



新编全国成人高考辅导丛书

● 光明日报出版社 广西师范大学出版社

数学

(下)

黄绪励 主编



编

1310983

013

0661

• 新编全国成人高考辅导丛书 •

数 学(下)

主 编 黄绪励

撰稿人 黄绪励 王俊邦 黄绪勉

秦宗培 王英惠



CS1497754

重庆市幼儿师范学校

重庆师大图书馆

光明日报出版社
广西师范大学出版社



X017739

3075

新编全国成人高考辅导丛书

数 学

主编 黄绪励

☆

光明日报出版社
广西师范大学出版社 出版

(广西桂林市育才路3号)

新华书店北京发行所发行

人民卫生出版社胶印厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 26.625 字数 576 千字

1991年5月第1版 1991年5月第1次印刷

印数 00001—12000

ISBN 7-80091-057-8/G·410

定价:12.95元

1310983

新编全国成人高考辅导丛书

丛书总编 张德政

副总编 马 纳

杨惠娟

国家图书馆藏

目 录

第三编 立体几何

第十四章 直线和平面	(1)
练习题十四	(28)
第十五章 多面体和旋转体	(36)
练习题十五	(61)
立体几何复习题	(67)

第四编 平面解析几何

第十六章 直线	(81)
练习题十六	(113)
第十七章 圆锥曲线	(116)
练习题十七	(170)
第十八章 参数方程与极坐标	(175)
练习题十八	(206)
附录 各章练习题、复习题解答	(210)

第三编 立体几何

第十四章 直线和平面

[考纲要求]

1. 掌握平面的基本性质。
2. 理解空间两直线的位置关系, 以及异面直线、异面直线所成的角的概念。
3. 理解空间直线和平面的位置关系, 以及直线和平面垂直的概念; 了解点到平面的距离的概念; 会用直线和平面平行、垂直的判定定理和性质定理解决有关问题。
4. 理解点、斜线段在平面内射影的概念。
5. 掌握三垂线定理和它的逆定理, 并会用它们解决有关问题。
6. 理解空间两个平面的位置关系, 以及二面角的概念。
7. 了解两平行平面间的距离的概念, 会用两平面平行、垂直的判定定理和性质定理解决有关问题。
8. 会用反证法进行简单论证。

[内容提要]

一、平面的基本性质

1. 空间直线与空间平面的记法

(1) 空间直线 直线 a , 直线 b , 直线 AB 等。如图14-1。



图14-1

(2)空间平面 通常用平行四边形来表示平面。记法：可以用一个希腊字母来表示，如平面 α ，平面 β ；也可以用一个的大写的拉丁字母来表示，如平面 P ，平面 M ；还可以用平行四边形相对的两个角上的字母来表示，如平面 AC 。如图14-2。

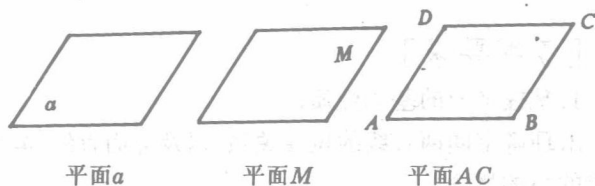


图14-2

2.点与直线、点与平面、直线与平面的关系的表示方法

点 A 在直线 a 上，记作 $A \in a$ ；点 A 不在直线 a 上，记作 $A \notin a$ ；点 A 在平面 α 内，记作 $A \in \alpha$ ；点 A 在平面 α 外，记作 $A \notin \alpha$ ；直线 a 在平面 α 内，记作 $a \subset \alpha$ ，直线 a 在平面 α 外，记作 $a \not\subset \alpha$ (包括相交和平行两种情况)。

2.有关平面的三个公理

公理1 如果一条直线上有两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。(图14-3)

公理2 如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线。(图14-4)

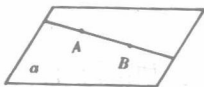


图14-3

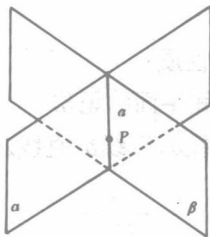


图14-4

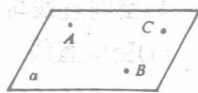


图14-5

公理3 经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面.(图14-5)

3. 平面的确定

根据以上公理可以推得确定平面的条件:

- ① 不在同一条直线上的三点确定一个平面(图14-6).
- ② 一条直线和直线外的一点确定一个平面(图14-7).
- ③ 两条相交直线确定一个平面(图14-8).
- ④ 两条平行直线确定一个平面(图14-9).

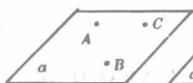


图14-6



图14-7



图14-8

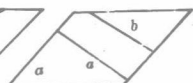


图14-9

二、直线与直线的位置关系

1. 两条直线的位置关系(图14-10)

相交直线——有且只有一个公共点。
 平行直线——没有公共点。
 异面直线——不同在任何一个平面内,没有公共点。

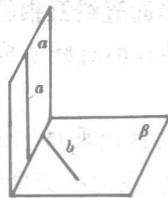
} 在同一个平面内。



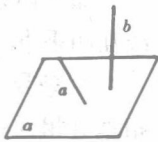
$a \cap b$



$a // b$



a, b 异面



a, b 异面

图14-10

2. 重要性质

公理4 平行于同一条直线的两条直线互相平行(可简述为三线平行公理)。

等角定理 如果一个角的两边和另一角的两边分别平行,并且方向相同,那么这两个角相等。

3. 重要概念

(1) 两条异面直线所成的角

经过空间任意一点分别作两条异面直线的平行线,这两条直线所成的锐角(或直角),叫做两条异面直线所成的角。(图14-11)

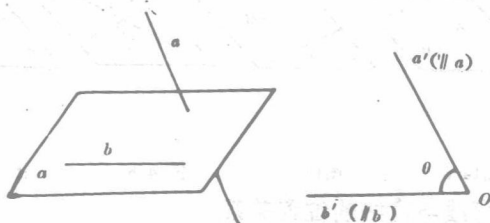


图14-11

注 空间任意一点 O 可选在两条异面直线中的一条上; θ 是异面直线 a, b 所成的角。

(2) 两条异面直线互相垂直

如果两条异面直线所成的角是直角,就说这两条异面直线互相垂直。

两条异面直线垂直仍记作 $a \perp b$ 。为了和两条相交直线互相垂直相区别,在记相交直线垂直时,一般应说明它的垂足。

三、直线与平面的位置关系

1. 位置关系

直线在平面内——直线上的点都是公共点。记作 $a \subset \alpha$ 。

直线和平面相交——有且只有一个公共点. 记作

$$a \cap \alpha = A.$$

直线和平面平行——没有公共点. 记作 $a // \alpha$.

2. 有关概念

(1) **直线与平面垂直的定义** 如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直, 则称这条直线和这个平面互相垂直(垂线与平面的交点叫垂足).

(2) **点到平面的距离** 从平面外一点引这个平面的垂线, 这个点和垂足的距离称为该点到这个平面的距离(该点和垂足间的线段叫做该点到平面的垂线段).

(3) **平行于平面的直线和平面的距离** 一条直线和一个平面平行, 这条直线上任意一点到平面的距离叫做这条直线和平面的距离.

(4) **平面的斜线与点到平面的斜线段** 和一平面相交, 但不垂直的直线叫做平面的斜线, 交点叫做斜足; 斜线上一点到斜足间的线段叫做这个点到平面的斜线段.

(5) **点在平面上的射影** 给定一平面 α , 从一点 A 向平面 α 引垂线, 我们把垂足称为点 A 在平面 α 上的正射影, 简称射影.

(6) **斜线和斜线段在平面上的射影** 过平面的斜线上一点向平面引垂线段, 过斜足和垂足的直线叫做斜线在平面上的射影; 垂足和斜足间的线段叫做斜线段在平面上的射影. 图14-12, 点 C 是斜足, 点 B 是垂足. 斜线 AC 在 α

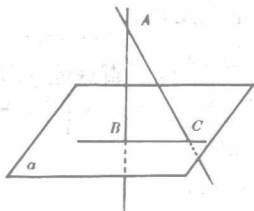


图14-12

上的射影是直线 BC . 斜线段 AC 在 α 上的射影是线段 BC .

(7) **直线和平面所成的角** 一条直线和一个平面斜交, 那么这条直线和它在这个平面上的射影所成的锐角, 叫做这条直线和这个平面所成的角. 当直线垂直于平面时, 直线和平面所成的角是直角; 当直线和平面平行或在平面内时, 直线和平面所成的角是 0° 的角. (图14-13)

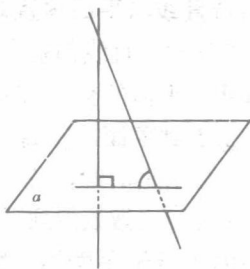


图14-13

3. 射影长定理 从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中: ①垂线段最短; ②射影相等的两条斜线段相等; ③相等的斜线段的射影相等.

4. 三垂线定理 在平面内的一条直线, 如果和这个平面的一条斜线在平面上的射影垂直, 那么它也和这条斜线垂直.

三垂线定理的逆定理 在平面内的一条直线, 如果和这个平面的一条斜线垂直, 那么它也和这条斜线在平面上的射影垂直.

三垂线定理及其逆定理, 用数学符号表示如下(如图14-14):

三垂线定理:

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp \text{平面 } \alpha \text{ 于 } B \\ AC \cap \alpha = C \\ a \subset \alpha, a \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp AC$$

逆定理:

$$\left. \begin{array}{l} AB \perp \text{平面 } \alpha \text{ 于 } B \\ AC \cap \alpha = C \\ a \subset \alpha, a \perp AC \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp BC$$

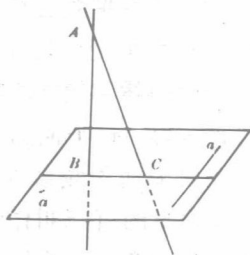


图14-14

四、平面与平面的位置关系

1. 位置关系

平面与平面相交——有一条公共直线(图14-15).

平面与平面平行——没有公共点(图14-16).

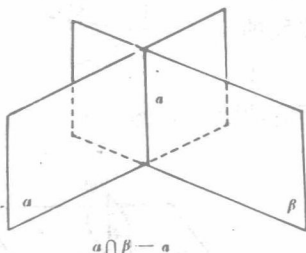


图14-15

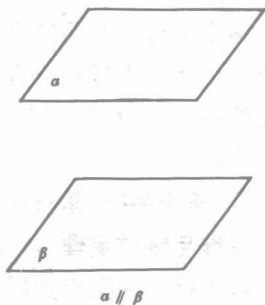


图14-16

2. 有关概念

(1)二面角 从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫做二面角。这条直线叫二面角的棱。如图14-17, 记作: 二面角 $\alpha - AB - \beta$, 或二面角 AB , 或二面角 $\alpha\beta$, 或 $\angle(\alpha, \beta)$ 。

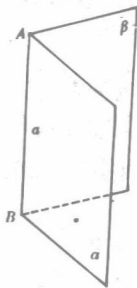


图14-17

(2)二面角的平面角 以二面角的棱上任意一点为端点, 在两个半平面上分别引垂直于棱的两条射线, 这两条射线所成的角叫做二面角的平面角。如图14-18, $\angle AOB$ 叫做二面角 $\alpha\beta$ 的平面角。其大小与点 O 在棱上的位置无关。二面角的大小可用它的平面角来度量。

(3)直二面角 平面角是直角的二面角叫做直二面角。

(4)两平面垂直的定义 两个平面相交,如果所成的二面角是直二面角,则称这两个平面互相垂直(图14-19)。

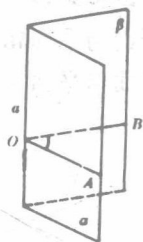


图14-18

(5)两个平行平面间的距离 夹在两个平行平面间的公垂线段的长或一个平面上任意一点到另一个平面的距离叫做两个平行平面间的距离。

五、关于平行、垂直的判定定理与性质定理

1. 平行的判定与性质

(1)直线与平面

①平行的判定定理 如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行,那么这条直线和这个平面平行,可简述为:线线平行,线面平行(图14-20)。

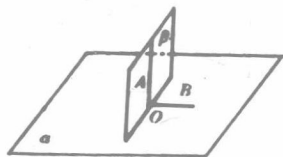


图14-19

$$\left. \begin{array}{l} a \parallel b \\ a \not\subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel \alpha$$

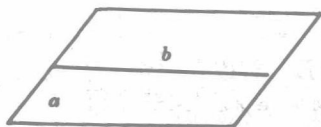


图14-20

②平行的性质定理 如果一条直线和一个已知平面平行,那么过这条直线的平面和这个已知平面的交线必和这条直线平行,可简述为:线面平行,线线平行(图14-21)。

$$\left. \begin{array}{l} a // \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$$

注 “ $\Rightarrow$ ”表示推出的意思。“ $\Rightarrow$ ”的左边是给出的条件，“ $\Rightarrow$ ”的右边是推出的结论。

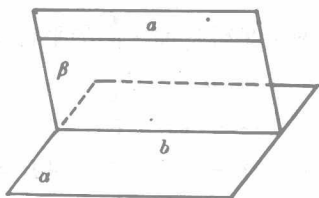


图14-21

(2)平面与平面

①平行的判定定理 如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行(图14-22)。

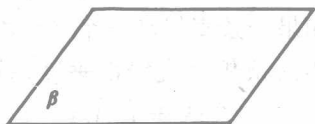
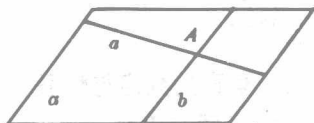


图14-22

$$\left. \begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \cap b = A \\ a // \beta \\ b // \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha // \beta$$

②平行的性质定理1 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行(图14-23)。

$$\left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array} \right\} \Rightarrow a // b$$

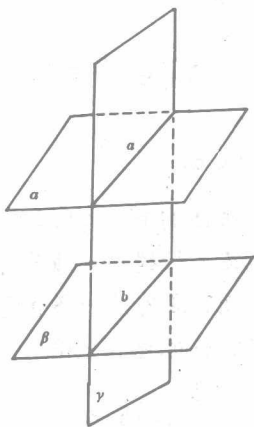


图14-23

平行的性质定理2 夹在

两个平行平面之间的平行线段相等(图14-24).

$$\left. \begin{array}{l} \alpha // \beta \\ AB // CD \\ A \in \alpha \\ C \in \alpha \\ B \in \beta \\ D \in \beta \end{array} \right\} \Rightarrow AB = CD$$

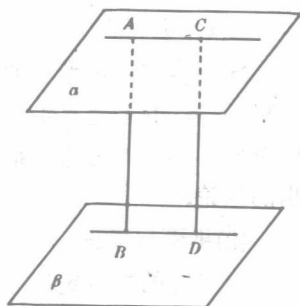


图14-24

2. 垂直的判定与性质

(1) 直线与平面

① 垂直的判定定理1

如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线垂直于这个平面.(图14-25)

$$\left. \begin{array}{l} l \perp a \\ l \perp b \\ a \cap b = A \\ a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow l \perp \alpha$$

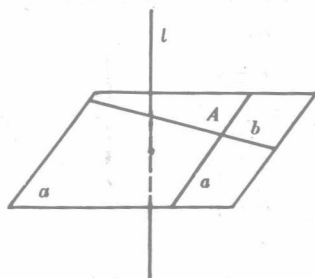


图14-25

垂直的判定定理2 如果两条平行线之一垂直于一个平面, 那么另一条也垂直于这个平面(图14-26).

$$\left. \begin{array}{l} a // b \\ a \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow b \perp \alpha$$

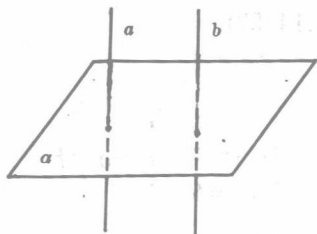


图14-26

②垂直的性质定理 如果两条直线同垂直于一个平面,那么这两条直线平行,即垂直于同一个平面的两条直线平行.(图14-27)

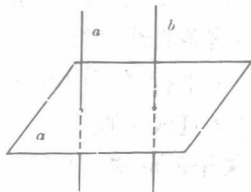
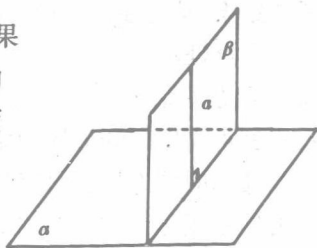


图14-27

$$\left. \begin{array}{l} a \perp \alpha \\ b \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \parallel b$$

(2)平面与平面

①垂直的判定定理 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线,那么这两个平面垂直(图14-28).



$$\left. \begin{array}{l} a \subset \beta \\ a \perp \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$$

②垂直的性质定理 如果两个平面垂直,那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.(图14-29)

图14-28

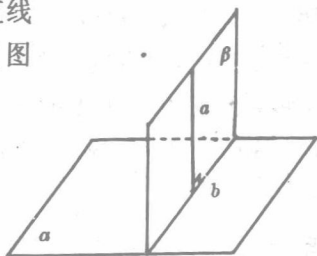


图14-29

$$\left. \begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ \alpha \cap \beta = b \\ a \subset \beta \\ a \perp b \end{array} \right\} \Rightarrow a \perp \alpha$$

3.其他性质

①垂直于同一直线的两个平面平行

②平面及平面外的一条直线同垂直于另一条直线,则这个平面与这条直线平行。

③两个平行平面中的一个与一条直线垂直,则另一个平面也和这条直线垂直。

六、关于反证法

在对某个数学命题进行证明时,先假设结论的反面成立,然后从命题的已知条件和结论的反面出发,通过正确的逻辑推理,推导出和已知定义或公理或定理或命题的已知条件等相矛盾的结果,从而断定原命题的结论必定成立。这种间接证明方法叫做反证法。

如果命题的结论的反面只有一个,则证明过程只须否定这一反面就可断定所证命题的结论成立。

如果命题的结论的反面有几个,则必须逐一否定,才可断定命题的结论成立。例如,原命题的结论为 $a > b$ 。在使用反证法时,先假设(即反设) $a = b$,推得矛盾后,再假设 $a < b$,也推得了矛盾,即 $a > b$ 的反面都给否定了,这时方可断定命题的结论成立。

说明 进行“反设”可以在开始进行,也可以在中间进行,还可以在最后进行。用直接证法难以证明的一些问题,使用了反证法却可很容易得到解决,这主要是“反设”后,已知条件增多的缘故。这就是说,“反设”后进行推理时,“反设”也变成了已知条件。

[例题分析与解题指导]

一、基本概念的理解

例1 求证:两两相交且不过同一点的三条直线必在同一平面内。