运筹与管理科学丛书 17

线性锥优化

方述诚　邢文训　著

科学出版社

运筹与管理科学丛书 17

线性锥优化

方述诚　邢文训　著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

线性锥优化是线性规划的延伸，也是非线性规划，尤其是二次规划的一种新型研究工具，其理论性强，应用面广，值得深入研究. 本书系统地介绍了线性锥优化的相关理论、模型和计算方法，主要内容包括：线性锥优化简介、基础知识、最优性条件与对偶、可计算线性锥优化、二次函数锥规划、线性锥优化近似算法、应用案例和内点算法软件介绍等.

本书不仅包含了线性规划、二阶锥规划和半定规划等基本模型，还引进二次函数锥规划来探讨更一般化的线性锥优化模型. 同时，在共轭对偶理论的基础上，系统地建立了线性锥优化的对偶模型，分析了原始与对偶模型之间的强对偶性质. 本书的主要内容来源于我们研究小组近些年工作总结，一些研究结果还非常初始，仍然具有较新的研究价值和可能的扩展空间.

本书可作为数学及最优化等相关专业高年级本科生、研究生的教材或参考书，也可供教师、科研人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性锥优化/方述诚，邢文训著. —北京：科学出版社，2013
(运筹与管理科学丛书；17)
ISBN 978-7-03-038176-7

I. ①线… II. ①方… ②邢… III. ①线性规划—高等学校—教材
IV. ①O221. 1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 166766 号

责任编辑：李　欣／责任校对：张凤琴
责任印制：钱玉芬／封面设计：王　浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2013 年 8 月第 一 版　开本：B5(720 × 1000)
2013 年 8 月第一次印刷　印张：18 1/4
字数：343 000

定价：**88.00** 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

《运筹与管理科学丛书》序

运筹学是运用数学方法来刻画、分析以及求解决策问题的科学. 运筹学的例子在我国古已有之, 春秋战国时期著名军事家孙膑为田忌赛马所设计的排序就是一个很好的代表. 运筹学的重要性同样在很早就被人们所认识, 汉高祖刘邦在称赞张良时就说道:“运筹帷幄之中, 决胜千里之外. ”

运筹学作为一门学科兴起于第二次世界大战期间, 源于对军事行动的研究. 运筹学的英文名字 Operational Research 诞生于 1937 年. 运筹学发展迅速, 目前已有众多的分支, 如线性规划、非线性规划、整数规划、网络规划、图论、组合优化、非光滑优化、锥优化、多目标规划、动态规划、随机规划、决策分析、排队论、对策论、物流、风险管理等.

我国的运筹学研究始于20世纪50年代, 经过半个世纪的发展, 运筹学研究队伍已具相当大的规模. 运筹学的理论和方法在国防、经济、金融、工程、管理等许多重要领域有着广泛应用, 运筹学成果的应用也常常能带来巨大的经济和社会效益. 由于在我国经济快速增长的过程中涌现出了大量迫切需要解决的运筹学问题, 因而进一步提高我国运筹学的研究水平、促进运筹学成果的应用和转化、加快运筹学领域优秀青年人才的培养是我们当今面临的十分重要、光荣, 同时也是十分艰巨的任务. 我相信,《运筹与管理科学丛书》能在这些方面有所作为.

《运筹与管理科学丛书》可作为运筹学、管理科学、应用数学、系统科学、计算机科学等有关专业的高校师生、科研人员、工程技术人员的参考书, 同时也可作为相关专业的高年级本科生和研究生的教材或教学参考书. 希望该丛书能越办越好, 为我国运筹学和管理科学的发展做出贡献.

袁亚湘

2007 年 9 月

前 言

线性锥优化是对决策变量取自锥, 而约束和目标函数为决策变量的线性函数这类优化问题系统研究的统称, 其内容包括模型的建立、最优解性质的理论分析、最优解的计算求解和模型的应用等. 最简单的线性锥优化问题其实就是大家熟悉的线性规划问题, 其决策变量限定在 n 维欧氏空间中第一卦限这个锥上, 而目标和约束都是决策变量的线性函数. 线性规划问题是线性锥优化中最为经典、最为著名的一类. 自 1947 年 George B. Dantzig 提出单纯形算法后, 线性规划问题在各应用学科得到了广泛的应用. 虽说单纯形算法非常实用, 但在极端情况下, 研究者举出了计算效率降至极低的实例. 20 世纪 70 年代末期椭球算法以及 80 年代初期内点算法的出现, 证明了线性规划问题是多项式时间可计算的. 由此学术界更期望在给定的精度下发现更多的多项式时间可计算 (简称可计算) 问题. 研究者相继提出了二阶锥规划、半定规划等可计算问题, 并在大量实际问题中得到应用, 由此引发了人们对线性锥优化问题的关注和研究兴趣.

以上提到的线性规划、二阶锥规划和半定规划三类问题的共同点是目标为凸 (线性) 函数, 可行解区域为凸集, 并且都是可计算的. 一些学者不禁产生联想：是否凸优化问题都可计算？答案是否定的. 20 世纪末提出的协正规划 (copositive programming) 就涵盖很多计算复杂性高的 NP- 难问题. 本书介绍的二次函数锥规划问题也是一类难解的线性锥优化问题, 其变形源于一般的二次约束二次规划问题, 而与其有相同的目标值.

线性锥优化问题涵盖线性规划、二阶锥规划和半定规划这些可计算问题, 使得大量实际应用问题得以解决. 同时, 像二次约束二次规划这种理论问题也可以在其框架下研究和求解. 因此, 线性锥优化非常具有挑战性. 如何利用锥的特殊结构, 扩大我们在理论上对一些困难问题的了解和如何实现近似计算求解, 成为数学规划领域中的一个重要研究方向.

本书作者及其研究小组自 1980 年初展开线性规划问题的研究, 近年来特别关注二次约束二次规划问题与线性锥优化问题间的关系, 分别在清华大学和美国北卡罗来纳州立大学 (North Carolina State University) 为研究生开设线性锥优化相关课程. 我们将课程中讲授的部分内容进行了总结, 同时系统地整理了研究小组近期有关共轭对偶、广义 Lagrange 对偶、二次函数锥规划问题的理论及其计算求解等研究结果, 一并归结在本书中.

作为引论, 第 1 章从应用的视角分别介绍了隶属于线性规划、二阶锥规划、半

定规划和二次函数锥规划的线性规划问题、Torricelli 点问题、相关阵满足性问题和最大割问题及其数学模型的建立. 具有运筹学、高等数学基础知识的读者阅读这一章不会有太大困难. 第 2、3 章介绍凸分析和非线性规划的基础知识, 为后续章节内容作准备. 特别需要关注这两章中关于相对内点内容的讨论和对偶观点的介绍. 第 4~6 章为本书的核心. 第 4 章介绍可计算线性锥优化的模型和理论结果, 包括线性规划、二阶锥规划和半定规划三类模型. 由于具备多项式时间可计算的特点, 这三类模型在很多实际问题中得以应用. 可计算线性锥优化问题的计算一般采用内点算法, 第 4 章对内点算法的框架给以简单介绍. 第 5 章介绍二次函数锥规划的最新发展和理论结果. 第 6 章则介绍利用可计算锥逼近的一些近似算法, 以二次约束二次规划问题为例, 实现可计算锥逼近的计算方法. 第 7 章选择了若干个典型问题, 介绍线性锥优化的应用. 为了便于线性锥优化的研究和应用, 我们在附录中简单介绍内点算法软件 CVX 的使用.

如以本书作为高年级本科生和研究生课程教材, 可完全按照本书的顺序讲授. 对于学时较短的课程, 可以在讲完第 1~4 章后, 有选择地讲授第 7 章的应用案例. 这样的安排也可作为凸分析和非线性规划等基础课程的替代. 对有一定线性锥优化基础的研究人员来讲, 可以直接选择阅读第 3~7 章. 这一部分内容更可作为 (博士) 研究生线性与非线性规划的后续课程.

本书的完成得益于研究小组全体成员的鼎力支持. 2011 年秋季, 应方述诚教授的邀请, 邢文训教授访问美国北卡罗来纳州立大学, 并开始本书的撰写. 我们采取每周按写作内容授课和讨论一次的方式, 一步步修正和确定本书内容. 参加课程研讨的人员除本书作者外, 还有邓智斌、邓志锋、金庆伟、黄建嘉、田野、王子腾等同学. 金庆伟博士对书中内容和证明提出了很多非常有建设性的建议, 邓智斌提供了本书的大部分插图, 王子腾为本书的每一稿都提供了详尽的文字修改意见. 2012 年上半年, 邢文训教授在清华大学特别开设一门课程讲授本书全部内容, 郭晓玲、马健、聂嘉明、谢悦、徐鑫、张彰、周晶等同学指出了多处错误并给出了一些非常好的建议, 他们的一些精彩证明也被收集到本书中. 在此, 我们对各位同学的热心学习和认真负责态度表示衷心的感谢!

在撰写附录部分时, 我们发现 CVX 的有些输出结果难以解释, 由此得到美国斯坦福大学的 Stephen Boyd 教授和 Michael C. Grant 教授的指教, 本书附录 A.3 节则采用他们给出的算例. 在此表示感谢!

本书的撰写引用了不少叶荫宇教授、张树中教授、罗智泉教授在清华大学方述诚讲席教授组授课及 (专题) 研讨会时使用的珍贵内容, 我们万分感激他们长期的指导与支持, 珍惜多年来与他们的友谊! 另外, 本书的成稿受益于韩继业教授、袁亚湘教授、修乃华教授、孙小玲教授、张立卫教授、白延琴教授、张立平教授、王振波教授、李平科教授和路程博士的真挚与细致的指正和建议, 我们铭记在心. 与高

杨教授、许瑞麟教授、谢金星教授和赵晓波教授的长期合作更使我们受益匪浅.

本书得到清华大学教育基金会、教育部科学技术研究重点项目 (108005)、国家自然科学基金委员会 (10801087, 11171177)、美国自然科学基金会、美国陆军研究办公室, 以及美国北卡罗来纳州立大学 Walter Clark 讲座基金的长期支持. 承蒙科学出版社的青睐及中国科学院出版基金的资助, 使本书得以顺利出版. 在此一并表示感谢!

最后也最为重要的是, 如果没有家庭的支持, 我们的工作是绝无可能完成的. 谨将此书献给赵继新、方先安、李娟、邢睿磊! 谢谢他们无尽的体谅和支持.

方述诚　邢文训

2013 年春

符 号 表

$\mathbb{R}$	实数集合
$\mathbb{R}_+$	非负实数集合
$\mathbb{R}^n$	n 维实向量空间
$\mathbb{R}^n_+$	n 维非负实向量空间, 第一卦限
$\cup, \cap$	集合运算符号: 并, 交
$\in, \notin, \subseteq$	属于, 不属于, 集合包含于
a, b, f 等小写字母	表示列向量
a_i, b_i, f_i 等	表示列向量分量
A, B, Q 或 A_i, B_i, Q_i 等大写字母	表示矩阵
$A \succeq B, A \succ B$	$A - B$ 为半正定, 正定矩阵
$x^{\mathrm{T}}, A^{\mathrm{T}}$	列向量 x, 矩阵 A 的转置
$\mathcal{C}, \mathcal{F}, \mathcal{X}, \mathcal{K}$ 等大写花字母	表示集合
$\mathcal{C}^*, \mathcal{X}^*, \mathcal{K}^*$ 等大写花字母	表示对偶集合
$\mathcal{M}(m, n)$	$m \times n$ 实矩阵集
$\mathcal{S}^n$	n 阶实对称矩阵集
$\mathcal{S}^n_+$	n 阶实对称半正定矩阵集
$\mathcal{S}^n_{++}$	n 阶实对称正定矩阵集
$\mathcal{N}(A)$	矩阵 A 的零空间
$\mathcal{R}(A)$	矩阵 A 的列生成空间
$\mathrm{rank}(A)$	矩阵 A 的秩
$\inf, \sup$	下确界, 上确界
$\min, \max$	极小, 极大
$\dim(\mathcal{X})$	集合 $\mathcal{X}$ 的维数
$\mathrm{tr}(A)$	矩阵 A 的迹
$\bullet$	内积
$\\|x\\|$	向量 x 的范数
$\vert x \vert$	实数 x 的绝对值
$N(x, \delta)$	以 x 为中心, 半径为 δ 的开球邻域
$\mathrm{cl}(\mathcal{X})$	集合 $\mathcal{X}$ 的闭包集合
$\mathrm{int}(\mathcal{X})$	集合 $\mathcal{X}$ 的内点集合
$\mathrm{bdry}(\mathcal{X})$	集合 $\mathcal{X}$ 的边界点集合
$\mathrm{ri}(\mathcal{X})$	集合 $\mathcal{X}$ 的相对内点集合
$\mathrm{conv}(\mathcal{G})$	集合 $\mathcal{G}$ 的凸包

$\mathrm{cone}(\mathcal{G})$	集合 $\mathcal{G}$ 的锥包
"O", "o"	大小的级别
$\nabla f(x) = \left(\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n}\right)^{\mathrm{T}}$	函数 $f(x)$ 的梯度
$\nabla^2 f(x)$	函数 $f(x)$ 的 Hessian 矩阵
$\mathrm{conv}(f)$	函数 $f(x)$ 的凸包函数
$\mathrm{epi} f$	函数 $f(x)$ 的上方图
$\partial f(x)$	函数 $f(x)$ 在 x 点的次梯度集合
$\mathcal{D}_{\mathcal{G}}$	集合 $\mathcal{G}$ 上的二次函数锥
$\mathcal{CP}^n$	n 阶协正锥
$\mathcal{CP}^n_{\mathcal{G}}$	集合 $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的协正锥

目录

第 1 章　引　论

线性规划 (linear programming)已被运筹学界广泛接受并深入了解, 人们均熟悉其数学模型中的线性目标函数、线性约束函数及决策变量在第一卦限 $\mathbb{R}^n_+$ 定义的表示方法. 线性锥优化是如何定义的, 与线性规划又有什么样的关系, 本章将通过一些简单例子的介绍, 分别引出线性锥优化 (linear conic programming)中的线性规划、二阶锥规划 (second-order cone programming)、半定规划 (semi-definite programming) 和二次函数锥规划 (conic programming over cones of nonnegative quadratic functions)等模型, 从而对线性锥优化有一个初步的认识.

线性锥优化比线性优化多出的一个"锥"字, 主要指决策变量由锥集合中选取. 所谓的锥集合 $\mathcal{C}$ 定义为：任取 $x \in \mathcal{C}$ 和非负实数 $\theta \in \mathbb{R}_+$, $\theta x \in \mathcal{C}$ 恒成立. 简而言之, 线性锥优化的表现特征为：决策变量由一个锥中选取, 在满足一些决策变量线性方程的约束条件下, 最优化一个线性目标函数.

1.1　线性规划

线性规划模型的最早提出者可以追溯到 1939 年的俄罗斯科学家 Leonid Kantorovich, 他当时建立了车间产品生产的一个初始线性规划模型. 随着第二次世界大战的结束, 一些运筹学的核心内容得以公开. George B. Dantzig 于 1947 年提出了一套完整的线性规划模型和单纯形算法, 解决军方的物资和人员调度问题, 翌年与 John von Neumann 讨论后形成了对偶理论. 由此线性规划成为一套完整的体系, 在大量实际问题中得以广泛应用. 虽说单纯形算法有非常好的实际计算效果, 但 1969 年 Klee 和 Minty[36] 在理论上证实该算法具有指数复杂度. 第一部关于线性规划理论的专著发表于 1963 年 [10]. 单纯形算法提出的 30 多年后, L. G. Khachiyan[35] 于 1979 年和 N. Karmarkar[34] 于 1984 年分别给出多项式时间求解线性规划问题的椭球算法和内点算法, 这成为运筹学发展的一个里程碑, 由此进一步引发人们对线性锥优化和凸优化问题的关注.

线性规划问题的标准模型如下

$$
\begin{aligned}
\min\ & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
\text{s.t.}\ & \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m,
\end{aligned}
$$

$$x \in \mathbb{R}^n_+, \tag{1.1}$$

其中 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 为决策变量, $c = (c_1, c_2, \cdots, c_n)^{\mathrm{T}}$ 为给定 n 维向量, $A = (a_{ij})_{m\times n}$ 为给定 $m \times n$ 矩阵, $b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^{\mathrm{T}}$ 为给定 m 维向量, $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \geqslant 0\}$. 满足约束条件的点集称为可行解集合.

标准模型的特点是约束方程都取等号形式. 实际问题中可能出现"$\leqslant$"或"$\geqslant$"的形式, 可以通过数学处理而得到标准模型的形式. 如

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i,$$

通过增加松弛变量 $y_i \geqslant 0$, 可写成等式形式

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + y_i = b_i.$$

同理, 对

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i,$$

通过引进松弛变量 $y_i \geqslant 0$, 其等价等式形式成为

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - y_i = b_i.$$

在可行解集非空的情况下, 不失一般性, 标准模型中可以假设 A 的行 (row) 向量线性无关, 即 $\operatorname{rank}(A) = m$, 否则去掉线性相关的行向量不改变可行解集合, 也就不影响线性规划问题的最优解, 也就有 $m \leqslant n$. 线性规划问题标准模型 (1.1) 写成矩阵形式为

$$\begin{aligned} \min \quad & c^{\mathrm{T}}x \\ \text{s.t.} \quad & Ax = b, \\ & x \in \mathbb{R}^n_+. \end{aligned}$$

若将 c 看成单位费用组成的向量, A 为单位材料消耗矩阵, b 为各项消耗材料的给定量, 则线性规划模型描述了在材料资源限定的条件下, 如何选取决策变量 x, 使得花费最小这样一类应用问题.

若 A 中存在 m 列 (column) 组成的矩阵 B 可逆且满足 $B^{-1}b \geqslant 0$, 可构造一个 n 维向量 $x \in \mathbb{R}^n$, 将 B 对应位置的 m 个分量以 $B^{-1}b$ 添加, 余下加上 $n-m$ 个 0 分量. 这个向量即为线性规划问题的一个基础可行解. 当一个线性规划问题的最优目标函

数值有下界时, 其最优解一定可在某个基础可行解达到 [16]. 这样的结果使得求解线性规划问题的最优解变得非常直观, 我们最多枚举 $C_n^m = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m(m-1)\cdots 1}$ 个满足以上条件的 B 即可得到. George B. Dantzig 的单纯形算法是一个非常精巧的枚举基础可行解的辗转替换方法. V. Klee 和 G. J. Minty[36] 给出的一个实例证明单纯形算法在最坏的情形下是指数时间的算法. L. G. Khachiyan [35] 给出以区域分割及椭球覆盖的椭球算法, N. Karmarkar[34] 则提出从可行解区域内点出发搜索最优解的内点算法. 这两个算法被证明具有多项式时间的计算复杂性, 由此确定了线性规划问题为一类多项式时间可计算问题.

观察 (1.1), 其决策变量的定义域为第一卦限 $\mathbb{R}^n_+$, 目标函数为线性函数, 约束方程为线性方程. 不难验证第一卦限 $\mathbb{R}^n_+$ 满足锥集合的定义, 所以线性规划问题是一类线性锥优化问题.

1.2 Torricelli 点问题

该问题的起源可以追溯到 17 世纪著名法国数学家 Pierre de Fermat (1601—1665) 提出的一个问题: 给定平面上的三个点 $a = (a_1, a_2)^{\mathrm{T}}$, $b = (b_1, b_2)^{\mathrm{T}}$ 和 $c = (c_1, c_2)^{\mathrm{T}}$, 求平面上的一点 $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$ 与这三个点的距离之和为最小. 意大利数学家 E. Torricelli (1608—1647) 给出一个求解方法, 这个问题也因此得名. 其优化模型为

$$\begin{array}{ll} \min & t_1 + t_2 + t_3 \\ \text{s.t.} & [(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2]^{1/2} \leqslant t_1, \\ & [(x_1 - b_1)^2 + (x_2 - b_2)^2]^{1/2} \leqslant t_2, \\ & [(x_1 - c_1)^2 + (x_2 - c_2)^2]^{1/2} \leqslant t_3, \\ & x_1, x_2, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}. \end{array} \tag{1.2}$$

记

$$\begin{cases} y_1 = x_1 - a_1, \\ y_2 = x_2 - a_2, \end{cases} \quad \begin{cases} z_1 = x_1 - b_1, \\ z_2 = x_2 - b_2, \end{cases} \quad \begin{cases} w_1 = x_1 - c_1, \\ w_2 = x_2 - c_2. \end{cases}$$

则有 $[y_1^2 + y_2^2]^{1/2} \leqslant t_1$, $[z_1^2 + z_2^2]^{1/2} \leqslant t_2$ 和 $[w_1^2 + w_2^2]^{1/2} \leqslant t_3$. 记 $\mathcal{L}^3 = \{(x_1, x_2, t)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^3 : (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \leqslant t\}$. 以变量替换消除 x_1, x_2 项, 则 (1.2) 可以等价表示为

$$\begin{array}{ll} \min & t_1 + t_2 + t_3 \\ \text{s.t.} & y_1 - z_1 = b_1 - a_1, \\ & y_1 - w_1 = c_1 - a_1, \\ & y_2 - z_2 = b_2 - a_2, \end{array}$$

$$y_2 - w_2 = c_2 - a_2,$$
$$(y_1, y_2, t_1)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{L}^3,\ (z_1, z_2, t_2)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{L}^3,\ (w_1, w_2, t_3)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{L}^3. \tag{1.3}$$

将 (1.3) 的定义域写成笛卡儿积 (Cartesian product)形式为 $\mathcal{L}^3 \times \mathcal{L}^3 \times \mathcal{L}^3$. 容易验证, 对任意 $(x_1, x_2, t)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{L}^3$ 和 $\theta \geqslant 0$, 有

$$\sqrt{(\theta x_1)^2 + (\theta x_2)^2} = \theta\sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2} \leqslant \theta t,$$

即 $\theta(x_1, x_2, t)^{\mathrm{T}} \in \mathcal{L}^3$. 由此得知 (1.3) 的定义域 $\mathcal{L}^3 \times \mathcal{L}^3 \times \mathcal{L}^3$ 是一个锥. 观察 (1.3) 的目标函数和约束方程, 它们都是线性函数, 因此 (1.3) 是一个线性锥优化问题.

1.3 相关阵满足性问题

统计学的理论表明, 随机变量的相关阵具有半正定性. 假设有三个随机变量 A, B 和 C. 它们的相关系数 ρ_{AB}, ρ_{AC} 和 ρ_{BC} 一定满足

$$\begin{pmatrix} 1 & \rho_{AB} & \rho_{AC} \\ \rho_{AB} & 1 & \rho_{BC} \\ \rho_{AC} & \rho_{BC} & 1 \end{pmatrix} \succeq 0,$$

其中“$\succeq$”表示矩阵半正定关系. 假设我们通过一些先验知识 (如大量的数值实验) 得到 $-0.2 \leqslant \rho_{AB} \leqslant -0.1$ 和 $0.4 \leqslant \rho_{BC} \leqslant 0.5$, 那么 ρ_{AC} 可以在什么范围内变化?

非常直观, 我们可以建立相关阵满足性问题 (correlation matrix satisfying problem)的以下模型

$$\begin{aligned} \min/\max \quad & \rho_{AC} \\ \text{s.t.} \quad & -0.2 \leqslant \rho_{AB} \leqslant -0.1, \\ & 0.4 \leqslant \rho_{BC} \leqslant 0.5, \\ & \rho_{AA} = \rho_{BB} = \rho_{CC} = 1, \\ & \begin{pmatrix} \rho_{AA} & \rho_{AB} & \rho_{AC} \\ \rho_{AB} & \rho_{BB} & \rho_{BC} \\ \rho_{AC} & \rho_{BC} & \rho_{CC} \end{pmatrix} \succeq 0. \end{aligned} \tag{1.4}$$

沿用前两节建立模型的思路, 对 (1.4) 的变量重新表示为: $\rho_{AA} = x_{11}, \rho_{AB} = x_{12}$, $\rho_{AC} = x_{13}, \rho_{BB} = x_{22}, \rho_{BC} = x_{23}, \rho_{CC} = x_{33}$. 增加松弛变量 $x_{44}, x_{55}, x_{66}, x_{77}$, 再扩大到一个变量矩阵 $(x_{ij})_{7\times 7}$, (1.4) 可等价地表示为

$$
\begin{aligned}
\min / \max \quad & x_{13} \\
\text{s.t.} \quad & x_{12} + x_{44} = -0.1, \\
& x_{12} - x_{55} = -0.2, \\
& x_{23} + x_{66} = 0.5, \\
& x_{23} - x_{77} = 0.4, \\
& x_{11} = x_{22} = x_{33} = 1, \\
& x_{ij} = 0, \quad \begin{cases} 1 \leqslant i \leqslant 3 \text{且} 4 \leqslant j \leqslant 7, \\ 4 \leqslant i \leqslant 7 \text{且} 1 \leqslant j \leqslant 3, \\ 4 \leqslant i, j \leqslant 7 \text{且} i \neq j, \end{cases} \\
& (x_{ij}) \in \mathcal{S}_+^7,
\end{aligned}
\tag{1.5}
$$

其中“$\mathcal{S}_+^7$”表示 7 阶对称半正定矩阵集合.

$\mathcal{S}_+^7$ 明显具有锥的特性, 因为任何一个半正定阵乘上一个非负数仍为半正定阵. 因此 (1.5) 也是一个线性锥优化问题.

1.4 最大割问题

最大割 (max-cut)是组合最优化中经典问题之一, 描述如下：给定一个无向图 $G = (N, E)$, 结点集 $N = \{1, 2, \cdots, n\}$, 边集 $E = \{(i,j) \mid i, j \in N = \{1, 2, \cdots, n\}\}$ 和 $(i,j) \in E$ 边上的权重 $w_{ij} \geqslant 0$, 求结点集 N 的一个划分 (S, S'), 即 $S \bigcup S' = N$ 且 $S \bigcap S' = \varnothing$, 使得连接 S 和 S' 之间边上的权重和最大.

当 i 落入 S 时, 选取决策变量 $x_i = 1$, 否则 $x_i = -1$. 不失一般性, 定义 $w_{ij} = 0, (i,j) \notin E$, 则目标函数可表示为

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left(\sum_{(i,j)\in E} w_{ij} - \sum_{(i,j)\in E} w_{ij} x_i x_j \right) \\
= & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij} x_i x_j \right) \\
= & \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}(1 - x_i x_j).
\end{aligned}
$$

因此, 最大割模型为

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^{n} w_{ij}(1 - x_i x_j) \\
\text{s.t.} \quad & x_i^2 = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \\
& x \in \mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$