工业和信息产业科技与教育专著出版资金资助出版

信号检测与估计理论

（第2版）

Signal Detection and Estimation Theory

◆ 赵树杰　赵建勋　编著

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY　http://www.phei.com.cn

工业和信息产业科技与教育专著出版资金资助出版

信号检测与估计理论

（第2版）

赵树杰　赵建勋　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内容简介

本书系统论述噪声干扰环境中信号状态的统计检测、信号参量的统计估计和信号波形的最佳滤波的概念、理论、方法和性能，这些内容是研究随机信号处理必备的理论知识，也为信号处理的工程应用提供了理论基础。

本书的内容包括三个部分。观测信号(接收信号)的随机性及其统计特性描述；噪声干扰环境中信号属于哪个状态的统计检测准则、判决方式和性能分析，信号波形检测的最佳判决式、系统结构、检测性能和最佳信号波形设计；噪声干扰环境中信号未知参量或随机参量的统计估计准则、估计量的构造和主要性质，信号波形最佳估计的维纳滤波、自适应滤波和卡尔曼滤波的概念、算法和特点。

本书可作为电子与通信工程领域信号与信息处理、通信与信息系统等学科的研究生和高年级本科生的教材，也可作为从事通信系统、雷达系统、信号与信息处理等工作的工程技术人员的培训教材或参考书。

图书在版编目（CIP）数据

信号检测与估计理论/赵树杰，赵建勋编著. —2 版. —北京：电子工业出版社，2013.9
ISBN 978-7-121-20693-1

I. ①信… II. ①赵… ②赵… III. ①信号检测－高等学校－教材②参数估计－高等学校－教材
IV. ①TN911.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2013）第 128815 号

责任编辑：韩同平　　特约编辑：李佩乾
印　　刷：北京季蜂印刷有限公司
装　　订：北京季蜂印刷有限公司
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×1092　1/16　印张：21　字数：600 千字
印　　次：2013 年 9 月第 1 次印刷
印　　数：2000 册　　定价：55.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

随着现代通信理论、信息理论、计算机科学与技术及微电子技术与器件的飞速发展，随机信号统计处理的理论和技术也在向干扰环境更复杂、信号形式多样化、处理技术更先进、指标要求更高、应用范围越来越广的方向发展，已成功应用于电子信息系统、航空航天系统、自动控制、模式识别、遥测遥控、生物医学工程等领域。信号检测与估计理论是随机信号统计处理的基础理论知识之一。所以，学习信号检测与估计理论，将为深入研究随机信号统计处理的理论、提高信号处理的水平，打下扎实的理论基础；同时，它的基本概念、基本理论和分析问题的基本方法，也为信号处理系统的设计等实际应用提供了理论依据。

本书是作者为电子与通信工程领域研究生和高年级本科生编写的《信号检测与估计理论》教材(清华大学出版社，2005 年)的修编版，主要内容按 46～64 学时编写。全书的数学推演基本保持在高年级本科生和研究生，以及具有线性代数、矩阵理论、概率论和随机信号分析基础知识的工程技术人员所能理解的水平上。本书编写中，重视信号检测与估计理论概念的阐述；注意内容选择的系统性、完整性与突出重点的合理安排；保持数学分析、推演的严谨性；强调所研究理论和所得结论的含义及与实际问题的联系。为了加深对所论述内容的理解，并适当扩展知识面，各章后附有较丰富的练习题，供选做。

本书的内容包括三部分。第一部分(第 1 章、第 2 章)概述全书的主要基础知识。说明观测信号(接收信号)的随机性及随机信号统计处理的含义，简述信号检测与估计的基本含义；扼要复习信号检测与估计理论的主要基础知识，即离散随机信号和连续随机信号的统计特性描述，随机噪声干扰和随机参量信号的数学模型及特性。第二部分(第 3 章、第 4 章)研究信号状态的统计检测理论和信号波形的检测。在概述信号状态统计检测基本概念的基础上，讨论噪声环境中确知信号最佳检测的准则、判决式和性能分析及随机参量信号的统计检测，简述高斯观测信号时信号状态的统计检测及信号的非最佳检测问题；在介绍匹配滤波器理论和连续随机信号正交级数展开两个预备知识后，讨论高斯噪声环境中确知信号波形和随机参量信号波形的最佳检测，检测器结构和检测性能，阐明所得结论的含义，研究最佳信号波形设计等。第三部分(第 5 章、第 6 章)研究信号参量的统计估计理论和信号波形的最佳估计。讨论噪声环境中随机参量和未知非随机参量最佳估计的准则、估计量的构造和估计量的主要性质及信号波形中参量的估计和性质；研究信号波形的最佳滤波，重点讨论连续、离散随机信号维纳滤波的概念和滤波器的设计，随机信号自适应滤波的概念、原理、算法和性能；离散卡尔曼滤波的信号模型、递推公式及算法、特点和性质等。

书中标有“*”的内容建议不讲，标有“*”的习题建议不选做。

本书由赵树杰、赵建勋编著。本书编写中，参考了国内外有关著作和文献，在此向所有参考著作和文献的作者表示诚挚的感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在一些缺点和错误，敬请读者不吝批评指正。

作者的 E-mail：sjzhao@mail.xidian.edu.cn

作　者
2013 年 7 月

目　　录

第 1 章　信号检测与估计概论

1.1　引　　言

信号检测与估计理论是随机信号处理的基础理论知识之一。它将为深入研究随机信号统计处理的理论、提高信号处理的水平，打下扎实的理论基础；同时，它的基本概念、基本理论和分析问题的基本方法，也为信号处理系统的设计等实际应用提供了理论依据。

本章重点讨论电子信息系统中观测(接收)的待处理信号的随机性及其统计处理方法的含义；简述信号的检测理论、估计理论和滤波理论的基本概念。

1.2　信号的随机性及其统计处理方法

在信息系统中，信号是信息的载体。让我们看如下几个信息系统的例子。

图 1.2.1 是一个典型的无线通信系统的原理框图。我们知道，通信的目的是为了传递信息，信源就是信息源，它产生携带信息的电信号，经发送信号处理后，调制成合适的无线电信号，并进行功率放大，由发射天线将其辐射到信道中；无线电信号在信道中以电磁波的形式传播到接收天线；接收系统将接收到的无线电信号经放大、解调后，进行接收信号处理，获取所需要的信息，送入信宿中。

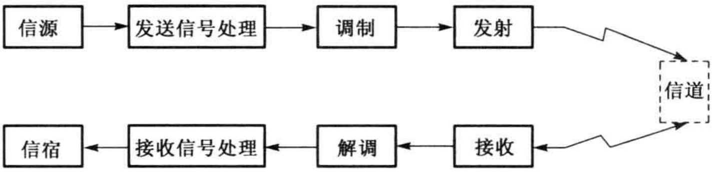

图 1.2.1　无线通信系统原理框图

在雷达系统中，目标(或其他障碍物)的反射回波信号中含有目标的坐标参数、运动参数、特征参数等信息，雷达接收到目标的反射回波信号后，进行信号处理，若判定目标存在，则提取目标的有关参数，建立其航迹，进行目标特性识别研究等。

在自动控制系统中，从前向信道采集的含有系统运行状态信息的信号，经信号处理后，得到系统“最佳”运行状态的控制信号；通过反馈信道将这些控制信号传送给系统的执行部件，调整其运行状态或参数，构成闭环的自动控制系统。

一般地说，信号是自变量的函数。自变量可以是时间、空间、频率等；信号可以是电信号、光信号、温度等物理量。我们将电子信息系统中以时间为自变量的电信号作为研究的对象。除另做说明外，本书中的各类信号(含干扰信号)均为实信号。

1．信号的随机性

在信息系统中，携带信息的信号是有用的信号。最基本的有用信号是确知信号，我们用 $s(t)$ 表示连续的确知信号。考虑到信号在产生、传输、接收和处理的过程中，其参数往往会发生变化，如信号相位的随机变化，振幅的随机起伏，频率的随机变化等；或者，虽然信号参数

的变化是非随机的，但变化后的参数成为未知参量。因此，另一类有用的信号是随机(或未知)参量信号，其连续信号表示为$s(t;\ \boldsymbol{\theta})$，其中，$\boldsymbol{\theta}=(\theta_1\quad \theta_2\quad \cdots\quad \theta_M)^{\mathrm{T}}$代表信号中含有$M$个随机(或未知)参量。

为了传输不同的信息，有用的信号应有两个或两个以上不同的状态。例如，雷达系统的接收信号中，要么有目标反射回波信号(目标存在)，要么没有目标反射回波信号(目标不存在)，是两个不同的信号状态；类似地，M元通信系统中，有用的信号有M个不同的状态。

实际系统中，信号在产生、传输、接收和处理的过程中，不可避免地会受到系统内部和系统外部各种各样的随机干扰。系统内部干扰主要有器件热噪声、电源波动、系统特性不理想、正交双通道信号处理中正交两路信号的幅度不一致性和相位不正交性、多通道信号处理时通道之间的不平衡性、数/模变换的量化误差、运算中的有限字长效应等。各种无源干扰、天电干扰、有源干扰，大气层、电离层、宇宙空间中自然界的各种电磁现象，电气设备、无线电台、电视台、通信系统等，其信号的频谱有的比较复杂，频率分量占的频带也比较宽，这样，这些信号的部分频率分量将进入所研究的系统，形成系统的外部干扰。

在通信、雷达等电子信息系统中，接收到的无源干扰、有源干扰等各种杂波，在信号状态检测之前，要进行杂波抑制处理，如自适应天线旁瓣相消(Adaptive Antenna Side Beam Cancel)，动目标显示(Moving Target Indication)、自适应动目标显示(Adaptive Moving Target Indication)和动目标检测(Moving Target Detection)，恒虚警率(Constant False Alarm Rate)处理等。杂波抑制处理后的杂波剩余分量，基本上具有随机噪声的统计特性。这样，在研究信号的检测与估计问题时，可将随机干扰统称为噪声，记为$n(t)$。

根据噪声与有用信号之间的关系，可将噪声分为加性噪声、乘性噪声和乘加噪声三类。如果噪声与有用信号之间是叠加的关系，则称为加性噪声；如果噪声是对有用信号的一种调制，则称为乘性噪声；如果噪声中既含有加性分量，又含有乘性分量，则称为乘加噪声。

由于实际系统中，噪声的主要分量是加性分量，所以在电子信息系统中一般只考虑加性噪声。这样，持续时间为($0\leqslant t\leqslant T$)的观测信号(接收信号)$x(t)$可表示为

$$x(t)=s(t)+n(t)\qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{1.2.1a}$$

或

$$x(t)=s(t;\ \boldsymbol{\theta})+n(t)\qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{1.2.1b}$$

它是待处理的连续信号。因为干扰$n(t)$是随机噪声，所以信号$x(t)$一定是连续随机信号。

待处理信号$x(t)$的离散表示为

$$x_k=s_k+n_k\qquad k=1,2,\cdots,N \tag{1.2.2a}$$

或

$$x_k=s_{k|\boldsymbol{\theta}}+n_k\qquad k=1,2,\cdots,N \tag{1.2.2b}$$

$x_k(k=1,2,\cdots,N)$是离散随机信号。

2. 随机信号统计处理的理论和方法

前面已经讨论了，随机噪声干扰环境中，待处理的观测信号(接收信号)是随机信号。随机信号是具有统计特性的信号，应当用统计学中的理论和方法进行处理，这主要体现在如下三个方面。

(1) 对随机信号的特性进行统计描述，即用概率密度函数，均值、方差、相关函数、协方差函数等统计平均量，及频域的功率谱密度等来描述随机信号的统计特性。

(2) 基于随机信号统计特性所提出的处理指标要求是一个统计指标，选用的处理准则是统计意义上的最佳准则，进而有诸如信号状态的判决、信号参量的估计、信号波形的滤波等相应的统计处理方法。

(3) 处理结果的评价，即性能用相应的统计平均量，如判决概率、平均代价、平均错误概率、均方误差等来度量。

所以，对随机信号的处理是统计信号处理。我们将要研究的信号检测与估计理论，就是按照上述三个方面展开讨论的。

1.3 信号检测与估计理论概述

信号检测与估计理论，研究信号状态最佳判决、信号参量最佳估计和信号波形最佳滤波的概念、方法和性能。

在随机噪声干扰的环境中，根据接收信号在不同信号状态下统计特性的差别，采用某种最佳信号检测准则，做出信号是属于哪个状态的判决，研究检测系统的结构，分析信号检测的性能等，就是信号状态统计检测理论研究的内容。

在随机噪声干扰的环境中，根据观测信号及其统计特性，采用某种最佳信号参量估计准则，研究估计量的构造，讨论估计量的性质，就是信号参量统计估计理论研究的内容。

如果估计的是信号的连续时间波形或离散时刻状态，就是信号的滤波。信号的滤波一般采用线性最小均方误差准则。根据观测信号、被估计信号的数学模型，估计信号当前时刻的波形或状态，称为滤波；估计信号未来某时刻的波形或状态，称为预测；估计信号过去某时刻的波形或状态，称为平滑。实际上，还可以实现信号波形或状态的其他估计。

让我们通过下面两个例子来说明这些问题。

雷达系统中，当没有目标反射回波信号时，接收信号 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t)=n(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.3.1a}$$

而当发射信号碰到目标产生反射回波信号 $s(t)$ 时，接收信号 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t)=s(t)+n(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.3.1b}$$

其中，$n(t)$ 是随机噪声。

根据有和没有目标反射回波信号时，接收信号 $x(t)$ 统计特性的差别，可以判决有目标或者没有目标；一旦判决目标存在，则需要确定目标的有关参数：斜距 R，方位 β，高度 H 等，如图 1.3.1 所示；还需要估计目标的速度 v，多普勒频率 f_{d} 等运动参数，并建立目标的航迹，预测未来某时刻目标的状态，以实现目标跟踪等功能。这就是雷达系统中，信号状态的统计检测，信号参量的统计估计和信号波形或状态的滤波。

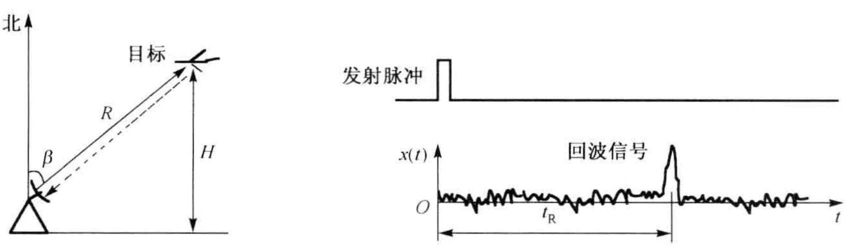

图 1.3.1 雷达参数与回波信号示意图

另一个典型例子是二元通信系统。二元通信系统信号的状态有两个：$s_0(t)(0 \leqslant t \leqslant T)$ 和 $s_1(t)(0 \leqslant t \leqslant T)$。这样，当信号的状态是 $s_0(t)(0 \leqslant t \leqslant T)$ 时，接收信号 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t)=s_0(t)+n(t) \qquad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1.3.2a}$$

而当信号的状态是 $s_1(t)(0 \leqslant t \leqslant T)$ 时，接收信号 $x(t)$ 可以表示为

$$x(t)=s_1(t)+n(t) \qquad 0\leqslant t\leqslant T \tag{1.3.2b}$$

其中，$n(t)$ 是随机噪声。

当信号的状态不同时，接收信号 $x(t)$ 的统计特性是不一样的，于是可以判决信号是两个可能状态中的哪一个；进而能够估计该信号的振幅、相位、频率和到达时间等参数；还可以从随机噪声干扰的背景中恢复信号的波形。这就是二元通信系统中的信号检测与估计问题。

习题 1

1.1 在雷达系统中，山丘等产生的固定杂波与云雨等产生的运动杂波，统计特性上有哪些主要差别？

1.2 在通信系统中，接收信号的功率信噪比对通信质量有哪些主要影响？

1.3 从概念上说明，确知信号加随机噪声的观测信号 $x(t)=s(t)+n(t)(0\leqslant t\leqslant T)$ 的统计特性主要决定于随机噪声的统计特性；而随机参量信号加随机噪声的观测信号 $x(t)=s(t;\boldsymbol{\theta})+n(t)(0\leqslant t\leqslant T)$ 的统计特性既与随机噪声的统计特性有关，也与信号随机参量的统计特性有关。

1.4 随机噪声背景中，信号状态的统计检测结果、信号参量的统计估计结果，为什么要用统计平均量来评价？

第 2 章　信号检测与估计理论的基础知识

2.1　引　　言

第 1 章中我们已经指出，观测信号(接收信号)是随机信号，应当用统计信号处理的理论和方法进行处理。所以需要对随机信号进行分析，它是信号检测与估计理论的基础知识。

本章重点讨论离散随机信号、连续随机信号的统计特性；研究线性系统对平稳随机信号的响应；建立随机噪声的常用数学模型；简要介绍随机参量信号的统计特性。

需要说明的是，本章讨论的大部分内容在先修课程中均有论述。所以，这里是将与本书密切相关的内容做扼要复习。

2.2　离散随机信号的统计特性描述

一维离散随机信号是一个随机变量；N 个一维离散随机信号构成 N 维离散随机信号矢量。为简明，前者简称为离散随机信号，后者简称为离散随机信号矢量。

2.2.1　离散随机信号的概率密度函数

离散随机信号 x 的概率密度函数(Probability Density Function) $p(x)$ 是其全部统计特性的数学描述。概率密度函数具有如下主要特性。

(1) 概率密度函数 $p(x)$ 是非负的，即

$$p(x) \geqslant 0 \tag{2.2.1}$$

(2) 概率密度函数 $p(x)$ 的全域积分等于 1，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\mathrm{d}x = 1 \tag{2.2.2}$$

(3) 离散随机信号 x 落在 $[a,b]$ 区间的概率 $P(a \leqslant x \leqslant b)$，等于其概率密度函数 $p(x)$ 在该区间的积分，即

$$P(a \leqslant x \leqslant b) = \int_{a}^{b} p(x)\mathrm{d}x \tag{2.2.3}$$

2.2.2　离散随机信号的统计平均量

离散随机信号 x 的均值
$$\mu_x = \mathrm{E}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x)\mathrm{d}x \tag{2.2.4}$$

x 的均方值
$$\varphi_x^2 = \mathrm{E}(x^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x \tag{2.2.5}$$

x 的方差
$$\sigma_x^2 = \mathrm{E}\left[(x-\mu_x)^2\right] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_x)^2 p(x)\mathrm{d}x \tag{2.2.6}$$

并有关系式
$$\sigma_x^2 = \varphi_x^2 - \mu_x^2 \tag{2.2.7}$$

离散随机信号 x 还有高阶统计平均量。x 的均值 μ_x、均方值 φ_x^2、方差 σ_x^2 等统计平均量是其主要统计特性的数学描述。

2.2.3 常用的离散随机信号

统计特性不同的离散随机信号 x，具有不同的分布，即有不同的概率密度函数表示式。下面是一些常用的离散随机信号。

(1) 均匀分布的离散随机信号

若离散随机信号 x 的概率密度函数

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a\leqslant x\leqslant b\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{2.2.8}$$

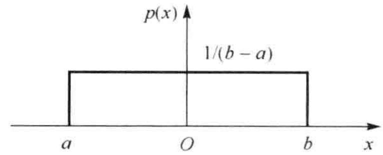

图 2.2.1 均匀分布离散随机信号的概率密度函数

如图 2.2.1 所示，则称 x 在 $[a,b]$ 区间内是服从均匀分布的离散随机信号。

该离散随机信号的均值 $\mu_x=\dfrac{b-a}{2}$

方差 $\sigma_x^2=\dfrac{(b-a)^2}{12}$

(2) 对称三角分布的离散随机信号

若离散随机信号 x 的概率密度函数

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2}|x| & -a\leqslant x\leqslant a \quad 0<a<\infty\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \tag{2.2.9}$$

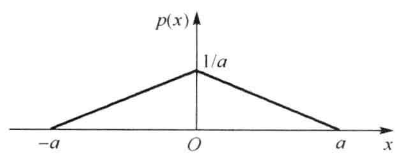

图 2.2.2 对称三角分布离散随机信号的概率密度函数

如图 2.2.2 所示，则称 x 在 $[-a,a]$ 区间内是服从对称三角分布的离散随机信号。

该离散随机信号的均值 $\mu_x=0$

方差 $\sigma_x^2=a^2/6$

(3) 单边、双边指数分布的离散随机信号

若离散随机信号 x 的概率密度函数

$$p(x)=\begin{cases}\lambda\exp[-\lambda(x-\beta)] & x\geqslant\beta\\ 0 & x<\beta\end{cases} \tag{2.2.10}$$

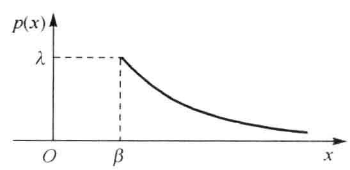

图 2.2.3 单边指数分布离散随机信号的概率密度函数

如图 2.2.3 所示，则称 x 是参数为 (λ,β) 的单边指数分布离散随机信号。

该离散随机信号的均值 $\mu_x=\beta+1/\lambda$

方差 $\sigma_x^2=1/\lambda^2$

若离散随机信号 x 的概率密度函数

$$p(x)=\frac{\lambda}{2}\exp(-\lambda|x-\beta|) \quad -\infty<x<\infty \tag{2.2.11}$$

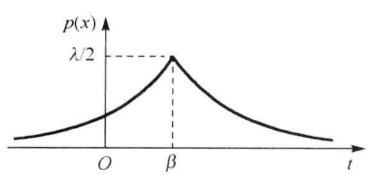

图 2.2.4 双边指数分布离散随机信号的概率密度函数

如图 2.2.4 所示，则称 x 是参数为 (λ,β) 的双边指数分布离散随机信号。

该离散随机信号的均值 $\mu_x=\beta$

方差 $$\sigma_x^2 = 2/\lambda^2$$

(4) 高斯分布的离散随机信号

若离散随机信号 x 的均值为 μ_x，方差为 σ_x^2，概率密度函数为

$$p(x) = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_x^2}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right] \quad -\infty < x < \infty \qquad (2.2.12)$$

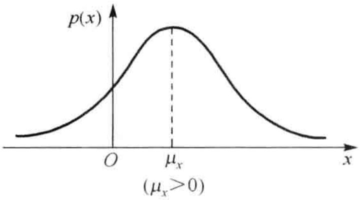

图 2.2.5 高斯分布离散随机信号的概率密度函数

如图 2.2.5 所示，则称 x 是参数为 (μ_x, σ_x^2) 的高斯分布 (Gaussian Distribution) 离散随机信号，简称高斯离散随机信号，又称正态分布 (Normal Distribution) 离散随机信号。通常，x 的可能取值范围可以省略，默认为 $-\infty < x < \infty$。

高斯离散随机信号 x 是具有多个重要特性的离散随机信号。由式 (2.2.12) 知，高斯离散随机信号的概率密度函数 $p(x)$ 是由其均值 μ_x 和方差 σ_x^2 这两个参数决定的。就是说，对于高斯离散随机信号 x，只要获得表征其主要统计特性的均值 μ_x 和方差 σ_x^2，就等于获得表征其全部统计特性的概率密度函数 $p(x)$。这是高斯离散随机信号的一个重要特性。根据这一特性，均值为 μ_x、方差为 σ_x^2，服从高斯分布的离散随机信号 x 可以简记为 $x \sim \mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$。

2.2.4 离散随机信号矢量的联合概率密度函数

N 个离散随机信号 $x_1, x_2, \cdots, x_N$ 可构成 N 维离散随机信号矢量，表示为

$$\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N)^{\mathrm{T}} \qquad (2.2.13)$$

可简记为 $\boldsymbol{x}$。

N 维离散随机信号矢量 $\boldsymbol{x}$ 的 N 维联合概率密度函数 $p(\boldsymbol{x}) = p(x_1, x_2, \cdots, x_N)$ 是其全部统计特性的数学描述。

2.2.5 离散随机信号矢量的统计平均量

N 维离散随机信号矢量 $\boldsymbol{x} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_N)^{\mathrm{T}}$ 的均值矢量

$$\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{x}} = (\mu_{x_1} \quad \mu_{x_2} \quad \cdots \quad \mu_{x_N})^{\mathrm{T}} \qquad (2.2.14)$$

式中，μ_{x_k} 是第 $k(k=1,2,\cdots,N)$ 个分量 x_k 的均值，即

$$\mu_{x_k} = \mathrm{E}(x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} x_k p(x_k) \mathrm{d}x_k \qquad k = 1,2,\cdots,N \qquad (2.2.15)$$

协方差矩阵 $$\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{x}} = \mathrm{E}\left[(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{x}})(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{x}})^{\mathrm{T}}\right] = \begin{bmatrix} c_{x_1x_1} & c_{x_1x_2} & \cdots & c_{x_1x_N} \\ c_{x_2x_1} & c_{x_2x_2} & \cdots & c_{x_2x_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{x_Nx_1} & c_{x_Nx_2} & \cdots & c_{x_Nx_N} \end{bmatrix} \qquad (2.2.16)$$

式中，$c_{x_jx_k}$ 是 x_j 与 x_k 的协方差，即

$$\begin{aligned} c_{x_jx_k} &= \mathrm{E}\left[(x_j - \mu_{x_j})(x_k - \mu_{x_k})\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x_j - \mu_{x_j})(x_k - \mu_{x_k}) p(x_j, x_k) \mathrm{d}x_j \mathrm{d}x_k = c_{x_kx_j} \qquad j,k = 1,2,\cdots,N \end{aligned} \qquad (2.2.17)$$