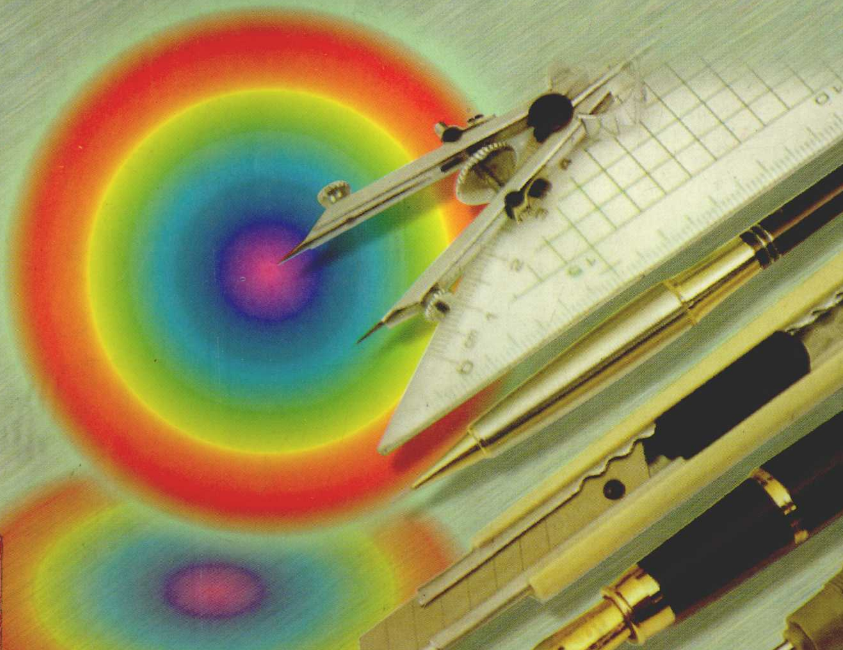
初中数学

解题讲座

主编：黄东坡　审定：裴光亚

初 2 分册



湖北辞书出版社

初二分册

初中数学
解题讲座

主编　黄东坡
编著　黄东坡
　　　陈雅玲
审定　裴光亚

湖北辞书出版社

（鄂）新登字 07 号

初中数学解题讲座（初二分册）

CHUZHONG SHUXUE JIETI JIANGZUO
主　　编：©黄东坡
审　　定：裴光亚
策　　划：丁　渝
责任编辑：高　媛
封面设计：王　乔
督　　印：阎长缨
出版发行：湖北辞书出版社（武汉市东亭路 2 号　430077）
印　　刷：华中理工大学印刷厂
经　　销：新华书店
开　　本：787×1092　1/32
插　　页：4
印　　张：6.75
版　　次：1998 年 4 月第 1 版
印　　次：1998 年 10 月第 2 次印刷
字　　数：160 千字
印　　数：8001-14000 册
定　　价：6.80 元（简精装）
ISBN7-5403-0240-2/O·6

编写说明

本丛书由笔者根据多年开设初中数学提高课积累的素材编写而成，依照《九年义务教育初中数学教学大纲》的精神，把握初中数学“低起点、多层次、高要求”的新特点，按照教材顺序，将初中数学组织为72个讲座专题，力求突出解题思路的探索、解题方法的阐释和解题思维的评介，以满足广大初中学生提高解题水平、发展思维能力的需要，也为开展数学课外活动的教师提供一份实用的资料。

每一专题讲座由“解题指要、例题精析、练习精选”三部分组成。

“解题指要”简明扼要地指出每一专题讲座所涉及到的解题技巧、方法、思想，并恰当补充知识。

“例题精析”充分剖析例题的难点、关键，着重揭示解题思路的探索过程和解题方法的

概括过程，通过解答、评注的形式，使解题技巧、方法、思想具体化。

“练习精选”每一专题包容了初中数学的主要题型，精选典型问题作为练习，并根据学生的认识水平和知识的逻辑顺序作了系统的编排，促使解题技巧、方法、思想的及时迁移，实现由知识到方法、由基础到能力的双重转变。

本丛书的例题与习题来源于近年全国各地的中考试题及接近于中考B卷标高的中低档竞赛题。

本丛书不重复教材，不同于题海式的辅导读物及超出绝大多数学生实际的竞赛教程，与课本同步，目的在于让初中学生把数学学得更好些，而不是学得更多些，为适应高中学习打下坚实的基础。

本丛书由武汉市教研室裴光亚老师审定，在此表示衷心的感谢。

黄东坡

1997年11月于武昌水果湖中学

目　录

$\boxed{1}$ 因式分解的方法

【解题指要】

1. 提公因式法、公式法、十字相乘法、分组分解法是因式分解的基本方法．通常根据多项式的项数来选择分解的方法，有公因式先提公因式，分解必须进行到每一个因式都不能再分解为止．因式分解与乘法的运算过程相反，常用乘法运算来检验因式分解的结果是否正确．

2. 一些复杂的因式分解问题经常要用到以下重要方法：

（1）换元法　对一些数、式结构比较复杂的多项式，可把多项式中的某些部分看成一个整体，用一个新字母代替．

（2）拆添项法　当直接分组分解难以进行时，可适当地拆项（把代数式中的某项拆成两项的和或差）或添项（把代数式添上两个符号相反的项），再应用分组分解法、公式法等进行分解．

【例题精析】

例 1　分解因式 $(x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8=$____．（1995 年宁夏回族自治区中考题）

分析 我们把(x^2+3x)看成一个整体，用一个新字母来代替，从而简化式子的结构．

解 令$x^2+3x=y$,则

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=y^2-2y-8\\
&=(y-4)(y+2)\\
&=(x^2+3x-4)(x^2+3x+2)\\
&=(x-1)(x+4)(x+1)(x+2)
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad (x^2+3x)^2-2(x^2+3x)-8$

$=\underline{(x-1)(x+4)(x+1)(x+2)}$

例 2 分解因式 $(x+y)(x+y+2xy)+(xy+1)(xy-1)$．（第九届“缙云杯”初中数学竞赛题）

分析 若先展开再分解则增加项数会给分解带来困难，仔细观察，$x+y$、xy在题中反复出现，不妨用二个新字母代替，突出式子的特点．

解 令$x+y=a$，$xy=b$，则

$$
\begin{aligned}
\text{原式}&=a(a+2b)+(b+1)(b-1)\\
&=a^2+2ab+b^2-1\\
&=(a+b)^2-1\\
&=(a+b+1)(a+b-1)\\
&=(x+y+xy+1)(x+y+xy-1)\\
&=(x+1)(y+1)(xy+x+y-1)
\end{aligned}
$$

例 3 分解因式 $x^4+1987x^2+1986x+1987$.（1986年江苏省初中数学竞赛题）

分析 由于次数高、系数大，所以直接分解有困难，不妨把数用字母来表示，寻找解题的突破口．

解 令$1987=a$，则$1986=a-1$

$\therefore$ 原式 $=x^4+ax^2+(a-1)x+a$

$=x^4+ax^2+ax-x+a$

$=x^4-x+(ax^2+ax+a)$

$=x(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)a$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+a)$

$=(x^2+x+1)(x^2-x+1987)$

评注 以上各例都是借助换元法分解的．从换元的形式看，换元时有常值代换、式的代换；从引元的个数看，换元时有一元代换，二元代换等，用换元法解题时，需要认真观察，发现数、式的结构特点．

例 4 分解因式 $a^2-b^2+4a+2b+3$ 的结果是________．(1992 年郑州市初二竞赛题)

分析 直接分组分解困难，可考虑先将常数项拆成几个数的代数和，比如 $3=4-1$.

解 原式 $=a^2-b^2+4a+2b+4-1$

$=(a^2+4a+4)-(b^2-2b+1)$

$=(a+2)^2-(b-1)^2$

$=(a+b+1)(a-b+3)$

例 5 分解因式 x^5+x+1.(1986 年扬州市初中数学竞赛题)

分析 原式有"缺项"，应考虑适当添项．

解 原式 $=x^5-x^2+x^2+x+1$

$=x^2(x^3-1)+(x^2+x+1)$

$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)$

$=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$

例 6 分解因式 $x^3+6x^2+11x+6$.

解法一 原式 $=x^3+x^2+5x^2+5x+6x+6$

$$
\begin{aligned}
&=(x^3+x^2)+(5x^2+5x)+(6x+6)\\
&=x^2(x+1)+5x(x+1)+6(x+1)\\
&=(x+1)(x^2+5x+6)\\
&=(x+1)(x+2)(x+3)
\end{aligned}
$$

解法二 原式 $=x^3+2x^2+4x^2+8x+3x+6$

$$
\begin{aligned}
&=(x^3+2x^2)+(4x^2+8x)+(3x+6)\\
&=(x+2)(x^2+4x+3)\\
&=(x+2)(x+1)(x+3)
\end{aligned}
$$

解法三 原式 $=x^3+3x^2+3x^2+9x+2x+6$

$$
\begin{aligned}
&=(x^3+3x^2)+(3x^2+9x)+(2x+6)\\
&=(x+3)(x^2+3x+2)\\
&=(x+3)(x+1)(x+2)
\end{aligned}
$$

评注 以上各例是用拆项、添项法分解的．在因式分解中进行拆项与添项的目的是相同的，即经过拆项或添项后，多项式能恰当分组，从而可以在各组之间提公因式或利用公式；拆项与添项是一种技巧性很强的工作，只有认真观察多项式的结构特征和数量关系，才能正确地对多项式进行拆、添项，从而使问题得到解决．

例 7 $x^2y-y^2z+z^2x-x^2z+y^2x+z^2y-2xyz$ 因式分解后的结果是（ ）．

(A) $(y-z)(x+y)(x-z)$ (B) $(y-z)(x-y)(x+z)$

(C) $(y+z)(x-y)(x+z)$ (D) $(y+z)(x+y)(x-z)$

(1985 年上海市初中数学竞赛题)

分析 原式是一个复杂的三元二次多项式，分解有一定困难，把原式整理成关于某个字母的多项式并按降幂排列，改

变原式结构，寻找解题突破口．

解 将原式重新整理成关于 x 的二次三项式，则

$$\begin{aligned}原式&=(y-z)x^2+(y^2-2yz+z^2)x-(zy^2-z^2y)\\&=(y-z)x^2+(y-z)^2x-yz(y-z)\\&=(y-z)[x^2+(y-z)x-yz]\\&=(y-z)(x+y)(x-z)\end{aligned}$$

故应选（A）．

评注 解答本题的方法不妨称作主元法．所谓主元法，即在解多变元问题时，选择其中某个变元为主要元素，视其他变元为常量，将原式重新整理成关于某个字母的多项式，使问题获解的一种方法．

例 8 分解因式 $x^2+xy-6y^2+x+13y-6$.（1992 年四川省初中数学联合竞赛题）

解法一

$$\begin{aligned}原式&=(x^2+xy-6y^2)+(x+13y)-6\\&=(x+3y)(x-2y)+(x+13y)-6\\&=(x+3y)(x-2y)+[3(x+3y)-2(x-2y)]-2\times3\\&=(x+3y-2)(x-2y+3)\end{aligned}$$

解法二

$$\begin{aligned}原式&=x^2+(y+1)x-(6y^2-13y+6)\\&=x^2+(y+1)x-(3y-2)(2y-3)\\&=x^2+[(3y-2)-(2y-3)]x-(3y-2)(2y-3)\\&=(x+3y-2)(x-2y+3)\end{aligned}$$

解法三 因为 $x^2+xy-6y^2=(x+3y)(x-2y)$，所以，可设 $x^2+xy-6y^2+x+13y-6=(x+3y+m)(x-2y+n)$

展开整理，得

$x^2+xy-6y^2+x+13y-6=x^2+xy-6y^2+(m+n)x+(3n-2m)y+mn$

比较对应项系数，得

$$\begin{cases} m+n=1 \\ 3n-2m=13 \\ mn=-6 \end{cases}$$

解方程组，得　$m=-2$，$n=3$

∴　原式$=(x+3y-2)(x-2y+3)$

评注　形如 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f$（a、b、c、d、e、f 为常数，且 a、b、c 不同时为零）的二元二次三项式通常有下面分解方法：

(1) 按次数分组，用分组分解法；

(2) 确定主元，用主元法；

(3) 用待定系数法：若 $ax^2+bxy+cy^2=(a_1x+c_1y)(a_2x+c_2y)$ 则 $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=(a_1x+c_1y+m)(a_2x+c_2y+n)$（其中 m、n 是待定的系数）.

【练习精选】

1. 分解因式　$(a^2+a+1)(a^2-6a+1)+12a^2=$____.（1996 年陕西省中考题）

2. 分解因式　$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)-120$.（1991 年吉林省竞赛题）

3. 在 1～100 之间若存在整数 n，使 x^2+x-n 能分解为两个整系数一次式的乘积，这样的 n 有____个.（1990 年"缙云杯"竞赛题）

4. 多项式 $a^3-b^3+c^3+3abc$ 有因式：

(A) $(a+b+c)$　　　　(B) $a-b+c$

(C) $a^2+b^2+c^2-bc+ac-ab$　(D) $bc-ac+ab$

(第四届“五羊杯”竞赛题)

5. 把多项式 $x^2-y^2-2x-4y-3$ 因式分解后，正确的结果是（　）.

(A) $(x+y+3)(x-y-1)$　　(B) $(x+y-1)(x-y+3)$

(C) $(x+y-3)(x-y+1)$　　(D) $(x+y+1)(x-y-3)$

(第八届“希望杯”邀请赛试题)

6. 已知二次三项式 $21x^2+ax-10$ 可分解为两个整数系数的一次因式的积，那么（　）.

(A) a 一定是奇数　　(B) a 一定是偶数

(C) a 一定是负数　　(D) a 的奇偶性不确定

(1994 年“祖冲之杯”邀请赛试题)

7. 分解因式

(1) $(a+b-2ab)(a+b-2)+(1-ab)^2$　(1992 年黄冈竞赛题)

(2) x^4-7x^2+1　(1994 年“祖冲之杯”邀请赛试题)

(3) $2x^2-7xy+6y^2+2x-y-12$　(1992 年四川省联合竞赛题)

(4) $(c-a)^2-4(b-c)(a-b)$　(1995 年昆明市竞赛题)

(5) $a^2+2b^2+3c^2+3ab+4ac+5bc$　(1991 年“希望杯”邀请赛试题)

8. 已知乘法公式

$$a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)$$

$$a^5-b^5=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

利用或者不利用上述公式，将下式分解因式 $x^8+x^6+x^4+x^2+1$.（1994年“祖冲之杯”邀请赛试题）

参考答案或提示

1. $(a-1)^2(a^2-3a+1)$ **2.** $(x+1)(x-6)(x^2-5x+16)$ **3.** 9

4. B 提示 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac)$

5. D **6.** A 提示 用十字相乘法结合奇偶性

7. (1) $(a-1)^2(b-1)^2$ 提示 用换元法分解

(2) $(x^2+3x+1)(x^2-3x+1)$ 提示 用拆添项法分解

(3) $(x-2y+3)(2x-3y-4)$ (4) $(a+c-2b)^2$

(5) $(a+2b+3c)(a+b+c)$

8. 解 由公式有

$$x^{10}-1=(x^2-1)(x^8+x^6+x^4+x^2+1)$$

$$\therefore\ x^8+x^6+x^4+x^2+1=\frac{x^{10}-1}{x^2-1}=\frac{x^5-1}{x-1}\cdot\frac{x^5+1}{x+1}$$

$$=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$$

$\boxed{2}$ 因式分解的应用

【解题指要】

1. 因式分解是代数变形的有力工具，复杂的数值计算、代数式的化简与求值、简单的不定方程等许多问题都要用到因式分解的方法；在以后的学习中，因式分解是学习分式、一元二次方程等知识的基础．

2. 熟悉以下几个应用广泛的多项式分解因式后的结果：

(1)$x^4+4=(x^2+2x-2)(x^2-2x+2)$；

(2)$4x^4+1=(2x^2+2x+1)(2x^2-2x+1)$；

(3)$ab\pm a\pm b+1=(a\pm 1)(b\pm 1)$；

(4)$ab\pm a\mp b-1=(a\mp 1)(b\pm 1)$

【例题精析】

例 1　计算 $\dfrac{1995^3-2\times 1995^2-1993}{1995^3+1995^2-1996}$．(1995 年北京市初二数学竞赛题)

分析　若直接计算，则必然繁难．不妨用字母表示数，通过对分子分母分解因式来探求解题思路．

解　令 $1995=a$，则 $1993=a-2$，$1996=a+1$

$$\therefore\quad 原式=\frac{a^3-2a^2-(a-2)}{a^3+a^2-(a+1)}$$

$$=\frac{(a^3-a)-(2a^2-2)}{a^2(a+1)-(a+1)}$$

$$=\frac{(a-1)(a+1)(a-2)}{(a-1)(a+1)(a+1)}$$

$$=\frac{a-2}{a+1}$$

$$=\frac{1993}{1996}$$

例 2 (1) n 为自然数，证明：

(1) $n^4+4=[(n-1)^2+1]\cdot[(n+1)^2+1]$；

(2) 计算下式的值：

$$\frac{(1^4+\frac{1}{4})(3^4+\frac{1}{4})(5^4+\frac{1}{4})\cdots\cdots(19^4+\frac{1}{4})}{(2^4+\frac{1}{4})(4^4+\frac{1}{4})(6^4+\frac{1}{4})\cdots\cdots(20^4+\frac{1}{4})}$$

(第二届全国部分省市通讯赛试题)

(1) 证明 $n^4+4=n^4+4n^2+4-4n^2$

$$=(n^2+2)^2-(2n)^2$$

$$=(n^2-2n+2)(n^2+2n+2)$$

$$=[(n-1)^2+1]\cdot[(n+1)^2+1]$$

(2) 将分子、分母同时乘以 16^{10}，得

$$原式=\frac{(2^4+4)(6^4+4)(10^4+4)\cdots\cdots(38^4+4)}{(4^4+4)(8^4+4)(12^4+4)\cdots\cdots(40^4+4)}$$

$\because\quad n^4+4=[(n-1)^2+1][(n+1)^2+1]$

$$\therefore\quad 原式=\frac{[(1^2+1)(3^2+1)]}{[(3^2+1)(5^2+1)]}\cdot\frac{[(5^2+1)(7^2+1)]\cdots\cdots[(37^2+1)(39^2+1)]}{[(7^2+1)(9^2+1)]\cdots\cdots[(39^2+1)(41^2+1)]}$$