

主编宏宇

初中数学

一年級

发散思维辅导

CHU ZHONG SHUXUE
FASANSIWEI
FUDAO

安徽教育出版社

初中数学发散思维辅导

初中一年级

(代数·几何)

主编：宏宇

编写：宏宇 胡定华

孙明同 余茂迪

安徽教育出版社

责任编辑:王宏金 武常春

封面设计:牛 昕

初中数学发散思维辅导

一年级

安徽教育出版社出版发行

(合肥市跃进路1号)

新华书店经销 合肥晓星印刷厂印刷

合肥南方激光照排部照排

*

开本 787×1092 1/32 印张 12.75 字数 270 000

1996年5月第1版 1998年3月第4次印刷

印数:55 001—105 000

ISBN 7-5336-1933-1/G·2469

定价:10.00元

若发现印装质量问题,影响阅读,请与承印厂联系调换

前 言

发散思维作为一个新的教研课题,已受到广大师生的高度重视.发散思维即求异思维,它的图示就是从一点出发,向思维空间发出的一组射线,犹如夜空中一道道闪电,激发学生思维的火花.

发散思维具有多向性、变异性、独特性的特点,即思考问题时注重多途径、多方案,解决问题时注重举一反三、触类旁通,这与数学知识的思维特征极为相似,因此在中学阶段,结合数学教学,正确培养和发展学生的发散思维,对造就创造型人才,至关重要.

有鉴于此,我们编写了这套《初中数学发散思维辅导》.全书紧扣教学大纲和现行数学课本按年级分成三册,各册书均按现行课本章节编写,每章均由:知识系列、发散点分析、发散思维辅导、基础性发散思维训练题、提高性发散思维训练题五部分组成.

训练题大多是围绕下述各种发散思维形式,对课本中的习题加以改造而设置的.家长借此可检查学生对课本各章节知识的掌握程度;学生借此可以评估课堂学习效果.

全书的结构框架如下:

知识系列——将课本各章知识加以归纳、概括,为引导学生展开发散思维首先奠定基础.

发散点分析——指明各章知识网络中进行发散思维的“结点”,启发和诱导学生逐步进入发散思维空间.

发散思维辅导——借助具体实例,采用题型发散、解法发散、纵横发散、变形发散、变更命题发散、转化发散、迁移发散、构造发散、逆向发散、组合发散、分解发散、综合发散等多种形式,对学生进行多思、多解、多变的解题辅导.题型发散是将由发散点出发的典型问题,变换其题型,进行发散思维;解法发散则通过一题多解、一题多变、一题多得的发散思维;纵横发散是通过两个或多个发散点间的联系,以及发散点与其它知识间的联系,借助例题形成发散思维;变形发散通过代数式、方程、不等式、函数

等形式的改变,达到变繁为简,化难为易,直到问题解决的发散思维;变换发散是适当地运用对称、平移、旋转、位似、等积等几何变换,将那些分散、远离的条件从图形的某一部位转移到适当的新位置上,得以相对地集中,从而发现解题的思路,达到巧妙解题目目的发散思维;变更命题发散是通过变更命题的形式,或维持原命题的条件而改变结论,或改变原命题的条件,维持原结论不变,或同时改变原命题的条件、结论来进行发散思维训练;转化发散是通过保持原命题的实质而变换其形式来进行发散思维训练;迁移发散是利用数式、图形在不同的数学学科中的不同含义与等价形式,把一个分科里的公式、定理、原则或方法,巧妙地迁移到另一个分科中,达到化繁为简的目的而进行的发散思维;构造发散是恰当地构造出某些元素(如数、式、方程、函数、数轴及几何图形),使问题得以解决的一种发散思维;逆向发散是由目标至条件的定向思考的一种发散思维;组合发散是拾零为整,通过整体构思,发挥整体功能的发散思维;分解发散是把一个命题分解成一些单纯命题并逐个加以分析和解决的发散思维;综合发散是通过教材各章发散点之间的联系,数学各科之间的相互联系,数学与其它学科之间的联系来进行发散思维训练.

本套书可作为三年制、四年制初中生学习数学的辅导读物,也可供初中数学教师作为教学参考读物.本书由宏宇主编,宏宇、胡定华、孙明同、余茂迪等编著的.结合现行教材编著发散思维读物是一种新的尝试,资料匮乏,书中谬误不妥之处难免,敬请广大师生批评指正.

编者

1996年3月

代数部分

目 录

代数部分

第一章 代数初步知识	1
知识系列	1
发散点分析	3
发散思维辅导	5
基础性发散思维训练题	18
提高性发散思维训练题	27
第二章 有 理 数	36
知识系列	36
发散点分析	39
发散思维辅导	41
基础性发散思维训练题	68
提高性发散思维训练题	75
第三章 整式的加法	84
知识系列	84
发散点分析	85
发散思维辅导	86
基础性发散思维训练题	96
提高性发散思维训练题	102
第四章 一元一次方程	111
知识系列	111
发散点分析	113
发散思维辅导	115

基础性发散思维训练题	132
提高性发散思维训练题	140
第五章 二元一次方程组	150
知识系列	150
发散点分析	152
发散思维辅导	154
基础性发散思维训练题	172
提高性发散思维训练题	184
第六章 一元一次不等式和一元一次不等式组	196
知识系列	196
发散点分析	199
发散思维辅导	200
基础性发散思维训练题	208
提高性发散思维训练题	212
第七章 整式的乘除	216
知识系列	216
发散点分析	218
发散思维辅导	219
基础性发散思维训练题	229
提高性发散思维训练题	233

几何部分

第一章 线段、角	241
知识系列	241
发散点分析	243
发散思维辅导	246
基础性发散思维训练题	262
提高性发散思维训练题	269
第二章 相交线、平行线	279

知识系列	279
发散点分析	281
发散思维辅导	285
基础性发散思维训练题	301
提高性发散思维训练题	314
答案、提示与简解	332
代数部分	332
几何部分	381

第一章 代数初步知识

知 识 系 列

一、代数式

1. 代数式的概念

用基本的运算符号(指加、减、乘、除以及以后要学的乘方、开方)把数或表示数的字母连结而成的式子叫做代数式. 数的一切运算规律也适用于代数式.

(1) 加法交换律: 两个数相加, 交换加数的位置, 和不变. 即 $a+b=b+a$.

(2) 加法结合律: 三个数相加, 先把前两个数相加, 或者先把后两个数相加, 和不变. 即 $(a+b)+c=a+(b+c)$.

(3) 乘法交换律: 两个数相乘, 交换因数的位置, 积不变. 即 $ab=ba$.

(4) 乘法结合律: 三个数相乘, 先把前两个数相乘, 或者先把后两个数相乘, 积不变. 即 $(ab)c=a(bc)$.

(5) 分配律: 一个数同两个数的和相乘, 等于把这个数分别同这两个数相乘, 再把积相加. 即 $a(b+c) = ab+ac$.

2. 列代数式

能把简单的与数量有关的词语用代数式表示出来叫做列代数式.

3. 代数式的值

能用具体数值代替代数式中的字母, 按照代数式指明的计算, 计算出的结果就叫做代数式的值.

4. 公式

表示一些常用的、基本的数量关系的等式叫做公式. 常用的公式有

(1) 速度公式 $v = \frac{s}{t}$. (其中 s 表示路程, t 表示时间, v 表示速度)

(2) 正方形的周长公式

$$L = 4a. \quad (L \text{ 表示周长, } a \text{ 表示正方形的边长})$$

(3) 正方形的面积公式

$$S = a^2. \quad (S \text{ 表示正方形的面积, } a \text{ 表示边长})$$

(4) 长方形的周长公式

$$L = 2(a+b). \quad (a \text{ 表示长方形的长, } b \text{ 表示其宽})$$

(5) 长方形的面积公式

$$S = ab. \quad (a \text{ 表示长方形的长, } b \text{ 表示其宽})$$

(6) 梯形的面积公式

$$S = \frac{1}{2}(a+b)h. \quad (a \text{ 表示梯形的下底, } b \text{ 表示其上底, } h \text{ 表示梯形的高})$$

(7) 正方体的体积公式

$$V = a^3. \quad (V \text{ 表示正方体的体积, } a \text{ 表示其边长})$$

(8) 长方体的体积公式

$$V = abc. \quad (a、b、c \text{ 分别表示长方体的长、宽、高})$$

(9) 圆的周长公式

$$C = 2\pi R. \quad (C \text{ 表示圆的周长, } R \text{ 表示其半径, } \pi = 3.14 \text{ 是圆周率})$$

(10) 圆的面积公式

$$S = \pi R^2. \quad (S \text{ 表示圆的面积, } R \text{ 表示其半径})$$

(11) 圆柱的体积公式

$$V = \pi R^2 h. \quad (R \text{ 表示底圆半径, } h \text{ 表示圆柱上底至下底的高})$$

(12) 圆锥的体积公式

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 h. \quad (R \text{ 表示圆锥中底圆的半径, } h \text{ 表示其高})$$

(13) 储蓄的利息公式.

$$\text{本息和} = \text{本金} + \text{本金} \times \text{利率} \times \text{期数}$$

二、简易方程

1. 方程的有关概念

(1) 方程

含有未知数的等式叫做方程.

(2) 方程的解

使方程左右两边相等的未知数的值, 叫做方程的解.

(3) 解方程

求方程解的过程叫做解方程.

2. 解简易方程的方法

(1) 在方程等号两边同加上(或减去)某一个数.

(2) 在方程等号两边同乘以(或除以)某一个不为零的数.

发散点分析

本章发散点是代数式、公式及简易方程.

算术与代数是研究数的学科, 算术仅用数字表示特殊的数, 代数则用字母表示普遍的数. 用字母代表数, 列出代数式, 这是一个由特殊到一般的过程; 用具体的数代替代数式里的字母进行计算, 求出代数式的值, 这是一个由一般到特殊的过程. 这种特殊与一般的互相转化, 是数学中重要的方法. 本章安排一定数量的题型发散、解法发散和其它类型的发散思维题. 题型发散可增大知识点的覆盖面, 训练计算的正确性和熟练程度, 培养严密的逻辑推理能力及简明、正确的书面表达能力, 解法发散培养思维的流畅性、灵活性和独创性, 使学生得到一题多解、一题多变、一题多得的训练. 现将与发散点有关的知识内容及数学方法剖析如下:

一、准确理解代数式

代数式中包含数量关系及运算顺序关系, 用代数式表示数学语句, 首先要理解语句中各种数量的意义及相关关系, 用适当的字母表示各种数量, 然后将字母及数用适当的运算符号连接起来, 从而把相应的数量关系表示出来. 要注意单独的一个数(或字母)也叫代数式. 准确理解代数式应掌握:

1. 与运算顺序有关的关键词语

例如两数差的平方，两数的平方差，前者是先减再平方，后者是先平方，再相减。

2. 与运算符号有关的关键词语

要正确掌握大、小、多、少、倍、几分之几等词的意义。比如 x 大 5 的数是 $x+5$ ；比 p 少 30% 的数是 $p-p \cdot 30\%$ 。

3. 一式多叙

如代数式 $\frac{ab}{a-b}$ ，可叙述为：

a 、 b 两数之积除以 a 、 b 两数之差；

a 、 b 两数之积与 a 、 b 两数之差的商；

a 、 b 两数之差除 a 、 b 两数之积；

a 、 b 两数之积与 a 、 b 两数之差的比。

二、求代数式值的一般步骤及注意事项

求代数式值的一般步骤是化简代数式，再将已知数值代入，最后计算求值。求代数式值时应注意：

1. 代数式的值是由代数式里字母所取的值确定的。当代数式里字母取不同值时，代数式的值也随之变化。

2. 代数式的字母取值，不应当使代数式和它所表示的实际问题失去意义。

如代数式 $\frac{5}{2x}$ 中， x 不能取零。即 $x \neq 0$ 。

又如圆周长 $2\pi R$ ， R 不能取负数或者零。即 $R > 0$ 。

3. 解简易方程要养成验算的好习惯。

发散思维辅导

一、代数式

例 1

用代数式表示：

- (1) 全体奇数； (2) 全体偶数； (3) 四个连续自然数；
(4) 三个连续奇数；三个连续偶数； (5) 一个四位数，它的个位数字是 a ，十位数字是 b ，百位数字是 c ，千位数字是 d 。

解析 (1) $2n-1$ (n 是整数)；

(2) $2n$ (n 是整数)；

(3) $n, n+1, n+2, n+3$ (n 是自然数，且 $n \geq 1$)；

(4) $2n-3, 2n-1, 2n+1$ (n 是整数)；

$2(n-1), 2n, 2(n+1)$ (n 是整数)；

(5) $d \times 10^3 + c \times 10^2 + b \times 10 + a$ (a, b, c 均是 0 到 9 中的一个整数， d 为 1 到 9 的一个整数)。

• 题型发散 •

发散 1 判断题 答案正确的在括号内打“√”号，不正确的在括号内打“×”号。

- (1) 单独的一个字母，像 m, p 是代数式。 ()
(2) 单独的一个数，像 0, $|0|$ 等不是代数式。 ()
(3) $m+n=n+m$ 是代数式。 ()
(4) 代数式 $(a-b)^2$ 与 a^2-b^2 的意义是相同的。 ()
(5) 如果两个数的积是 30，其中一个数用字母 x 表示，表示这两个数和的代数式是 $\frac{30+x}{x}$ 。 ()

解析 因为一个字母或数都可以表示代数式，故 (1) 打“√”号。

(2) 打“×”号.

(3) 中表示等式, 故 (3) 打“×”号.

(4) 中 $(a-b)^2$ 表示 a 、 b 两数之差的平方, a^2-b^2 表示 a 、 b 两数的平方差, 故这两个代数式的意义不同, 故 (4) 打“×”号.

(5) 中两数之积是 30, 其中一个数是 x , 另一个数是 $\frac{30}{x}$, 故其两数之和为 $x + \frac{30}{x} = \frac{x^2+30}{x}$, 这与代数式 $\frac{30+x}{x}$ 不同, 故 (5) 打“×”号.

发散 2 填空题

(1) 字母 m 表示一个数, 用代数式表示:

① 比这个数小 3 的数的 $\frac{3}{5}$ 倍 _____;

② 比这个数大 3 的数与比这个数小 5 的数的比 _____.

(2) 一个三位数的百位数字为 8, 十位数字为 x , 个位数字为 y .

① 这个三位数为 _____;

② 把它的三位数字的顺序颠倒过来, 所得的三位数是 _____.

(3) 用字母表示:

① 同分母分数的加法法则: _____;

② 同分母分数的减法法则: _____.

(4) ① 把若干本书分给 x 个学生, 若每人分得的本数比人数少 5 个, 用含 x 的代数式表示这些书的总数: _____;

② 把 p 本书分给若干个学生, 若每人分得 5 本书, 尚余 3 本, 用含 p 的代数式表示学生数: _____.

解析 (1) 用字母 m 表示这个数.

① 比这个数小 3 的数为 $m-3$, 比这个数小 3 的数的 $\frac{3}{5}$ 倍表示 $m-3$ 的 $\frac{3}{5}$ 倍, 即 $\frac{3}{5}(m-3)$.

② 比这个数大 3 的数为 $m+3$,

比这个数小 5 的数为 $m-5$, 前后之比为 $\frac{m+3}{m-5}$.

(2) 一个三位数的百位数为 8, 即 800, 十位数字为 x 即 $10x$, 个位数为 y , 即 y .

① 这个三位数为 $800+10x+y$.

② 把原三位数的三个数字的顺序颠倒过来, 即 y 是百位数为 $100y$, x 是十位数为 $10x$, 8 是个位数为 8, 故所得的三位数是 $100y+10x+8$.

(3) ① 同分母分数的加法法则为分母不变, 分子依次相加, 即 $\frac{p}{a} + \frac{q}{a} = \frac{p+q}{a}$.

② 同分母分数的减法法则为分母不变, 分子依次相减, 即 $\frac{p}{a} - \frac{q}{a} = \frac{p-q}{a}$.

(4) ① 有 x 个学生, 每人分得的本数比人数少 5, 即 $x-5$ 个, 故这些书的总数为 $(x-5)x$.

② 所求的学生数为 $\frac{p}{5} - \frac{3}{5} = \frac{p-3}{5}$.

发散 3 选择题 把下列各题中正确答案的代号填入题中的括号内.

(1) 如果两个数的和是 100, 其中一个数用字母 a 表示, 那么 a 与另一个数之积的代数式为 ().

- (A) $a(100+a)$ (B) $a(a-100)$
(C) $100a$ (D) $a(100-a)$

(2) 一个数 m 增加它的 10% 后得到 n , 则 n 是 ().

- (A) $m(1+10\%)$ (B) $m+10\%$
(C) $m(1-10\%)$ (D) $m \cdot 10\%$

(3) 如果 x 是一个三位数. 现在把数字 6 放在它的右边, 得到一个四位数, 这个四位数是 ().

- (A) $1000x+6$ (B) $100x+6$
(C) $10x+6$ (D) $x+6$

(4) 某校初一年级共有四个班, 甲班共有 a 人语文平均得 x 分, 乙班共有 b 人语文平均得 y 分, 丙班共有 c 人语文平均得 z 分, 丁班共有 d 人语文平均得 w 分. 那么该校初一年级语文平均得分为 ().

$$(A) \frac{x+y+z+w}{a+b+c+d} \quad (B) \frac{ax+by+cz+dw}{4}$$

$$(C) \frac{x+y+z+w}{4} \quad (D) \frac{ax+by+cz+dw}{a+b+c+d}$$

解 (1) 已知两个数的和为 100, 其中一个数是 a , 那么另一个数为 $100-a$, 故此两数之积为 $(100-a)a$. 应选(D).

(2) 一个数 m 在原有基础上增加它的 10% 得 $m+m10\%$, 故本题应选(A).

(3) 若 x 是一个三位数, 将数字 6 放在它的右边, 这样就得到一个四位数, 原来的三位数 x 扩大 10 倍后加 6 即 $10x+6$. 故本题应选(C)

(4) 求某校初一年级四个班的语文平均成绩, 首先要求出四个班学生语文的得分总数, 然后再除以四个班的学生总数.

四个班学生语文的得分总数为: $ax+by+cz+dw$,

四个班的学生总数为: $a+b+c+d$.

初一年级语文的平均分为 $\frac{ax+by+cz+dw}{a+b+c+d}$.

故本题应选(D).

发散 4 解答题 用代数式表示下列问题的答案.

(1) 甲、乙二人从同一地点出发, 甲每小时走 a 千米, 乙每小时走 b 千米 ($b < a$). 用代数式表示:

① 反向行走 t 小时, 两人相距多少千米? ② 同向行走 t 小时, 两人相距多少千米? ③ 反向行走, 甲比乙早出发 m 小时, 乙走 n 小时, 两人相距多少千米? ④ 同向行走, 甲比乙晚出发 m 小时, 乙走 n 小时 ($n > m$), 两人相距多少千米?

解析 本题是行程问题. ① 二人从同一地点出发, 反向而行, t 小时后两人之间的距离为两人所走路程之和, 得 $(a+b)t$ 千米 (或 $at+bt$ 千米).

② 二人从同一地点出发, 同向而行, t 小时后两人之间的距离为两人所走路程之差得 $(a-b)t$ 千米 (或 $at-bt$ 千米).

③ 反向而行, 甲比乙早出发 m 小时, 故甲先走 ma 千米, 然后甲、乙又同时走 n 小时, 甲又走 na 千米, 乙走 nb 千米. 这时甲、乙二人之间