1980

中学数学复习资料

习题解答

武汉市教师进修学院数学教研室编

录

第一编 代　　数

第二编 平面几何

第三编 立体几何

第四编 三

第五编 解析几何

第六编 综 合 题

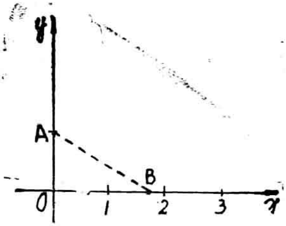
第一编　代　数

第一章　实数与复数

第一节　实　　数

习　题　B

1．用几何方法，在数轴上作出表示$\sqrt{3}$的点，并用代数方法证明$\sqrt{3}$是无理数。



（图1—1·1）

解：过数轴的原点O作Oy⊥Ox，在Oy上取一点A，使OA＝1个单位长度，以A点为圆心，以2个单位长度为半径画弧交Ox于B点，那么数轴上的B点表示$\sqrt{3}$，这是因为，连接AB，则△AOB为直角三角形。根据勾股定理，$OB^2 = AB^2 - OA^2 = 4 - 1 = 3$，所以$OB = \sqrt{3}$.

设$\sqrt{3}$不是无理数，它一定是有理数，这样就可以表示为$\frac{m}{n}$的形式（m、n为互质的自然数），就是$\sqrt{3} = \frac{m}{n}$.

由此可推得：$m^2 = 3n^2$，根据"一个自然数的平方能被3整除，这个自然数也一定能被3整除。"我们得到m能被3整除，不妨令$m = 3m_1$（m_1为自然数）。把$m = 3m_1$代入$m^2 = 3n^2$，得到$n^2 = 3m_1^2$.这样n也能被3整除。也就是说，m和n有公约数3，这和假设m和n互质相矛盾。故$\sqrt{3}$是无理数。

2．有学生3933人，分成人数相等的小组参加劳动，每组人数限定在10人以上，20人以下，求每组人数及可分组数。

解：将3933分解为质因数的连乘积，得

$$3933 = 3 \times 3 \times 19 \times 23.$$

又因每组人数限定在10人以上，20人以下，故每组人数是19人，而可分组数是207组．

3．比较$\sqrt{2-a}$和$\sqrt[3]{a-4}$的大小。

解：在实数范围内，只有当$a \leqslant 2$时，$\sqrt{2-a}$才有意义，而当$a \leqslant 2$时，则有$\sqrt{2-a} \geqslant 0$，$\sqrt[3]{a-4} < 0$．

$$\therefore \quad \sqrt{2-a} > \sqrt[3]{a-4}.$$

4．求$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$的算术平方根．

解：$\because$ $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1$

$$=(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)+1$$

$$=(x^2+5x)^2+10(x^2+5x)+24+1$$

$$=(x^2+5x+5)^2.$$

又当$x \geqslant \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$或$x \leqslant \frac{-5-\sqrt{5}}{2}$时，$x^2+5x+5 \geqslant 0$；当$\frac{-5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-5+\sqrt{5}}{2}$时，$x^2+5x+5 < 0$．所以$\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+1}$

$$=\begin{cases} x^2+5x+5, & \left(x \geqslant \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\text{或}x \leqslant \frac{-5-\sqrt{5}}{2}\text{时}\right) \\ -(x^2+5x+5). & \left(\frac{-5-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\text{时}\right) \end{cases}$$

5．如果$2x+1<0$，试求

$\sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{1+4x+4x^2}$的值．

解：$\because \sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{1+4x+4x^2}$

$=\sqrt{(2x-3)^2}-\sqrt{(1+2x)^2}$

$=|2x-3|-|1+2x|$

又 $2x+1<0$时，即$x<-\dfrac{1}{2}$时，$2x-3<0$.

$\therefore \sqrt{4x^2-12x+9}-\sqrt{1+4x+4x^2}$

$=|2x-3|-|1+2x|=3-2x+1+2x=4$.

6．在迎新晚会上，人们互相握手祝贺，若二人彼此最多只握手一次，证明一定有两人的握手次数相同。

证：采用反证法证明。

设有n人（n是自然数）参加迎新晚会，握手次数最多的是$(n-1)$次；握手次数最少的是0次。并且这二种情况不能同时存在。现在假设n个人的握手次数分别是k_1、k_2……k_n(k_i是自然数，且$0\leqslant k_i\leqslant n-1$)。并且$k_i$两两互不相同。那么由于从0到$n-1$正好是n个数，那么就必存在$k_i$和$k_j$，使得 $k_i=0$，$k_j=n-1$.
然而这种情况是不可能存在的，即产生矛盾，这一矛盾证明了命题为真.

7．化简

1）$-\left[-\dfrac{|x^2-1|}{(1+x)(x-1)}\right]$ $(|x|<1)$；

2）$(m-1)\sqrt{\dfrac{m+1}{(m-1)^2}}$；

3）$\sqrt{(1-x)^2}-\sqrt{(3+x)^2}$.

解：1）$\because |x|<1$，$\because$ 原式$=\dfrac{|x^2-1|}{x^2-1}=\dfrac{1-x^2}{x^2-1}=-1$；

2）原式$=\dfrac{m-1}{|m-1|}\sqrt{m+1}$

$$=\begin{cases}\dfrac{m-1}{1-m}\sqrt{m+1}=-\sqrt{m+1}（当-1\leqslant m<1时）\\ \dfrac{m-1}{m-1}\sqrt{m+1}=\sqrt{m+1}.（当m>1时）\end{cases}$$

3）原式$=|1-x|-|3+x|$

$$=\begin{cases}x-1-3-x=-4,（当x\geqslant 1时）\\ 1-x-3-x=-2x-2,（当-3<x<1时）\\ 1-x+3+x=4.（当x\leqslant -3时）\end{cases}$$

8．1）试证明奇数的平方，除以8余1；

2）试证明两个相邻偶数的积能被8整除；

3）试证明三个连续整数的立方和能被9整除。

证明：1）任何奇数都可以表示为$2n+1$，其中n为整数，因为$(2n+1)^2=4n^2+4n+1=4n(n+1)+1$。

又$n(n+1)$是两个连续整数的乘积，故可被2整除，所以$4n(n+1)$可被8整除，从而$4n^2+4n+1$，也就是$(2n+1)^2$除以8余1。

2）任何两个相邻的偶数都可以表示为$2n$、$2n+2$，其中n是整数，因为$2n\cdot(2n+2)=4n^2+4n=4n(n+1)$

又$n(n+1)$是两个连续整数的乘积，故可被2整除，所以$4n(n+1)$可被8整除，也就是$2n(2n+2)$能被8整除。

3）任何三个连续整数都可以表示为$n, n+1, n+2$，其中n为整数，因为$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3=3n^3+9n^2+15n+9=3n(n+1)(n+2)+9(n+1)$。

由于$n(n+1)(n+2)$有因数3，所以$3n(n+1)(n+2)$可被9整除；显然$9(n+1)$可被9整除。所以$n^3+(n+1)^3+(n+2)^3$可被9整除。

注：设三个连续整数为$n-1$，n，$n+1$，则

$$(n-1)^3+n^3+(n+1)^3=3n(n^2+2)$$

对 $n=3k$，$3k+1$，$3k+2$ 分别讨论，就可证明本题。

9．化简下式，再求它的近似值（精确到0.01）。

$$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)-\sqrt{3-2\sqrt{2}}-\sqrt[3]{3\sqrt{3}}-4^{-\frac{1}{2}}\cdot 8^{\frac{1}{2}}$$

解：原式 $=(\sqrt{2}-1)^2-\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}-\sqrt[3]{(\sqrt{3})^3}$

$-\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}=3-2\sqrt{2}-\sqrt{2}+1-\sqrt{3}-\sqrt{2}$

$=4-4\sqrt{2}-\sqrt{3}\approx 4-4\times 1.414-1.732$

$=-3.388\approx -3.39.$

10．设 $(x-y\sqrt{2})^2=9-4\sqrt{2}$，求整数 x、y 的值。

解：∵ $(x-y\sqrt{2})^2=x^2+2y^2-2\sqrt{2}xy$，

∴ $x^2+2y^2-2\sqrt{2}xy=9-4\sqrt{2}$。

由于 x、y 为整数，所以 x^2+2y^2 为有理数，$2\sqrt{2}xy$ 为无理数

$$\therefore \begin{cases} x^2+2y^2=9 & (1) \\ xy=2 & (2) \end{cases}$$

从(2)知，x、y 同号，当 $x=\pm 1$ 时，$y=\pm 2$；当 $x=\pm 2$ 时，$y=\pm 1$。但 $x=\pm 2$，$y=\pm 1$ 不满足(1)

所以问题的解是

$$\begin{cases} x=1, \\ y=2; \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x=-1, \\ y=-2. \end{cases}$$

※11．利用无理数将质数11写成积的形式．

解：设 a 为有理数，$\sqrt{b}$ 为无理数，那么 $a\pm\sqrt{b}$ 都是无理数，又 $(a+\sqrt{b})(a-\sqrt{b})=a^2-b$。

∴ $11=16-5=4^2-5=(4+\sqrt{5})(4-\sqrt{5})$.

这里 $4+\sqrt{5}$ 和 $4-\sqrt{5}$ 都是无理数．

注：若a为正有理数，$\sqrt{b}$为无理数，那么$\frac{a}{\sqrt{b}}$和$\sqrt{b}$都是无理数．又$\frac{a}{\sqrt{b}}\cdot\sqrt{b}=a$．故

$$11=\frac{11}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}=\frac{11}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}=\frac{11}{\sqrt{5}}\sqrt{5}=\cdots$$

$$=\sqrt{60\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{40\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{24\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{5}=\cdots.$$

※12．已知一个四位数N，开头两个数字相同，后面两个数字也相同。求证N是11的倍数。

证明：设$N=\overline{aabb}$，其中a、b为整数，且$1\leqslant a\leqslant9$，$0\leqslant b\leqslant9$．

则$N=1000a+100a+10b+b=1000a+10b+100a+b=10(100a+b)+(100a+b)=11(100a+b)$．

因a、b为整数，所以$100a+b$亦为整数，故N是11的倍数。

※13．是否有满足方程$m^2+1978=n^2$的整数解m和n？

证：采用反证法证明．

假设有一组整数m和n满足方程　$m^2+1978=n^2$

$n^2-m^2=1978$，　$(n+m)(n-m)=1978$．

1）若m、n同为奇数或同为偶数，则$n+m$和$n-m$必都是偶数，而$(n+m)(n-m)$就必为4的倍数，但1978不是4的倍数，所以方程$m^2+1978=n^2$不可能有都是奇数或者都是偶数的整数解m和n．

2）若m、n是一个奇数，一个偶数，则$n+m$和$n-m$都是奇数，而$(n+m)(n-m)$就必为奇数，但1978是偶

数，不是奇数。所以方程 $m^2+1978=n^2$ 也不可能有一奇数，一偶数的整数解m和n，所以，不存在满足方程 $m^2+1978=n^2$ 的整数解m和n.

※14. 如果n和A都是正整数，且 $\sqrt[n]{A}$ 不是整数，试证 $\sqrt[n]{A}$ 必是无理数。

证：采用反证法证明，假定 $\sqrt[n]{A}$ 是有理数，即设 $\sqrt[n]{A}=\frac{p}{q}$ 其中 $q>1$，p、q为互质的整数，将上式两边各自乘n次方就得到 $A=\frac{p^n}{q^n}$.

由于p、q是互质的，所以 p^n、q^n 也是互质的，又 $q^n>1$，所以 $\frac{p^n}{q^n}$ 不能是整数，而A是整数，故 $A=\frac{p^n}{q^n}$ 不能成立，这个矛盾是由于假定 $\sqrt[n]{A}$ 是有理数而引起的，所以 $\sqrt[n]{A}$ 是无理数。

第二节　复数

习　题　B

1. 比较 $|14+40i|$ 和 $|(-7+\sqrt{7}i)(-5-\sqrt{7}i)|$ 的大小。

解：$\because$ $|14+40i|=\sqrt{14^2+40^2}=\sqrt{1796}$,

$|(-7+\sqrt{7}i)(-5-\sqrt{7}i)|=|42+2\sqrt{7}i|$

$=\sqrt{42^2+(2\sqrt{7})^2}=\sqrt{1792}$.　又 $\sqrt{1796}>\sqrt{1792}$,

$\therefore$ $|14+40i|>|(-7+\sqrt{7}i)(-5-\sqrt{7}i)|$.

2. 已知 $2-3i$ 表示复数平面内的一点，哪些数表示的点和这点1）关于 x 轴对称；2）关于y轴对称；3）关于原点对称？

解：1）关于x轴对称的点和数$2+3i$对应；

2）关于y轴对称的点和数$-2-3i$对应；

3）关于原点对称的点和数$-2+3i$对应。

3．在复数平面内，A点表示复数$1+\sqrt{3}\,i$，把OA绕着O点按逆时针方向旋转150°，设A点到达的位置是B，写出B点所对应的复数的代数式。

解：设B点所对应的复数是$z=x+yi$．则$|z|=|1+\sqrt{3}\,i|=2$．又A点所对应的复数$1+\sqrt{3}\,i$的幅角的主值是$\frac{\pi}{3}$，所以z的幅角的主值是$\frac{\pi}{3}+\frac{5\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$．故

$$z=2\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

$$=2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-\sqrt{3}-i.$$

4．化$1-\cos\alpha+i\sin\alpha$（$0\leqslant\alpha<\pi$）成三角函数式．

解：$1-\cos\alpha+i\sin\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}+i\cdot2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$

5．证明$\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$，其中$z=x+yi$．

证：∵ $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{|x|^2+|y|^2}$

$\leqslant\sqrt{|x|^2+2|x||y|+|y|^2}=\sqrt{(|x|+|y|)^2}$

$=|x|+|y|$　　∴ $|z|\leqslant|x|+|y|$；

又　$|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{|x|^2+|y|^2}$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}(2|x|^2+2|y|^2)}\geqslant\sqrt{\frac{1}{2}(|x|^2+|y|^2)+|x||y|}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{2}(|x|^2+2|x||y|+|y|^2)}=\sqrt{\frac{1}{2}(|x|+|y|)^2}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\qquad\therefore\quad\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|.$$

故 $\frac{1}{\sqrt{2}}(|x|+|y|)\leqslant|z|\leqslant|x|+|y|$.

6．1）解方程 $z^2-2z+3=0$，其中Z是复数；

2）解方程组 $\begin{cases}z_1+2z_2=1+i,\\3z_1+iz_2=2-3i.\end{cases}$ 其中 z_1、z_2 是复数.

解：1）设 $z=x+yi$，则

$$(x+yi)^2-2(x+yi)+3=0,$$

$$\therefore\quad(x^2-2x-y^2)+2y(x-1)i=-3.$$

根据复数相等的规定得

$$\begin{cases}x^2-2x-y^2=-3, & (1)\\2y(x-1)=0. & (2)\end{cases}$$

因 $y\neq0$，否则 z 是实数，而题给方程无实数解，由(2)知 $x=1$，代入(1)得，$y=\pm\sqrt{2}$. 所以

$$z=1+\sqrt{2}\,i\text{或}\quad z=1-\sqrt{2}\,i.$$

注：用通常的一元二次方程求根的办法也可求出同样的结果.

2）
$$\begin{cases}z_1+2z_2=1+i, & (1)\\3z_1+iz_2=2-3i. & (2)\end{cases}$$

(1)×3－(2)得 $(6-i)z_2=1+6i$

$\therefore\quad z_2=\frac{1+6i}{6-i}=i$ 将 $z_2=i$ 代入(1)得 $z_1=1-i$.

所以方程组的解是$\begin{cases} z_1=1-i, \\ z_2=i. \end{cases}$

注：如果设$z_1=x_1+y_1i$，$z_2=x_2+y_2i$，那么就会得到四个未知数的方程组，解起来比较麻烦。

7. 设方程$x^3-1=0$的三个根是**1**，α、β，求证 1) $\alpha^2=\beta$；2) $\beta^2=\alpha$；3) $1+\alpha+\beta=0$；4) $\alpha^{3n+1}+\beta^{3n+1}=-1$（n为整数）。

证：1) $\because$ α是方程$x^3-1=0$的一个根，$\therefore$ $\alpha^3=1$。又1、α、β是方程$x^3-1=0$的三个根，由韦达定理得 $1\cdot\alpha\cdot\beta=1$。于是 $1\cdot\alpha\cdot\beta=\alpha^3$. $\therefore$ $\alpha^2=\beta$.

2) 仿照1) 可证.

3) $\because$ $1+\alpha+\beta=\alpha^3+\alpha+\alpha^2=\alpha(\alpha^2+\alpha+1)=\alpha(\alpha+\beta+1)$. $\therefore$ $(\alpha+\beta+1)(1-\alpha)=0$.

因 $1-\alpha\neq0$ 所以 $\alpha+\beta+1=0$.

4) $\because$ $\alpha^{3n+1}+\beta^{3n+1}=(\alpha^3)^n\cdot\alpha+(\beta^3)^n\cdot\beta=\alpha+\beta=-1$ $\therefore$ $\alpha^{3n+1}+\beta^{3n+1}=-1$.

8. 已知$\sqrt[3]{a+bi}=x+yi$，a、b、x、y都是实数。求证 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=4(x^2-y^2)$.

证：两边各自三次方得

$$a+bi=(x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)i$$

根据复数相等的规定得

$$\begin{cases} a=x^3-3xy^2, \\ b=3x^2y-y^3. \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} \dfrac{a}{x}=x^2-3y^2, \\ \dfrac{b}{y}=3x^2-y^2. \end{cases}$$

两式相加得 $\dfrac{a}{x}+\dfrac{b}{y}=4x^2-4y^2=4(x^2-y^2)$.

9．计算：$A=\dfrac{(1-i)^{2n}}{(1+i)^{2m}}$，其中m和n都是自然数。

解：$A=\dfrac{[(1-i)^2]^n}{[(1+i)^2]^m}=\dfrac{(-2i)^n}{(2i)^m}=\dfrac{(-1)^n\cdot 2^n\cdot i^n}{2^m\cdot i^m}$

$=(-1)^n2^{n-m}i^{n-m}=(-1)^{n-m}2^{n-m}i^{n+m}$。

10．求证：$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n$

$=-1$，其中n是不等于3的倍数之整数，

证：$\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n$

$=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right)^n+\left(\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}\right)^n$

$=\cos\dfrac{2n\pi}{3}+i\sin\dfrac{2n\pi}{3}+\cos\dfrac{4n\pi}{3}+i\sin\dfrac{4n\pi}{3}$

$=\cos\dfrac{2n\pi}{3}+\cos\dfrac{4n\pi}{3}+i\left(\sin\dfrac{2n\pi}{3}+\sin\dfrac{4n\pi}{3}\right)$

$=\cos\dfrac{2n\pi}{3}+\cos\dfrac{4n\pi}{3}+i\left(2\sin n\pi\cos\dfrac{n\pi}{3}\right)$

∵ n不是3的倍数，故可设为$n=3k\pm1$（k为整数），于是 $\cos\dfrac{2n\pi}{3}=\cos\dfrac{6k\pi\pm2\pi}{3}=\cos\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$，

$\cos\dfrac{4n\pi}{3}=\cos\dfrac{12k\pi\pm4\pi}{3}=\cos\dfrac{4\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$.

∴ $\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^n+\left(\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}\right)^n=-1$.（n是不等于3的倍数之整数）．

11．已知$z=2+3i$，求$z^4+iz^3-(1+2i)z^2+3z+93+160i$的值．

解：$z^4+iz^3-(1+2i)z^2+3z+93+160i$

$=(-119-120i)+(-9-46i)-(-29+2i)+(6+9i)+(93+160i)=i$.

12．证明：$1+2i$，$-\sqrt{2}+\sqrt{3}i$，$\sqrt{3}-\sqrt{2}i$，$-2-i$四点共圆。

证：∵ $|1+2i|=\sqrt{5}$，$|-\sqrt{2}+\sqrt{3}i|=\sqrt{5}$.

$|\sqrt{3}-\sqrt{2}i|=\sqrt{5}$，$|-2-i|=\sqrt{5}$.

∴ $|1+2i|=|-\sqrt{2}+\sqrt{3}i|=|\sqrt{3}-\sqrt{2}i|$

$=|-2-i|$.

故这四点在以坐标原点为圆心，$\sqrt{5}$为半径的圆周上.

13．设α是1的n次方根，计算$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}$的值.

解：∵ α是1的n次方根，那么$\alpha=1$或$\alpha\neq1$.

当$\alpha=1$时，$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}=n$；

当$\alpha\neq1$时，因$\alpha(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1})=\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\cdots+\alpha^{n-1}+\alpha^n=1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}$

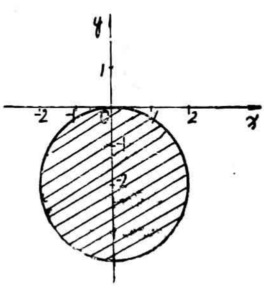
∴ $(1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1})(\alpha-1)=0$.

因$\alpha-1\neq0$，故 $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}=0$.

∴ $1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}$的值是0或n.

14．画出下列图象($z=x+yi$)

1) $|z+2i|\leqslant2$； 2) $\mathrm{Re}z>3$ ($\mathrm{Re}z$代表复数z的实部)； 3) $|z-i|=|z+2|$.



(图1－1.2)

解：1) ∵ $|z+2i|=$

$=\sqrt{x^2+(y+2)^2}$

且 $|z+2i|\leqslant2$.

∴ $\sqrt{x^2+(y+2)^2}\leqslant2$.

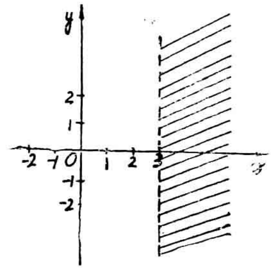
即 $x^2+(y+2)^2\leqslant4$.

此式表示以$(0,-2)$为圆心，2为半径的圆的内部（包括圆周）。如(图1—1·2)

2）∵　$\mathrm{Re}\,z = x$，$\mathrm{Re}\,z > 3$.

∴　$x > 3$.

此式表示直线 $x = 3$ 的右半平面（不包括 $x = 3$），图象如图1—1·3。



（图1－1.3）

3）∵　$|z - i| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$

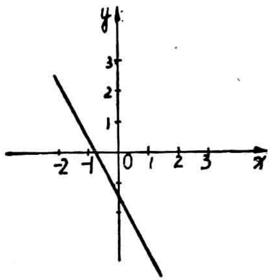
$|z + 2| = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$，

$|z - i| = |z + 2|$.

∴　$\sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + y^2}$.

即　$4x + 2y + 3 = 0$.

这是一直线方程，图象如图1—1·4。



（图1－1.4）

※15．满足 $|z| + \mathrm{Re}\,z \leqslant 1$　$(z = x + yi)$ 的点 z 位于何处？

解：∵　$|z| = r$，　$\mathrm{Re}\,z = x = r\cos\theta$；

$|z| + \mathrm{Re}\,z \leqslant 1$，　∴　$r + r\cos\theta \leqslant 1$，

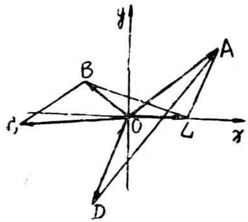
因　$1 + \cos\theta > 0$，所以　$r \leqslant \dfrac{1}{1+\cos\theta}$.

故满足 $|z| + \mathrm{Re}\,z \leqslant 1$ 的点 z 位于抛物线 $r = \dfrac{1}{1+\cos\theta}$ 的内部及其线上。

16．设和复数1、α（$\alpha \neq 0$，$\alpha \neq 1$），β（$\beta \neq 0$，$\beta \neq 1$）、$\alpha\beta$、$\dfrac{\alpha}{\beta}$ 相对应的向量分别是 $\overrightarrow{OL}$、$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$、

$\overrightarrow{OD}$，求证$\triangle OLA \backsim \triangle OBC$，$\triangle OLB \backsim \triangle ODA$.

证明：在$\triangle OLA$和$\triangle OLB$中，



（图1－1.5）

$$\because \quad \frac{|OA|}{|OL|}=\frac{|\alpha|}{|1|}=|\alpha|.$$

$$\frac{|OC|}{|OB|}=\frac{|\alpha\beta|}{|\beta|}=|\alpha|.$$

$$\therefore \quad \frac{|OA|}{|OL|}=\frac{|OC|}{|OB|}.$$

又 $\angle AOL=\arg\alpha$.

$\angle COB=\arg(\alpha\beta)-\arg\beta=\arg\alpha$.

$\therefore \quad \angle AOL=\angle COB$.

$\therefore \quad \triangle OLA \backsim \triangle OBC$.

在$\triangle OLB$和$\triangle ODA$中，

$$\therefore \quad \frac{|OB|}{|OL|}=\frac{|\beta|}{|1|}=|\beta|.$$

$$\frac{|OA|}{|OD|}=\frac{|\alpha|}{\left|\frac{\alpha}{\beta}\right|}=|\beta|. \qquad \therefore \quad \frac{|OB|}{|OL|}=\frac{|OA|}{|OD|}$$

又 $\angle BOL=\arg\beta$

$\angle AOD=-\arg\dfrac{\alpha}{\beta}+\arg\alpha=\arg\beta$.

$\therefore \quad \angle BOL=\angle AOD \qquad \therefore \quad \triangle OLB \backsim \triangle ODA$

※17. P、Q点的复数表示记作z、$2z+3-4i$，若P在以原点为圆心，r为半径的圆上移动，求点Q的轨迹方程。

解：设复数$3-4i$在复平面上所对应的点是C，那么$\overrightarrow{CQ}$表示复数$2z$，所以$|CQ|=|2z|=2|z|=2r$.

此式说明动点Q到C的距离恒等于2r，故Q点的轨迹是以C(3，－4）为圆心，以2r为半径的圆，其方程是