解三角形

主编：杨大淳

北京广播学院出版社

解 三 角 形

主　编：杨大淳
副主编：袁智国、杜其湘
编　者：石景林、耿俊杰
　　　　李文英、杨家林
　　　　周秀敏

北京广播学院出版社

1989年2月

解三角形

杨大淳、袁智国、杜其湘

北京广播学院出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京广播学院印刷厂印刷

ISBN 7-81004-114-2/G04

787×1092毫米1/32 5.6印张 126千字

1989年2月第1版1989年2月第1次印刷

印数4000册　　定价1.50元

前　言

数学是中学阶段重要的基础学科，在科学技术日益更新，数学改革不断发展的新时期，数学教学起着特殊的作用。它是基础的基础，是培养学生思维能力创造能力的有效课程。

教师如何教好这门课，学生如何学好这门课，是师生共同关心的问题。我们几位教师根据自己多年的实践体会，参照了中学数学教学中的可取的经验，以教学大纲为指针，与教材内容相适应，编写了这套丛书。近年来，数学练习题，可谓多矣，各种测试题也是名目繁多，不可胜数。但教改的宗旨是减轻负担，提高质量。教学不能以多取胜，练习切忌陈陈相因，繁琐重复的练习，使人不得要领，岂能提高学习效益？学生的学习如能拨云见日，以少胜多，在山重水复之中，寻求到柳暗花明的新境界，这就必然要找到一条可行之路。这条路，应当是既符合教材知识的逻辑联系，又掌握学生思维发展的客观规律，使学生由浅入深由近知远，逐步悟见其知，学生在掌握规律，运用规律的同时，还可不断提出创造性的见解，以新颖，科学，简洁的思考和解题发展兴趣，提高能力。

自学是中学生学习的重要手段，是为今后获取知识必备的能力，这套丛书，在培养学生自学能力，开启他们的数学灵感，做出一些尝试，同时也有利于学生在学习中建立自己的知识系统和结构。对于在校学生或知识青年的自学，对于青年教师的教学，应有一定的参考价值。

为编写这套丛书，我们特邀中学数学界有影响的老教师杨大淳先生为主编，对于初中数学教材中的难点、重点，内在联系，以及精选的习题，点拨的要点，作了多方面讨究，但我们限于教学水平，理论修养，实践经验之不足，疏漏之处在所难免，敬希同仁不吝指正。

参加编写的有袁智国，杜其湘，李文英，耿俊杰，杨家轩，周秀敏，石景林。

编　者

目　录

第一章　三角函数
§1.1　三角函数定义 …………………………… (1)
一、　三角函数定义 …………………………… (1)
二、　三角函数的符号 ………………………… (3)
§1.2　三角函数间的关系 …………………… (5)
一、　同角三角函数间的关系 ……………… (5)
二、　互为余角的三角函数间的关系 ……… (18)
三、　互为补角的三角函数间的关系 ……… (20)
§1.3　三角函数值 …………………………… (25)
一、　特殊角的三角函数值 ………………… (25)
二、　三角函数值的变化 …………………… (28)
三、　三角函数表 …………………………… (33)
第二章　解三角形
§2.1　解直角三角形 ………………………… (39)
一、　直角三角形中边与角间的关系 ……… (39)
二、　解直角三角形 ………………………… (44)
§2.2　解斜三角形 …………………………… (52)
一、　斜三角形中边与角间的关系 ………… (52)
二、　解斜三角形 …………………………… (53)
§2.3　解三角形的应用问题 ………………… (61)
一、　解直角三角形的应用举例 …………… (63)

二、 解斜三角形的应用举例 …………………… (67)
第三章 正.余弦定理和三角形面积公式的应用
§3.1 正弦定理及其应用 …………………… (77)
一、 正弦定理 …………………………………… (77)
二、 应用举例 …………………………………… (79)
§3.2 余弦定理及其应用 …………………… (85)
一、 余弦定理 …………………………………… (85)
二、 应用举例 …………………………………… (87)
§3.3 三角形面积公式及其应用 …………… (97)
一、 三角形面积公式 …………………………… (97)
二、 应用举例 …………………………………… (100)
§3.4 正余弦定理和三角形面积公式的综合应用 …………………………………… (107)
§3.5 三角形中边角恒等式的证明 ………… (114)
§3.6 确定三角形的类型 …………………… (118)
§3.7 射影定理及其应用 …………………… (121)
§3.8 三角法 ………………………………… (125)
附练习和习题答案

第一章三角函数

§1·1 三角函数定义

一、三角函数定义

设有一个角α，以它的顶点作为原点，它的始边作为x轴的正半轴，建立直角坐标系.在角α的终边上任取一点$P(x,y)$，设 P 到原点 O 的距离为r($r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}>0$)，(图1－1)则把比值 $\frac{y}{r}$，$\frac{x}{r}$，$\frac{y}{x}$，$\frac{x}{y}$分别叫做角α的正弦、余弦、正切和余切，记作

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r};$$

$$tg\alpha=\frac{y}{x};$$

$$ctg\alpha=\frac{x}{y}.$$

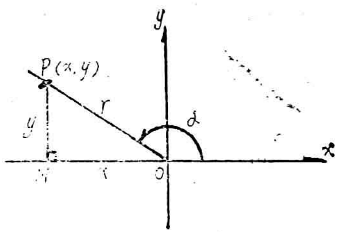

图1－1

对三角函数定义在理解上应注意以下几点：

1. 这四个比值是P点的横、纵坐标之间或者是它们之一与r的比值，而不是两条线段长度的比值

2.对于确定的角α，这四个比值都是由角α的大小唯一

确定的，而与点P在角α的终边上的位置无关。所以这四个比值都是以角α为自变量的函数。这些函数分别叫做正弦函数、余弦函数、正切函数和余切函数，统称为三角函数。

3．三角函数定义中的角α为任意角。以后我们要把角的概念进行推广，由0°到360°间的角推广到任意角（它包括任意大小的正角、负角和零角）．这里所给出的定义对任意角α都是适用的。但因目前我们学习三角函数主要是为解三角形服务的，所以现阶段关于角的范围只限于$0°\leqslant\alpha\leqslant180°$．任意角的三角函数将在高一学习。

三角函数定义是三角学的基础，三角学中的许多性质、公式和定理都是由它推导出来的。因此，我们对它必须深刻理解和熟练掌握。

〔**例1**〕：已知角α的终边经过点$P(-2,3)$，求角α的四个三角函数值。

〔**解**〕$\because x=-2, y=3$,

$$\therefore\ r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(-2)^2+3^2}=\sqrt{13},$$

$$\therefore\ sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13},$$

$$cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{-2}{\sqrt{13}}=-\frac{2\sqrt{13}}{13},$$

$$tg\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{3}{2},\quad ctg\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{2}{3}.$$

〔**例2**〕已知角α的终边上一点$P(x,y)$，$|OP|=10$，根据下列条件，分别求P点坐标$(0°<\alpha<180°)$．

$(1)cos\alpha=\frac{3}{5}$；$(2)sin\alpha=\frac{1}{2}$；$(3)tg\alpha=\frac{4}{3}$

〔解〕：(1) $\because \cos\alpha=\dfrac{3}{5}$，$r=10$，

$\therefore \dfrac{x}{10}=\dfrac{3}{5}$，即$x=6$． $\therefore y=\sqrt{r^2-x^2}=\sqrt{10^2-6^2}=8$．

$\therefore P$点坐标为$(6，8)$．

(2) $\because \sin\alpha=\dfrac{1}{2}$，$r=10$，$\therefore \dfrac{y}{10}=\dfrac{1}{2}$，即$y=5$．

$\therefore x=\pm\sqrt{r^2-y^2}=\pm\sqrt{10^2-5^2}=\pm 5\sqrt{3}$．

$\therefore P$点坐标为$(5\sqrt{3},5)$或$(-5\sqrt{3}，5)$．

(3) $\because tg\alpha=\dfrac{4}{3}$，$r=10$，

$$\therefore \begin{cases} \dfrac{y}{x}=\dfrac{4}{3} \\ x^2+y^2=100, \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} x=8 \\ y=6. \end{cases}$$

$\therefore P$点坐标为$(8，6)$．

〔注意〕：$\because 0°<\alpha<180°$，$\therefore y>0$．在解(1)、(3)两题中，对y值应据此取正舍负；而(2)中的x可为正值，也可取负值，故此题应有两解。

二、三角函数的符号

由三角函数定义，我们可以得到三角函数的符号结果。当$0°<\alpha<90°$时，角α的终边在第一象限，其上的任一点P也在第一象限，此时对$P(x，y)$，有$x>0$，$y>0$，又因$r>0$，所以四个比值均正。即有：锐角三角函数值都是正的．

当$90°<\alpha<180°$时，角α的终边在第二象限，其上的任一点P也在第二象限，此时对$P(x，y)$，有$x<0$，$y>0$，又因r

>0，所以四个比值中只有$\frac{y}{r}$为正，其余为负．即有：钝角三角函数值，除正弦值是正的外，其余的值皆负。

关于三角函数的符号，在解题中常用。应熟记。可通过下图（图1—2）帮助记忆。

图 1 — 2

〔**例1**〕：确定下列各式的符号。

(1)$sin99°$；(2)$cos165°$；(3)$tg10°ctg89°$；

(4)$\frac{sin34-tg170。}{cos80°\cdot ctg110°}$．

〔**解**〕(1)正；(2)负；(3)正；(4)负．

〔**例2**〕据下列条件，确定α是锐角还是钝角．

(1)$cos\alpha<0$；(2)$sin\alpha=\frac{1}{3}$；(3) $sin\alpha\cdot tg\alpha<0$；

(4)$cos\alpha$和$ctg\alpha$同号．

〔**解**〕(1)钝角；(2)锐角或钝角；(3)钝角；

(4)锐角或钝角．

练习1.1

1．已知角α的终边经过点$P(4，2)$，求角α的四个三角函数值。

2.已知角α的终边上一点$P(x, y)$，$|OP|=1$，根据下列条件，分别求P点坐标($0°<\alpha<180°$)。

$(1)\cos\alpha=-\frac{1}{4}$；$(2)\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$；$(3)ctg\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$。

3.确定下列各式的符号.

$(1)\sin100°+\cos20°$；$(2)tg35°-ctg179°$；

$(3)\cos121°\cdot tg91°$；$(4)tg2\alpha(45°<\alpha<90°)$；

$(5)-ctg\frac{\alpha}{2}(0°<\alpha<180°)$；$(6)tg(1+\sin1°)$.

4.据下列条件，确定α是锐角还是钝角.

$(1)\sin\alpha$和$tg\alpha$异号；$(2)|ctg\alpha|=1000$；

$(3)\cos\alpha\cdot tg\alpha\cdot ctg\alpha>0$；$(4)\sqrt{tg^2\alpha}=-tg\alpha$.

§1.2三角函数间的关系

一、同角三角函数间的关系

根据三角函数定义，可以得到：

$$tg\alpha\cdot ctg\alpha=\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}=1.$$

$$tg\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

$$ctg\alpha=\frac{x}{y}=\frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{y^2+x^2}{r^2}=\frac{r^2}{r^2}=1.$$

将$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$的两边都除以$\cos^2\alpha$，可得：

$$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

将$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$的两边都除以$\sin^2\alpha$，又可得：

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

以上关系式可归纳如下：

1.倒数关系：$tg\alpha\cdot ctg\alpha=1$.

2.商数关系：$tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$；$ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

3.平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；$1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$；

$$1+ctg^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

把上面这些关系式叫做同角三角函数的基本关系式。它们都是恒等式，即当α取使关系式的两边都有意义的任意角时，关系式两边的值都相等。

利用这些关系式，可以(1)由一个角的某一个三角函数值，求出这个角的其它三角函数值；(2)其它求值题；(3)化简三角函数式；(4)证明其它一些三角恒等式。

对这些关系式，应熟练掌握、灵活运用。不仅会正用公式，还应会反用及变用公式。以$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$为例，所谓正用公式是指按自左至右的方向使用公式；反用公式是指按自右至左的方向使用公式，即$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$；而变用公式

是指通过作变形使用公式。如此公式的一些变形为：$1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$；$1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha$；$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$；$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$；$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$；$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$等。

对数学中的其它公式，也应会按这三种方式使用。只有这样，才能谈得上对公式做到了熟练掌握和灵活运用，才能得心应手地解题和证题。

下面通过一些例题说明一下同角三角函数基本关系式的四种应用。

〔例1〕已知$0°<\alpha<180°$，且$tg\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，求$\alpha$的其它三角函数值。

〔解〕$\because tg\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}<0$，$\therefore \alpha$为钝角.

$$\therefore ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{3}}=-\sqrt{3}.$$

由$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$得 $\cos\alpha=-\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\alpha}}=-\sqrt{\frac{1}{1+\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}}$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

由$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$得 $\sin\alpha=tg\alpha\cdot\cos\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}.$

〔注意〕：1.由$tg\alpha<0$得α为钝角，以此确定$\cos\alpha$的符号，$\cos\alpha<0$.故根号前应定负号。

2. $sin\alpha$还可由$sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{1+ctg^2\alpha}}$求得，若这样求，同样有确定符号的问题。因$sin\alpha>0$，故根号前应定正号。而按本题中的方法求$sin\alpha$却没有定符号的问题。此表明：恰当选择公式，可简化有些运算。

〔例2〕已知$0°<\alpha<180°$，且$sin\alpha=\frac{4}{5}$，求α的其它三角函数值。

〔解〕：$\because sin\alpha=\frac{4}{5}>0$，$\therefore \alpha$为锐角或钝角.

(1)当$0°<\alpha<90°$时

$$cos\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}.$$

$$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{3}.\quad ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=\frac{3}{4}.$$

(2)当$90°<\alpha<180°$时，

$$cos\alpha=-\sqrt{1-sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=-\frac{3}{5}.$$

$$tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{\frac{4}{5}}{-\frac{3}{5}}=-\frac{4}{3}.\quad ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}=-\frac{3}{4}.$$

〔注意〕：由$sin\alpha>0$知α为锐角或钝角，以下应分两种情况分别求解，故本题有两解。

〔例3〕求值：$log_{|cos\theta|}(1+tg^2\theta)$（$\theta$为锐角或钝角）

〔解〕：原式$=\log_{|\cos\theta|}\dfrac{1}{\cos^2\theta}=\log_{|\cos\theta|}(\cos\theta)^{-2}$

$=\log_{|\cos\theta|}|\cos\theta|^{-2}=-2\log_{|\cos\theta|}|\cos\theta|=-2$.

〔注意〕：1.本题可分锐角和钝角两种情况分别来求，也可如上合在一起来求。

2.在上面推导中，是把$\log_{|\cos\theta|}(\cos\theta)^{-2}$写成$\log_{|\cos\theta|}|\cos\theta|^{-2}$，而不能把$\log_{|\cos\theta|}(\cos\theta)$写成$-2\log_{|\cos\theta|}\cos\theta$.这是因为当θ为钝角时，$\cos\theta<0$，这不符合$\log_a M^n=n\log_a M\ (M>0)$中的条件.此时，不能直接使用此法则，应考虑先作转换，然后再使用此法则.

〔例4〕已知$tg\alpha=\dfrac{1}{2}$，求下列各式的值。

(1) $\dfrac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{3\sin\alpha-4\cos\alpha}$；　(2) $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha$.

(1)〔解法一〕：　原式$\dfrac{\dfrac{\sin\alpha+2\cos\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{3\sin\alpha-4\cos\alpha}{\cos\alpha}}=\dfrac{tg\alpha+2}{3tg\alpha-4}=$

$$\frac{\frac{1}{2}+2}{3\cdot\frac{1}{2}-4}=-1.$$

〔解法二〕：　原式$=\dfrac{tg\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos\alpha}{3tg\alpha\cdot\cos\alpha-4\cos\alpha}=\dfrac{tg\alpha+2}{3tg\alpha-4}$

$$=\frac{\frac{1}{2}+2}{3\cdot\frac{1}{2}-4}=-1.$$

（2）〔解法一〕：原式 $=\cos^2\alpha\cdot\dfrac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$$=\cos^2\alpha\,(tg^2\alpha+2tg\alpha-3)=\frac{1}{1+tg^2\alpha}(tg^2\alpha+2tg\alpha-3)$$

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}-3}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=-\frac{7}{5}.$$

〔**解法二**〕：原式 $=(tg\alpha\cdot\cos\alpha)^2+2\cdot tg\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha=\cos^2\alpha(tg^2\alpha+2tg\alpha-3)$.下同解法一过程.

〔**解法三**〕：原式 $=\dfrac{\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$ 分子分母同除以 $\cos^2\alpha$ 得：原式 $=\dfrac{tg^2\alpha+2tg\alpha-3}{tg^2\alpha+1}$.下同解法一过程。

〔**注意**〕：1．此种题的解法是先把要求的式子用已知的式子表示，然后把值代入进行计算。

2．在变形中对公式 $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 分别以两种方式进行了使用，即反用和变用.

3.(2)的解法三反用了公式：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，即将1写成 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，关于1的这种表示法在有些题中还要用到，应记住。一般地，还应掌握1的其它各种表示法，对有些涉及到1的问题.应考虑1的巧妙使用.

〔**例5**〕已知 $\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，求 $\sin^3\theta-\cos^3\theta$ 的值.

〔解〕：$\because\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{1}{2}$，$\therefore\ (\sin\theta-\cos\theta)^2=\dfrac{1}{4}$.