

高等学校教材

高等数学

函授讲义

(修訂本)

第一册

武汉測繪学院数学教研組函授小組編



工业出版社

高等学校教材



高等数学

函授讲义

(修訂本)

第一册

武汉测绘学院数学教研组函授小组編

中国工业出版社

本书是武汉测绘学院高等数学函授讲义的第一册主要内容包
括平面解析几何, 立体解析几何和数学分析中的函数、极限和連
續。书中附有一定数量的練習題和自我检查題。本书除作为函授
教材外, 还可作为从事測量工作以及其它技术工程工作者自学用
书。

高 等 数 学

函 授 讲 义

(修 訂 本)

第 一 册

武汉测绘学院数学教研組函授小組編

*

国家测绘总局測繪书刊編輯部編輯 (北京三里河国家測繪总局)

中国工业出版社出版 (北京佟麟閣路丙 10 号)

北京市书刊出版业营业許可証出字第 110 号

中国工业出版社第四印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店經售

*

开本 $850 \times 1168^{1/32}$ · 印张 $9^{5/8}$ · 字数 245,000

1959年 9 月原測繪出版社北京第一版

1964年 12 月北京第二版 · 1964年 12 月北京第二次印刷

印数 738—3,897 · 定价 (科五) 1.30 元

*

統一书号: K15165 · 2600 (測繪-92)

修訂版前言

本讲义自一九五九年出版后，我們在函授教學實踐中試用了三年，教師、學生和其他讀者認為本書敘述比較詳盡和通俗易懂，適合於函授教學或作為自修高等數學用書。但由於當時編寫和出版都較倉促，讲义的內容和敘述上還存在一些不夠妥善的地方，在本版中，我們作了修改。另外，根據一九六二年教育部頒發的高等工科學校高等數學教學大綱，我們修訂了讲义的某些章節，以便符合教學大綱增強基礎理論部份的精神。在第一冊中變化較大的是極限部份。

由於編者水平所限，本版中還可能存在一些問題，希望讀者提出寶貴的意見。

本讲义由張范蓀同志主編。

武漢測繪學院 高等數學函授小組

1964年元月

一般学习方法指示

(一) 制訂学习計劃、合理地安排学习时间，这对以自学为主的函授生來說是非常重要的。因为函授生一般是利用业余时间来进行学习，如果不能妥善地支配時間，在学习上就会形成被动，甚至于会跟不上学习进度，从而不能坚持学习。特别是处在工农业大跃进的时代里，我們應該更好地完成本身的业务工作，因此工作和学习在時間上就或多或少地发生了矛盾；但另一方面，学习的目的是为了工作效率和质量，所以工作和学习在本质上又是統一的；時間上的矛盾也是可以克服的。克服这个矛盾的主要方法就是要有計劃地学习。函授生在每学期开始时，應該参考自学周历，根据个人的具体情况来制訂一个切实可行的学习計劃，計劃的主要内容是安排学习时间。在時間的分配上，要适合每一課程的特点，比如对高等数学來說，應該把整的時間（二到三个小时）用来閱讀課本，而零碎的時間（一小时左右）就用来作习题等。学习計劃最好以月为单位来制訂，每月底要进行检查，并根据执行的情况制訂下月的計劃。

(二) 学习本課程的几个环节

1. 閱讀課本。这是学习的一个主要环节；在开始閱讀每一章时，應該讀一下本章的內容提要和学习要求，因为它指出了本章的主要内容，这些內容的相互关系以及应注意的問題，然后順序閱讀下去。在閱讀过程中，首先要注意基本概念，例如函数概念、极限概念、导数、积分等。所有这些概念，都是反映了现实事物間的数量关系和空間形体的性态，并且是从这里面抽象而产生出来的。要掌握这些概念，不只應記住它的定义和有关公式，

X

而且要了解它們的來龍去脈，以及它們之間的聯繫，只有掌握了這些概念，才能學好數學。其次，在讀完了一章後，要尽可能地考慮這樣的問題：掌握了的數學工具有什麼實際應用，特別是在測量專業中有什麼應用，這樣做的目的是訓練我們能夠應用數學工具來解決工作中遇到的問題。在本課程中有很多定理，每一個定理都是由定理的假設（條件）、結論和證明所組成的。所有的假設在證明過程中都必須利用到，要求能夠準確地指出每一個假設在定理證明中的什麼地方被用到。對於一些證明比較繁雜的定理，在本書中均略去證明，但讀者應該記住條件和結論。

2. 作習題。在每一章里，都配有一組或幾組習題，函授生應該依次地作完這些題目。作習題的目的，一方面是鞏固理論知識；另一方面是培養解題的熟練技巧。只有作好習題才能獨立地應用數學工具來解決專業里的一些問題。作習題時，首先要看清題意，然後再擬一個簡單的解題計劃，特別是對於較複雜的題目更應如此。計劃包括解題步驟以及應用那一些理論和公式來解這個題目。如果一個題目有幾種解法，應該列舉出這幾種方法進行比較，然後採用最簡捷的方法把題目作出。習題應該整齊地作在活頁紙或練習本上，題目不必抄，但必須標明題號。解題的每一步驟都要寫上，但輔助的計算可在草稿紙上進行。每一組習題作完後可對一下答案，如果發現與答案不符時，需檢查自己的作法和計算是否有錯，對於經過思考仍作不出的題目應請求教師答疑。每一章的習題作完後，要及時地寄到學院來由教師批閱，發回後要仔細看一遍，並注意教師對錯誤地方的批改以及對作業的評語。

3. 回答自我檢查題。在一些主要的章節後面都附有自我檢查題，這是參照該章的主要概念而提出的問答題（或證明）。函授生在讀完每章的內容和作完習題後，就要回答這些問題，並把答案抄在筆記本上，回答問題時不要抄錄書上的條文，而要通過自己的語言來回答。自我檢查題不必寄到學院來，如果有不能回答的或對自己的答案懷疑是否正確的題目，可通過書面答疑來

解决。

4. 測驗作业。学习高等数学这门课程的过程中，函授生应该完成一系列的測驗作业，学校要根据这些作业来評定函授生的平时成績。另一方面，測驗作业經教师批閱后寄回时，函授生通过批語可以知道他对課程的相应部分的理解程度。作測驗作业时要遵守以下規則：

(1) 測驗作业必須独立地完成，否則将失却它的作用。

(2) 作业的解答应叙述得詳細、明确，必要时应附注所根据的理論，图可以徒手画。

(3) 測驗作业应按期繳出，而且不要和习题作在一起。

(4) 如果教师指令重作作业中某一个題目时，函授生应该在短期內完成，然后（如果批閱者要求的話）寄到学院来，在寄改正时要附上批閱过的作业。

5. 請求教师答疑。当函授生在閱讀或解題时，遇到疑难問題，經過钻研仍未能弄清，就要及时地向教师要求书面答疑。书面提問的題目必須写得清楚，要准确地指出什么地方沒有弄清，应尽量避免提問“某一节不懂或某一頁不懂”这样的問題。对提問的問題应标明課本上的頁数和行数。

常用的初等数学公式及希腊字母

(一) 代数

1. 指数和对数运算:

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}, \quad (a^x)^y = a^{xy}, \quad \sqrt[y]{a^x} = a^{x/y}.$$

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1, \quad \log(N_1 \cdot N_2) = \log N_1 + \log N_2,$$

$$\log \frac{N_1}{N_2} = \log N_1 - \log N_2,$$

$$\log(N^n) = n \log N, \quad \log(\sqrt[n]{N}) = \frac{1}{n} \log N, \quad \log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

$$e = 2.7182828 \dots$$

$$\log e = 0.43429 \dots \quad \ln 10 = 2.3026 \dots$$

2. 级数求和公式:

$$(1) \quad a + (a+d) + (a+2d) + \dots + (a+nd) = (n+1)\left(a + \frac{n}{2}d\right).$$

$$(2) \quad 1+2+3+4+\dots+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

$$(3) \quad a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} = a \frac{1-q^n}{1-q}. \quad (q \neq 1)$$

$$(4) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + (n-1)^2 + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

$$(5) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (n-1)^3 + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. 牛顿公式:

$$\begin{aligned} (a+b)^n &= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!} a^{n-2}b^2 + \\ &+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} a^{n-3}b^3 + \dots + \end{aligned}$$

$$+ \frac{n(n-1)\cdots(n-m+1)}{m!} a^{n-m} b^m + \cdots + n a b^{n-1} + b^n.$$

(二) 三角

1. 基本公式:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \sec^2 \alpha, \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \csc^2 \alpha,$$

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha, \quad \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha},$$

$$\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}.$$

2. 約化公式:

函 数	$\beta = \frac{\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi \pm \alpha$	$\beta = \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$	$\beta = \pi - \alpha$
$\sin \beta$	$+\cos \alpha$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$-\sin \alpha$
$\cos \beta$	$\mp \sin \alpha$	$-\cos \alpha$	$\pm \sin \alpha$	$+\cos \alpha$
$\operatorname{tg} \beta$	$\mp \operatorname{ctg} \alpha$	$\pm \operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{ctg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
$\operatorname{ctg} \beta$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$\pm \operatorname{ctg} \alpha$	$\mp \operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{ctg} \alpha$

3. 和差公式:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta \mp 1}{\operatorname{ctg} \beta \pm \operatorname{ctg} \alpha},$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2},$$

XV

$$\cos A \cos B = \frac{1}{2} [\cos(A+B) + \cos(A-B)],$$

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A-B) - \cos(A+B)],$$

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2} [\sin(A+B) + \sin(A-B)].$$

4. 倍角和半角公式:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \quad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}.$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}, \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha},$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}, \quad \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha}.$$

5. 边角关系:

$$(1) \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R. \quad (\text{正弦定理})$$

$$(2) a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \quad (\text{余弦定理})$$

$$(3) \frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)}. \quad (\text{正切定理})$$

$$(4) S = \frac{1}{2} ab \sin c. \quad (\text{面积公式})$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{1}{2}(a+b+c).$$

(三) 初等几何

在下列公式中, 字母 R 、 r 表示半径, h 表示高, l 表示斜高。

1. 圆、圆扇形:

圆: 周长 $= 2\pi r$, 面积 $= \pi r^2$ 。

弧段: 长度 $= \pi \alpha$ (α 为弧段所对的中心角, 以弧度计)。

圆扇形: 面积 $= \frac{1}{2} r^2 \alpha$ (式中 α 为扇形圆心角, 以弧度计)。

2. 梯形: 面积 $= \frac{1}{2}(a+b)h$ (式中 a 为上底, b 为下底)。

3. 正圓錐:

$$\text{体积} = \frac{1}{3}\pi r^2 h; \text{側面积} = \pi r l; \text{全面积} = \pi r(r+l)。$$

4. 截圓錐:

$$\text{体积} = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr); \text{側面积} = \pi l(R+r);$$

$$\text{全面积} = \pi R(R+l) + r\pi(r+l)。$$

5. 球:

$$\text{体积} = \frac{4}{3}\pi r^3; \quad \text{面积} = 4\pi r^2。$$

希臘字母

字母	讀音	字母	讀音
A α	Alpha	N ν	Nu
B β	Beta	Ξ ξ	Xi
Γ γ	Gamma	Ο ο	Omicron
Δ δ	Delta	Ρ ρ	Rho
Ε ε	Epsilon	Σ σ	Sigma
Ζ ζ	Zeta	Τ τ	Tau
Η η	Eta	Υ υ	Upsilon
Θ θ	Theta	Φ φ	Phi
Ι ι	Iota	Χ χ	Chi
Κ κ	Kappa	Ψ ψ	Psi
Λ λ	Lambda	Ω ω	Omega
Μ μ	Mu		

目 录

修訂版前言

一般学习方法指示

常用的初等数学公式和希腊字母

預編 緒論和行列式

第一章 緒論	1
§ 0—1—1 数学的起源和发展	2
§ 0—1—2 初等数学和高等数学	5
§ 0—1—3 有关数学的历史知識	6
第二章 二阶和三阶行列式	8
§ 0—2—1 二阶行列式	8
§ 0—2—2 三阶行列式	13
§ 0—2—3 三阶行列式的性质	16
§ 0—2—4 三元一次方程組的解	19
§ 0—2—5 三元一次齐次方程組的解	22
习题 0—2—甲	28

第一編 平面解析几何

第一章 投影	30
§ 1—1—1 有向綫段	31
§ 1—1—2 有向綫段間的夹角	32
§ 1—1—3 点和有向綫段在軸上的投影	34
§ 1—1—4 有向折綫在軸上的投影	36
习题 1—1—甲	37
第二章 坐标法	38
§ 1—2—1 直綫上点的坐标	38
§ 1—2—2 平面上点的直角坐标	39

§ 1—2—3 极坐标	41
§ 1—2—4 直角坐标与极坐标間的变换公式	43
§ 1—2—5 直角坐标間的变换公式	44
§ 1—2—6 几个基本問題	48
习题 1—2—甲	53
本章自我检查題	55
第三章 曲綫与方程	55
§ 1—3—1 曲綫的方程	56
§ 1—3—2 方程 $f(x, y) = 0$ 的图形	57
§ 1—3—3 两个基本問題	60
§ 1—3—4 曲綫的参数方程	62
§ 1—3—5 曲綫的极坐标方程	64
习题 1—3—甲	68
第四章 直綫	68
§ 1—4—1 平面直綫的各种类型的方程	69
§ 1—4—2 平面直綫的一般方程	74
习题 1—4—甲	76
§ 1—4—3 直綫的法綫式方程	77
§ 1—4—4 直綫的基本問題	81
习题 1—4—乙	86
本章自我检查題	87
第五章 二次曲綫	88
§ 1—5—1 圓的方程	88
§ 1—5—2 橢圓的定义和它的标准方程	90
§ 1—5—3 橢圓形状的研究	91
§ 1—5—4 橢圓的参数方程	94
§ 1—5—5 双曲綫的定义和它的标准方程	95
§ 1—5—6 双曲綫形状的研究和双曲綫的漸近綫	96
§ 1—5—7 反比关系的图形表示法	99
习题 1—5—甲	101
§ 1—5—8 抛物綫的定义和它的标准方程, 抛物綫的形状	103
§ 1—5—9 一般二次方程的研究方法	106

VI

习题 1—5—乙.....	110
本章自我检查题.....	111

第二編 立体解析几何

第一章 空間直角坐标系和矢量代数	112
§ 2—1—1 空間矢量.....	113
§ 2—1—2 矢量的和与差.....	114
§ 2—1—3 矢量与数量的乘积.....	115
§ 2—1—4 两个矢量的数量积.....	118
§ 2—1—5 两个矢量的矢量积.....	120
§ 2—1—6 矢量的二重积.....	123
习题 2—1—甲.....	125
§ 2—1—7 空間直角坐标法.....	126
§ 2—1—8 矢量的坐标.....	128
§ 2—1—9 矢量的方向余弦.....	130
§ 2—1—10 矢量在直角坐标系里的分解式	133
§ 2—1—11 矢量运算的坐标表达式	134
习题 2—1—乙.....	139
本章自我检查题.....	140
第二章 曲面的方程与空間曲綫的方程	141
§ 2—2—1 曲面的方程.....	141
§ 2—2—2 球面方程和柱面方程.....	143
§ 2—2—3 空間曲綫的方程.....	146
§ 2—2—4 曲面和空間曲綫的矢量方程.....	148
习题 2—2—甲.....	151
第三章 平面和空間直綫	152
§ 2—3—1 过定点且垂直于定矢量的平面.....	152
§ 2—3—2 平面的法綫式方程.....	155
§ 2—3—3 两平面的夹角以及两平面互相平行和互相垂直的 条件.....	159
习题 2—3—甲.....	161
§ 2—3—4 空間直綫的方程.....	162

§ 2—3—5 空間兩直線的夾角，兩直線互相垂直和互相平行 的條件·····	167
§ 2—3—6 空間直線和平面的夾角·····	170
習題 2—3—乙·····	171
本章自我檢查題·····	173
第四章 二次曲面 ·····	173
§ 2—4—1 橢圓面·····	174
§ 2—4—2 旋轉橢圓面·····	176
§ 2—4—3 單葉雙曲面·····	178
§ 2—4—4 雙曲拋物面·····	180
§ 2—4—5 其它二次曲面的方程和圖形·····	182
習題 2—4—甲·····	183
第三編 函數 極限 連續	
第一章 實數、絕對值、區間和區域 ·····	185
§ 3—1—1 量的概念·····	185
§ 3—1—2 實數和數軸·····	186
§ 3—1—3 絕對值·····	189
§ 3—1—4 區間和區域·····	191
習題 3—1—甲·····	196
第二章 函數 ·····	197
§ 3—2—1 函數的概念·····	197
§ 3—2—2 函數的定義域·····	202
習題 3—2—甲·····	205
§ 3—2—3 函數的表示法·····	207
§ 3—2—4 複合函數和反函數·····	211
§ 3—2—5 初等函數·····	214
習題 3—2—乙·····	220
本章自我檢查題·····	221
第三章 極限 ·····	221
§ 3—3—1 無限小·····	222
§ 3—3—2 無限小的性質·····	233

VII

§ 3—3—3 无限大和它的性质·····	237
习题 3—3—甲·····	242
§ 3—3—4 函数的极限·····	243
§ 3—3—5 极限运算的性质·····	255
习题 3—3—乙·····	259
§ 3—3—6 极限存在的准则·····	260
§ 3—3—7 两个重要的极限·····	263
§ 3—3—8 无限小的比较·····	268
§ 3—3—9 极限在测量上的应用举例·····	272
习题 3—3—丙·····	275
本章自我检查题·····	276
第四章 函数的連續性 ·····	276
§ 3—4—1 連續函数的定义·····	277
§ 3—4—2 极限与連續的关系·····	280
§ 3—4—3 函数的間断点·····	283
§ 3—4—4 連續函数的性质和初等函数的連續性·····	284
习题 3—4—甲·····	290
本章自我检查题·····	292

預編 緒論和行列式

第一章 緒論

本章內容提要與學習要求 讀者一般都是祖國社會主義建設的尖兵——測繪工作者，在測量的內業或外業工作中，是離不開數學的。我們不僅需要代數、幾何、三角等初等數學知識，同時更需要解析幾何、數學分析、微分幾何等高等數學知識。現在要開始學習高等數學了，無妨先回憶一下，自己究竟學習過那些數學？有什麼心得體會？為什麼現在要進一步學習高等數學？過去學習的方法怎樣？特別是最後這個問題是值得深思的。我們學習數學的收穫的大小是和學習方法有著密切關係的，那末怎樣才是正確的學習方法呢？

有些同志在學習數學時不求甚解，背誦了一些公式，記憶了一些算法，會說幾個名詞術語，就認為把數學學好了，這是不正確的學習方法。我們知道，數學起源於生產實踐，它反映了現實世界裡面的自然規律，我們要用它來指導生產實踐。因此在開始學習之前，先要把學習的目的要求弄明確，對於其中每一個基本概念都不要放過。不但將要學習的投影、坐標、方程、曲綫、矢量、曲面、函數、極限、連續等基本概念要搞清楚，就是從前學過的整數、分數、正負數、虛實數、長度、角度、面積等也要徹底弄明白，否則學習不可能深入，認識不可能深刻，收穫不可能很大。總之，對於數學裡面一些最基本的東西要清清楚楚地知道它是怎樣從實際中來的，怎樣反映了客觀規律，怎樣反回來又為生產服務。本書的緒論也是為了這個目的而寫的。讀者在閱讀緒論時，必有一些東西還不能十分了解，例如在學習到“高等數學的特點”的時候，對於高等數學怎樣以研究變量為主，怎樣運用