新编中学数学解题指要丛书”,共分6册,包括《初中代数解题指要》、《平面几何解题指要》、《高中代数解题指要》、《立体几何解题指要》、《平面三角解题指要》和《解析几何解题指要》。本丛书根据教学大纲和教材,针对教学上的重点、要点、难点,概要地介绍了中学数学各分支解题的基本思路、途径、方法和技巧等。本丛书可作为普通中学数学教和学的参考书,也可供广大数学爱好者作为学习数学的辅导读物。

本丛书的作者都是长期在中学从事数学教学,具有丰富教学实践经验,对中学数学解题方法颇有研究的中学特级教师和高级教师。我们希望本丛书的出版,能对广大中学生提

高学习数学兴趣，培养创新能力有所裨益，并期待中学广大师生对本丛书多提宝贵意见，以便再版时改进，使本丛书逐步完善。

编者的话

提高中学数学的解题能力，无论对于学生还是教师，都有非常重要的意义。同样，要提高立体几何的解题能力，首先必须熟练掌握立体几何的基础知识，深刻理解立体几何解题的基本方法、基本思路，同时也有必要学习一些解题技巧。对于同一个立体几何问题，往往能从不同的角度去分析、采用不同的方法来解决，但繁简程度却有很大的区别，如果能掌握立体几何的解题要点和一定的解题技巧，就能达到事半功倍的目的。本书按照新编立体几何的教材，针对其在教学上的重点、难点，通过对典型立体几何问题的分析，介绍了立体几何常用的思维方法和解题要领。我们编著这本书的目的，就是希望它能为广大读者尤其是高中学生在灵活运用基础知识、开拓解题思路、提高解题能力方面提供一些帮助和启发。

本书在编写时采用了专题的形式，每一专题都独立成文、自成一篇。为了帮助读者加深理解某些解题思路和解题方法，每篇后都备有习题，以供练习之用。

本书由王鸿仁、蔡明通两位先生统稿、审定，谨表示感谢。由于作者水平所限，书中倘有不妥或疏漏之处，敬请读者予以指正。

编　者

1999年6月

目　　录

一、怎样解立体几何选择题

数学选择题是国内各种形式考试所采用的一种固定题型,这是由于数学选择题具有覆盖面广、综合性强、入题思路宽广、解法多样等一系列特点。选择题对“体现解法”、“锻炼思维”、“渗透思想”、“培养素质”、“形成悟性”都具有积极意义,因此探索、掌握数学选择题的解法是十分必要的。立体几何选择题是以图形为主,着重空间想象能力,与代数、三角选择题的解法有所区别。立体几何选择题有如下四种类型:

1. 判断型。判断点、线、面及几何体的位置关系,判断立体几何有关概念、定义是否正确。

2. 求解型。计算空间角、距离及几何体的面积、体积等。

3. 推理型。利用公理、定理、性质进行推演,考核逻辑推理能力。

4. 探索型。给出条件探索结论,或给出结论追索条件。

立体几何选择题的解法与题型关系可列表如下:

题 型	常用的解题方法
判断型	筛选法、图解法、特例法、概念法
推理型	推演法、讨论法
求解型	推演法、图解法、验算法、分析法
探索型	特例法、图解法、筛选法

本书介绍立体几何选择题的几种常用解法。

(一) 特例法

由于矛盾的普遍性寓于特殊性之中,因此对普遍性结论

(不变性结论)的选择题,用特例等效求解是最佳策略。

1. 特殊体计算

例1 正四棱柱的底面积为$\sqrt{P}$,过两相对侧棱的截面面积为Q,则该正四棱柱的体积是 ( )

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{P}Q$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{Q}\cdot P$

(C) $\sqrt{P}\cdot Q$ (D) $\sqrt{Q}\cdot P$

解 取特殊的正四棱柱——正方体,棱长为1,则$P=1$,$Q=\sqrt{2}$,$V=1$。$\because \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{P}Q=1$,$\therefore$选(A)。

2. 特殊值比较

例2 设过长方体同一顶点的三个面的对角线长分别是a、b、c,那么这个长方体的对角线长是 ( )

(A) $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ (B) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{2}}$

(C) $\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$ (D) $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{2}$

解 取$a=b=c=\sqrt{2}$,则长方体各条棱长均为1,对角线长为$\sqrt{3}$。此时(A)为$\sqrt{6}$,(B)为$\sqrt{3}$,(C)为$\sqrt{2}$,(D)为$\frac{\sqrt{6}}{2}$。$\therefore$本题选(B)。

3. 特殊点推理

例3 在空间四点中,无三点共线是无四点共面的 ( )

(A) 充分而不必要条件 (B) 必要而不充分条件

(C) 充要条件 (D) 不充分也不必要条件

解 取空间不共面的四点,即四面体A—BCD的四个顶

点；再取四点共面但无三点共线的四点，即三角形 PQR 与形内一点 H。∵无三点共线的四点 P、Q、R、H 可以四点共面，而无四点共面的 A、B、C、D 可以推出这四点中无三点共线，∴无三点共线的四点 $\underset{\Leftarrow}{\not\Rightarrow}$ 无四点共面。故本题应选(B)。

4. 特殊图形判别

例 4 已知直线 L_1、L_2 与平面 α，有下面四个命题：①若 $L_1 /\!/ \alpha$，$L_1 /\!/ L_2$，则 $L_2 /\!/ \alpha$；②若 $L_1 \subset \alpha$，$L_2 \cap \alpha = A$，则 L_1 与 L_2 为异面直线；③若 $L_1 \perp \alpha$，$L_2 \perp \alpha$，则 $L_1 /\!/ L_2$；④若 $L_1 \perp L_2$，$L_1 /\!/ \alpha$，则 $L_2 /\!/ \alpha$。其中真命题的个数有 (　　)

(A) 0个　　(B) 1个　　(C) 2个　　(D) 3个

解 作正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$，记平面 $ABCD$ 为 α。当 $A_1B_1 = L_1$，$AB = L_2$，则①不真。当 $AB = L_1$，$A_1A = L_2$，则②不真。当 $A_1B_1 = L_1$，$A_1A = L_2$，则④不真，而③真。∴本题选(B)。

说明 对于一些具有结构、大小、范围、界值等特征的立几选择题，经常可采用赋以某些特殊值；考虑某些特殊的点、线、面；构造特殊的几何体或者研究图形的特殊位置，间接解答选择题。特例法解选择题的理论根据是一个命题在一般情况下成立，则该命题在特殊情况下也成立；一个命题在特殊情况下是错误的，则该命题一定是错误的。

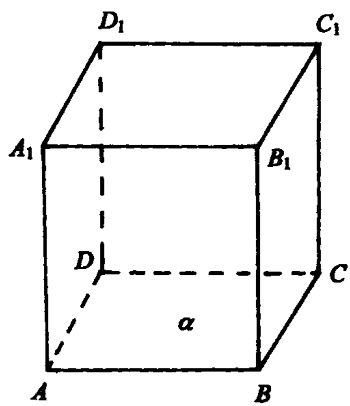


图 1-1

(二) 图解法

图解法是解立体几何选择题的主要方法，它充分利用

了几何图形直观、形象的特点及其所隐含的信息解题。

1. 作出截面图

例5 正方体的全面积是 a^2,它的顶点都在球面上,这个球的表面积是 ( )

(A) $\frac{\pi}{3}a^2$ (B) $\frac{\pi}{2}a^2$ (C) $2\pi a^2$ (D) $3\pi a^2$

解 正方体内接于球,因为球与正方体均为“中心对称体”,可想象出中心重合,因此正方体的对角面是包含球的直径与正方体边长的平面图形。现作出其截面图,设棱长为 x,半径为 r,

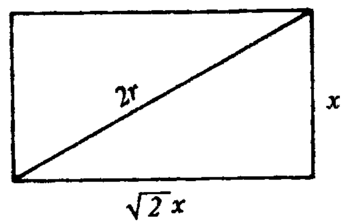


图1-2

$\therefore r^2=\frac{3x^2}{4}$。又 $x^2=\frac{a^2}{6}$,$\therefore S=4\pi r^2=\frac{\pi a^2}{2}$,故应选(B)。

2. 画出性质图

例6 已知直线 a、b 及平面 α,a、b 不在 α 内,设 a、b 在 α 内的射影分别是 a'、b',下列命题中正确的是 ( )

(A) 若 $a'\perp b'$,则 $a\perp b$

(B) 若 $a\perp b$,则 $a'\perp b'$

(C) 若 $a\parallel b$,则 a' 与 b' 不垂直

(D) 若 $a'\parallel b'$,则 a 与 b 不垂直

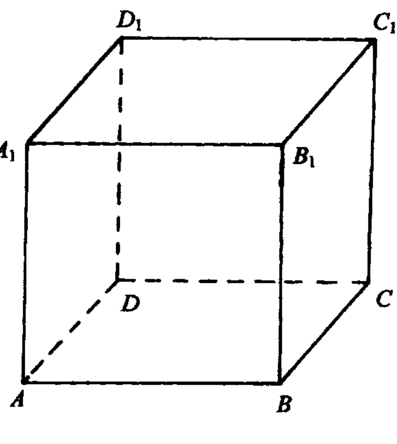


图1-3

解 这是平面 α 外两直线与它们在 α 内射影位置关系的判断题，因此作出两直线 a、b 在 α 内射影的性质图，即在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，取平面 $ABCD$ 为 α。当 A_1C 为 a，D_1B 为 b，则 AC 为 a'，BD 为 b'，显然 $a'\perp b'$，而 a 与 b 不垂直，排除(A)；当 A_1B_1 为 a，B_1B 为 b，即 $a\perp b$，排除(B)；当 CD_1 为 a，AB_1 为 b，则 a' 为 CD，b' 为 AB，这时 $a'/\!/b'$，并且 $a\perp b$，排除(D)。故应选(C)。

3. 补成熟悉的图形

当给出的几何体比较复杂，有关的计算公式无法运用，或者已知条件中的若干元素彼此离散，直接计算较为困难时，经常将几何体补成容易计算的特殊几何体。

例 7 斜三棱柱的一个侧面的面积等于 S，这个侧面与它所对的侧棱的距离等于 a，那么这个棱柱的体积为（　　）

(A) $S\cdot a$　(B) $\frac{1}{2}Sa$　(C) $\frac{1}{3}S\cdot a$　(D) $\frac{1}{4}S\cdot a$

解 在已知斜三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 中，设侧面 ACC_1A_1 的面积为 S，侧棱 BB' 与面 ACC_1A_1 的距离为 a，这个几何体的体积一般无法算出。现将斜三棱柱补成一个平行六面体 $ABDC—A_1B_1D_1C_1$，此时 $V_{ABDC—A_1B_1D_1C_1}=S\cdot a$，$\therefore$ $V_{ABC—A_1B_1C_1}=\frac{1}{2}S\cdot a$，故本题应选(B)。

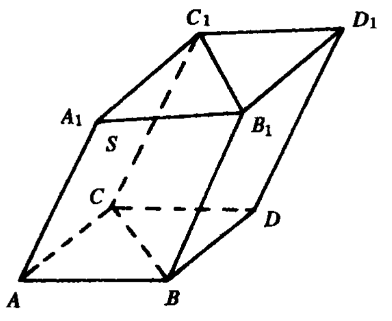


图 1-4

4. 分析已知图

例 8 四面体的顶点和各棱中点共 10 个点,在其中取 4 个不共面的点,不同的取法共有 ( )

(A) 150 种 (B) 147 种 (C) 144 种 (D) 141 种

解 本题实际上是要求算出有多少种 4 点共面。①六点共面的情况有 4 种,即四面体的 4 个面,$4C_6^4$;②相对棱中点共面有 3 种,$3C_4^4$;③棱上三点与相对棱中点也是 4 点共面有 $6C_4^4$。因此,取 4 个不共面的点,不同取法共有 $C_{10}^4-4C_6^4-3C_4^4-6C_4^4=141$。故本题应选(D)。

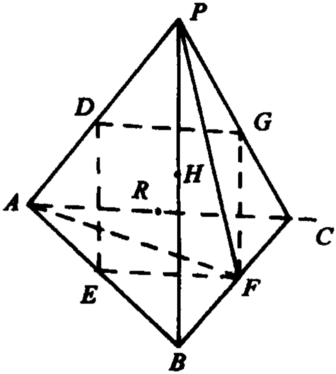


图 1-5

例 9 一个 $11\times11\times11$ 的立方体是 11^3 个单位立方体贴合而成的。问从立方体外一点看上去最多能看见多少个单位立方体? ( )

(A) 328 (B) 329

(C) 330 (D) 331

解 从立方体外一点最多能看见立方体的三个表面,每个表面有 11^2 个单位立方体,但在两个表面相交棱的单位立方体有 11 个,三个表面相交于一点的单位立方体有一个。所以,最多能看见的单位立方体有 $3\times11^2-3\times11+1=331$。故本题选(D)。

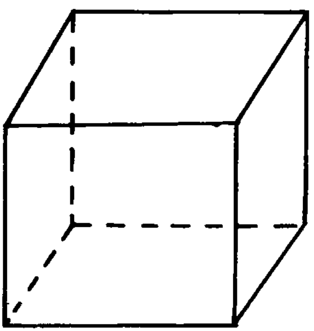


图 1-6

5. 利用示意图

例 10 已知直线 $l\perp$平面 α,直线 $m\subset$平面 β,有下列四个命题:①$\alpha/\!/\beta\Rightarrow l\perp m$;②$\alpha\perp\beta\Rightarrow l/\!/m$;③$l/\!/m\Rightarrow\alpha\perp\beta$;④$l\perp m\Rightarrow\alpha/\!/\beta$。其中正确的两个命题是 (   )

(A) ①与② (B) ③与④

(C) ②与④ (D) ①与③

解 本题不宜用直接证法,否则就是“小题大作”,可作出示意图 $\alpha\perp\beta$,$l\perp\alpha$,$m\subset\beta$。这时 l 与 m 可为异面直线,命题②假;若 l 与 m 为异面直线并且垂直时,这时 α 与 β 可相交,命题④假。故选(D)。

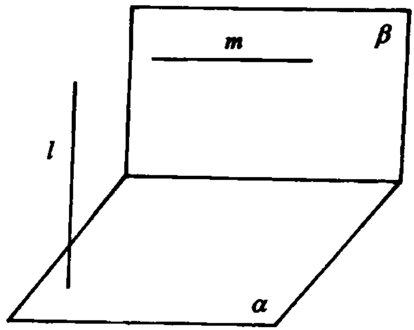


图 1-7

(三) 筛选法

通过观察、估计、分析、反例排除部分选择支,缩小选择范围,这种解法称为筛选法。

1. 估值筛选

例 11 已知过球面上 A、B、C 三点的截面和球心的距离等于球半径的一半,且 $AB=BC=CA=2$,则球面面积是 (   )

(A) $\frac{16}{9}\pi$ (B) $\frac{8}{3}\pi$ (C) 4π (D) $\frac{64}{9}\pi$

解 若球半径 $r=1$,则球面面积为 4π,设球心为 O,则 $OA+OB>AB$,即 $2r>2$,$\therefore S_{球面}>4\pi$,故选(D)。

例 12 已知正三棱台的上、下底面边长分别为 2 和 4，高为 $2\sqrt{3}$，它被中截面截得的较大部分的体积是 ( )

(A) $\frac{37}{2}$ (B) $\frac{111}{4}$ (C) $\frac{19}{4}$ (D) $\frac{37}{4}$

解 容易算出正三棱台的体积为 14，较大部分体积显然应大于 7，小于 14，可排除(A)、(B)、(C)，只有(D)符合要求。

2. 反例筛选

例 13 下列三个命题：(1)底面是正三角形、其余各面都是等腰三角形的棱锥是正三棱锥；(2)底面是正三角形、相邻两侧面所成的二面角都相等的三棱锥是正三棱锥；(3)底面是三角形、其余各面是全等的等腰三角形的棱锥是正三棱锥。其中真命题的个数是 ( )

(A) 3 (B) 2 (C) 1 (D) 0

解 这是一道判断三个命题真伪的选择题，涉及正三棱锥的定义，直接证明难度颇大，否定的关键在于构造出满足条件的反例。如图 1-8，作出正三棱锥 $P-ABC$，使 $\angle BPC=30^\circ$，在 PC 上取一点 C_1，使 $BC_1=BC$，连结 AC_1，则三棱锥 $C'-ABC$ 是命题(1)的反例，三棱锥 $P-ABC_1$ 是命题(2)的反例。图 1-9 是菱形，且 $\angle A=45^\circ$，将 $\triangle ABD$ 沿 BD 折起，使 $AC=BD$，则图 1-10 中 $A-BCD$ 是满足命题(3)的反例。故本题应选(D)。

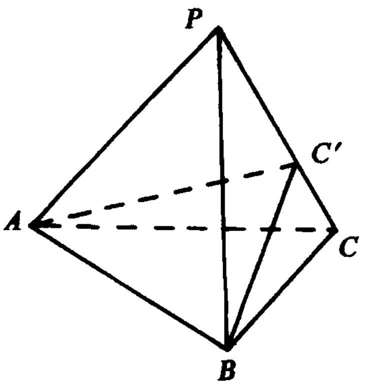


图 1-8

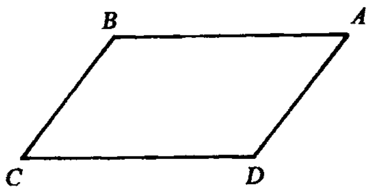


图 1－9

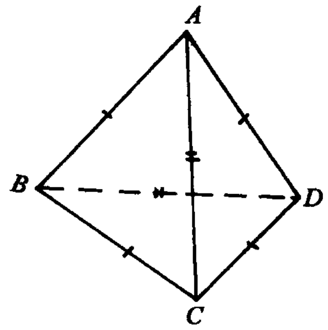


图 1－10

3．验证筛选

例 14　三个不同的平面 α、β、γ 两两相交，所得三条交线 a、b、c 的位置关系是　　　　（　　）

（A）两两平行或两两相交(不共点)

（B）三线共点或两两异面

（C）两线平行且都与第三条线相交

（D）三线共点或两两平行

解　若 a、b、c 两两相交且不共点，则 α、β、γ 共面，排除(A)；若 a、b、c 两两异面，则 a、b、c 中任两条线不共面，$\therefore$(B)不正确；若两线平行与第三条线相交，则这三条线共面，(C)也不正确。本题应选(D)。

4．观察筛选

例 15　平行于棱锥底面的截面把棱锥的高分成 2∶1 的两部分(从上到下)，则棱锥被分成的两部分的体积之比是

（　　）

（A）8∶1　　（B）8∶19　　（C）4∶9　　（D）8∶27

解　观察所给出的四个选择支，容易发现其比值可变为