(新编)

数学的内容方法与技巧

丛书

12

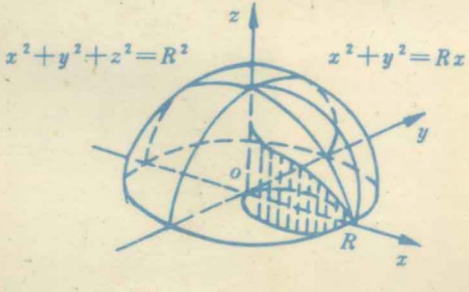
高等数学的内容、方法与技巧

(第三卷) 第二分册

GAODENG SHUXUE

高等数学(下)

主编 张运权 穆汉林
詹前涌 范允正



武汉测绘科技大学出版社

武汉测绘科技大学出版社

(新编)数学的内容、方法与技巧 丛书

陈森林 黄光谷 陈传理 宋 阳 钱吉林 等主编

第一卷 (新编)初中数学的内容、方法与技巧

1. 第一分册 初中代数(上) 主编 甘家炎 等
2. 第二分册 初中代数(下) 刘克全 等
3. 第三分册 平面几何(上) 彭启绵 等
4. 第四分册 平面几何(下) 周淑芳 等
5. 第五分册 初中数学复习 王昇平 等

第二卷 (新编)高中数学的内容、方法与技巧

6. 第一分册 高中代数(上) 主编 邱应麟 等
7. 第二分册 高中代数(下) 虞天明 等
8. 第三分册 立体几何 陈 喜 等
9. 第四分册 平面解析几何 张希舜 等
10. 第五分册 高中数学复习 周世俊 等

第三卷 (新编)高等数学的内容、方法与技巧

11. 第一分册 高等数学(上) 主编 黄伟策 等
12. 第二分册 高等数学(下) 张运权 等

ISBN 7-81030-340-6

9 787810 303408 >

ISBN 7-81030-340-6/O · 32

定价:8.10 元

（新编）高等数学的内容、方法与技巧

——高等数学（下）

主　编　张运权　穆汉林　詹前涌　范允正
副主编　陈津汉　朱倩军　陈芸芸　宋占奎
主　审　陈永娥　汪成伟　黄光谷
编　委　（以姓氏笔划为序）
汤跃宝　张家琏　柯　云　俞国华
黄德荣

武汉测绘科技大学出版社

（鄂）新登字第 14 号

图书在版编目（CIP）数据

高等数学 第二分册/张运权等主编. 一武汉：武汉测绘科技大学出版社，1994. 8

（新编数学的内容、方法与技巧丛书/黄光谷等主编；第三卷·新编高等数学的内容、方法与技巧/黄光谷等主编）

ISBN 7-81030-340-6/O·32

Ⅰ.高…

Ⅱ.张…

Ⅲ.高等数学-内容-方法-技巧

Ⅳ.O13

武汉测绘科技大学出版社出版发行

（430070 武昌珞喻路 39 号）

丹江口市印刷厂印刷

1994 年 8 月第 1 版 1995年 3 月第 2 次印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 13.5 字数 310 千字

印数：6201 -- 11200 定价：8.10 元

《(新编)数学的内容、方法与技巧》丛书

名誉主编　陈森林
Ⓒ总　主　编　黄光谷　陈传理　宋　阳　钱吉林
副总主编　(以姓氏笔划为序)
车新发　甘家炎　邱应麟　刘汉文
刘克全　陈　喜　张运权　张希舜
周世俊　周淑芳　黄伟策　彭启绵

第三卷　(新编)高等数学的内容、方法与技巧

主　　编　黄光谷　钱吉林　陈永娥
副　主　编　汪成伟　穆汉林　柯　云

内 容 提 要

本书是《(新编)数学的内容、方法与技巧》丛书第三卷第二分册，内容以教学大纲为依据，与《高等数学》通用教材同步，以提炼数学方法为主，包括多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程等几章，各章(或节)分为知识要点、释疑解难、范例分析、复习题与自测题几大部分，各章末专有一节小结与综合例题，书末专有一章总复习并配有期末试题三套、且附有各类题目的答案及提示等。本书可供大、专学生和自学者作为学习《高等数学》课程的参考书阅读和教师参考。

序

我怀着喜悦的心情为《(新编)高等数学的内容、方法与技巧》一书作序。虽然近年来有关高等数学的教学参考书籍已有不少，但《(新编)高等数学的内容、方法与技巧》的出版，实不显多余和重复，因为该书集众家之长，并具有自己的特色，表现在如下三个方面。

一、此书的作者在高等院校从事高等数学教学多年，具有较丰富的教学经验。编写此书，可以说是他们耕耘在高等数学教学园地上辛勤劳动的结晶。

二、此书紧扣现行高等院校所使用的《高等数学》教材，是配合该教材的一本较好的教与学的辅导书。

三、此书考虑到不同层次的要求。由于该书是根据国家教委制订的高等工业院校《数学课程教学基本要求》及《1994年全国工学硕士研究生入学考试数学考试大纲》的要求编写的，所以既能作为高等工业院校各专业的本(专)科学生学习高等数学的自学辅导或习题课教材，也能作为报考工科、理科及经济类硕士研究生的高等数学复习资料之用。

由于此书具备以上三大特点，我相信它的出版定能受到众多的大学生，自学者及大学教师，工程技术人员等的欢迎和青睐，它将为高等数学教材建设的百花园中又增添一株奇葩。

华中理工大学教授 林少庭

一九九四年三月　武汉

前　言

国家要实现四个现代化，关键在人才。而人才来自教育。数学教育是教育事业的重要组成部分。不少学生和自学者视学习数学为畏途，虽日夜苦学，然而不得要领。这套丛书就是为了帮助读者解决学习数学的困难而编写的，凝聚了160多位编审者多年的教学经验和良苦用心。

全套丛书包括三卷，即(新编)初中、高中、高等数学的内容、方法与技巧，共12个分册(详见封底)。各分册与新编数学课本同步，可与新课本配套使用。各章(或节)按几大部分编写，力求做到：知识要点提纲挈领，便于读者简明扼要、系统地掌握有关基础知识；范例分析题型典型，有分析引导或注释说明，可培养读者的基本技能；教学要求与重点、难点便于指导教师教与学生学；释疑解难抓到要害，恰到好处，能解决读者在学习中遇到的疑难问题；精编习题等能覆盖并便于学生巩固所学的数学内容与方法；复习章便于教师与学生作为期末复习的教材。

编写这套丛书得到武汉测绘科技大学出版社，国家教委高校工科数学课程教学指导委员会委员、《应用数学》杂志副主编兼编辑部主任林化夷教授，华中师大一附中李水生校长，武汉市洪山区教委贺贤座副主任等人的关心和支持，在此我们对他们表示衷心的感谢！

由于我们的水平有限，加上时间仓促，书中可能有不妥之处，恳请读者多提宝贵意见，以便再版时修改。

编　者

1994年3月

目　录

第八章 多元函数微分法及其应用

第一节 多元函数及其极限与连续

知 识 要 点

一、内容提要

1. 多元函数的定义

设 D 是平面上的一个点集. 如果对于每个点 $P(x,y)\in D$, 变量 z 按照一定法则总有确定的值和它对应, 则称 z 是变量 x,y 的**二元函数**(或点 P 的函数), 记为

$$z=f(x,y).$$

D 称为该函数的**定义域**, x、y 称为**自变量**, z 称为**因变量**.

类似地, 可以定义三元函数, 四元函数……. 二元及二元以上函数, 统称为**多元函数**.

2. 二元函数的极限

1)聚点: 设 E 是平面上的一个点集, P 是平面上的一个点, 如果点 P 的任一邻域内总有无限个点属于点集 E, 则称 P 为 E 的**聚点**.

2)定义 1　设函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的聚点, 若对于任意给定的正数 ε, 总存在正数 δ, 使得对于适合不等式

$$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

的一切点 $P(x,y)\in D$, 都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $z=f(x,y)$ 当 $x\to x_0$，$y\to y_0$ 时的**极限**，记作

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad 或 \quad f(x,y)\to A \quad (\rho\to 0),$$

其中 $\rho=|PP_0|$.

3)定义 1′　设函数 $u=f(P)$ 的定义域为点集 D，P_0 为 D 的聚点，若对于任意给定的正数 ε，总存在正数 δ，使得对于适合不等式

$$0<|PP_0|<\delta$$

的一切点 $P\in D$，均有

$$|f(P)-A|<\varepsilon$$

成立，则称 A 为函数 $f(P)$ 当 $P\to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A. \quad 或 \quad f(P)\to A \quad (P\to P_0).$$

上述极限称为二重极限，若定义 1′中的点 P 为 n 维空间的点，则定义 1′为 n 重极限的定义.

4)累次极限

设 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 的某个邻域内有定义(点 P_0 可以除外)，若 i)极限 $\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$ 存在，设为 $F(x)$；ii)极限 $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)$ 存在记为 A，则称 A 为函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 处的累次极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A.$$

类似地，可定义另一个累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$.

3. 二元函数的连续性

1)定义　设二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域为 D，P_0 是

D 的聚点且 $P_0 \in D$. 若

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0),$$

则称函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处**连续**.

若 $f(x,y)$ 在区域 D 内每一点都连续,则称函数 $z = f(x,y)$ 是 D 内的**连续函数**.

函数的不连续点称为**间断点**.

2)连续函数的性质

1°连续函数的和、差、积仍为连续函数. 当分母不为零时,连续函数的商也为连续函数.

2°连续函数的复合函数仍为连续函数.

3°一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

4°(最大值、最小值定理)有界闭区域 D 上的多元连续函数,在 D 上至少取得一次最大值和一次最小值.

5°(介值定理)有界闭区域 D 上的多元连续函数,如果在 D 上取得两个不同的函数值,则它在 D 上取得介于这两个值之间的任何值至少一次. 特殊地,如果 μ 是函数的最小值与最大值之间的一个数,则在 D 上至少有一点 P_0 使 $f(P_0) = \mu$.

二、基本要求与重点、难点

1. 基本要求

(1)理解多元函数的概念,会求二元函数的定义域;

(2)知道二元函数的极限、连续性等概念,以及有界闭区域上连续函数的性质,会求二元函数的极限.

2. 重点:二元函数的极限与连续.

3. 难点:论证与计算二元函数的极限.

释 疑 解 难

1. 二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 与累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$）是否是一回事？

答 不是一回事. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$ 是当 $P(x,y)$ 以任何方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 的极限. 而累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{x\to x_0} f(x,y)$（或 $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{y\to y_0} f(x,y)$）本质上属于一元函数极限的范畴，是接连两次求一元函数的极限，也就是先把 $f(x,y)$ 中的 y（或 x）看作不变，对 x（或 y）求极限，再将所得到的结果对 y（或 x）求极限.

二重极限与累次极限之间的关系比较复杂，归结起来，有以下情况.

1)两个累次极限存在且相等不能保证二重极限存在. 例如

$$f(x,y)=\frac{xy}{x^2+y^2}\quad (x^2+y^2\neq 0),$$

虽然 $\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=0$，但由于

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

知二重极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 不存在.

2)二重极限存在，不能保证两个累次极限存在. 例如

$$f(x,y)=x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\quad (xy\neq 0),$$

因 $\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant |x|+|y|\leqslant 2\sqrt{x^2+y^2}$,

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \varepsilon/2$，当 $0 < \sqrt{x^2+y^2} < \delta$ 时，有 $|f(x,y) - 0| < \varepsilon$，所以二重极限 $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} f(x,y)$ 存在.

但由于 $\lim\limits_{x \to 0} x\sin\dfrac{1}{y} = 0$，而 $\lim\limits_{x \to 0} y\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在，于是极限 $\lim\limits_{x \to 0}\left(x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}\right)$ 不存在，从而累次极限 $\lim\limits_{y \to 0}\lim\limits_{x \to 0} f(x,y)$ 不存在. 同理，累次极限 $\lim\limits_{x \to 0}\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)$ 也不存在.

3)二重极限与累次极限都存在则它们是相同的.

2. 求函数 $f(x,y)$ 的极限有哪些常用的方法?

答 常用的方法有：

1)利用初等函数的连续性. 若 $P_0(x_0,y_0)$ 是初等函数 $f(x,y)$ 定义区域 D 内的点，则有

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y) = f(x_0,y_0).$$

2)利用极限的性质(如四则运算，夹逼定理).

3)消去分子分母中极限为零的因子.

4)转化为一元函数的极限问题，利用一元函数中的已知极限.

5)用观察法，猜测数 A 可能是 $f(x,y)$ 的极限，再用二重极限的定义加以验证(详见范例分析).

3. 判定二重极限不存在，有哪些常用的方法?

答 据二重极限的定义，$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x,y)$ 存在，要求点 $P(x,y)$ 以任何方式趋向于点 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)$ 有相同的极限，因此，判定二重极限不存在，常用的方法有两种：

1)选取一种 $P \to P_0$ 的方式，按此种方式，极限 $\lim\limits_{P \to P_0} f(x,y)$ 不存在.

2)找出两种方式，当 P 沿这两种方式分别趋向于 P_0 时，所得的极限值不相等(详见范例分析).

4. 如果一元函数 $f(x_0,y)$ 在 y_0 处连续，$f(x,y_0)$ 在 x_0 处连续，那么二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否必连续?

答 末必连续.因为二元函数 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续是建立在二重极限的基础之上的，而 $f(x_0,y)$ 在 y_0 处连续，仅为 $P(x,y)$ 沿特定方式 $x=x_0$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)\to f(x_0,y_0)$；$f(x,y_0)$ 在 x_0 处连续仅为 $P(x,y)$ 沿特定方式 $y=y_0$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，$f(x,y)\to f(x_0,y_0)$，它不能代替 $P(x,y)$ 以任何方式趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时，均有 $f(x,y)\to f(x_0,y_0)$.因此，我们不能从 $f(x,y)$ 分别对每个变量 x，y 都连续而得出 $f(x,y)$ 一定连续的结论.如函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0;\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点 $(0,0)$ 处分别对变量 x 和 y 是连续的，但 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处是不连续的.事实上，

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(\Delta x,0)-f(0,0))=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x\cdot 0}{(\Delta x)^2+0}=0,$$

从而 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处对变量 x 是连续的.同样可得 $f(x,y)$ 在$(0,0)$处对变量 y 也是连续的，但

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{xy}{x^2+y^2}$$

不存在，从而 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不连续.

范 例 分 析

例 1 已知 $f(x+y, y/x)=x^2-y^2$，求 $f(x,y)$.

解法一 将 x^2-y^2 用 $x+y$ 与 y/x 表示.

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=(x+y)^2\frac{x-y}{x+y}$$

$$=(x+y)^2\frac{1-y/x}{1+y/x},$$

$$\therefore\quad f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}.$$

解法二 利用变量代换. 令 $u=x+y$，$v=y/x$，从中解出 $x=\dfrac{u}{1+v}$，$y=\dfrac{uv}{1+v}$. 代入所给函数，得

$$f(x+y,\frac{y}{x})=f(u,v)=\frac{u^2}{(1+v)^2}-\frac{u^2v^2}{(1+v)^2}$$

$$=\frac{u^2(1-v)}{(1+v)},$$

$$\therefore\quad f(x,y)=\frac{x^2(1-y)}{1+y}.$$

例 2 求函数 $z=\arcsin(x-y^2)+\ln[\ln(10-x^2-4y^2)]$ 的定义域.

解 $\arcsin(x-y^2)$ 有意义的区域为 $|x-y^2|\leqslant 1$，即 $y^2-1\leqslant x\leqslant y^2+1$. $\ln[\ln(10-x^2-4y^2)]$ 有意义的区域为 $10-x^2-4y^2>1$，即 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4y^2}{9}<1$. 所以函数的定义域为椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{4y^2}{9}=1$ 与抛物线 $x=y^2+$

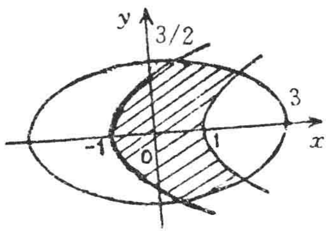


图 8—1