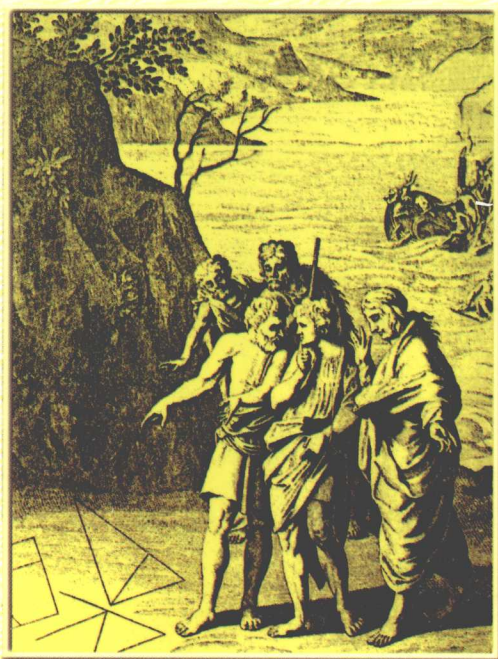


三角学系列

三角形的解法与应用

池伯鼎 著



- 等腰三角形及正多边形的解法
- 特殊条件的三角形的解法
- 在立体几何方面的应用
- 在测量方面的应用
- 在物理和化学等方面的一些应用

013043289

G634. 643
02



池伯鼎 著

三角学系列

三角形的解法与应用

- ◎ 等腰三角形及正多边形的解法
- ◎ 特殊条件的三角形的解法
- ◎ 在立体几何方面的应用
- ◎ 在测量方面的应用
- ◎ 在物理和化学等方面的一些应用



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS



北航

C1650878

G634.643

02

08500810

内容提要

本书介绍了中学数学中三角形的常见证明方法,并对一些证明技巧做了扼要的叙述.书中还安排了一定数量的例题和练习,其中较难者给了提示.

本书适合中学师生及师范院校数学系数学教育专业师生使用.

图书在版编目(CIP)数据

三角形的解法与应用/池伯鼎著. —哈尔滨:

哈尔滨工业大学出版社, 2012. 7

ISBN 978 - 7 - 5603 - 3637 - 4

I. ①三… II. ①池… III. ①几何课—中学—教学参考资料

IV. ①G634. 633

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 149741 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 杨万鑫

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市石桥印务有限公司

开 本 787mm × 1092mm 1/16 印张 8.5 字数 90 千字

版 次 2012 年 7 月第 1 版 2012 年 7 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 3637 - 4

定 价 18.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
新编中学数学解题方法全书(高中版)上卷	2007—09	38.00	7
新编中学数学解题方法全书(高中版)中卷	2007—09	48.00	8
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(一)	2007—09	42.00	17
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(二)	2007—09	38.00	18
新编中学数学解题方法全书(高中版)下卷(三)	2010—06	58.00	73
新编中学数学解题方法全书(初中版)上卷	2008—01	28.00	29
新编中学数学解题方法全书(初中版)中卷	2010—07	38.00	75
新编平面解析几何解题方法全书(专题讲座卷)	2010—01	18.00	61

数学眼光透视	2008—01	38.00	24
数学思想领悟	2008—01	38.00	25
数学应用展现	2008—01	38.00	26
数学建模导引	2008—01	28.00	23
数学方法溯源	2008—01	38.00	27
数学史话览胜	2008—01	28.00	28

从毕达哥拉斯到怀尔斯	2007—10	48.00	9
从迪利克雷到维斯卡尔迪	2008—01	48.00	21
从哥德巴赫到陈景润	2008—05	98.00	35
从庞加莱到佩雷尔曼	2011—08	138.00	136
从比勃巴赫到德·布朗斯	即将出版		

数学解题中的物理方法	2011—06	28.00	114
数学解题的特殊方法	2011—06	48.00	115
中学数学计算技巧	2012—01	48.00	116
中学数学证明方法	2012—01	58.00	117
数学趣题巧解	2012—03	28.00	128

数学奥林匹克与数学文化(第一辑)	2006—05	48.00	4
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(竞赛卷)	2008—01	48.00	19
数学奥林匹克与数学文化(第二辑)(文化卷)	2008—07	58.00	34
数学奥林匹克与数学文化(第三辑)(竞赛卷)	2010—01	48.00	59
数学奥林匹克与数学文化(第四辑)(竞赛卷)	2011—08	58.00	87



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
发展空间想象力	2010-01	38.00	57
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第1版)	2007-01	68.00	11,12
走向国际数学奥林匹克的平面几何试题诠释(上、下)(第2版)	2010-02	98.00	63,64
平面几何证明方法全书	2007-08	35.00	1
平面几何证明方法全书习题解答(第1版)	2005-10	18.00	2
平面几何证明方法全书习题解答(第2版)	2006-12	18.00	10
最新世界各国数学奥林匹克中的平面几何试题	2007-09	38.00	14
数学竞赛平面几何典型题及新颖解	2010-07	48.00	74
初等数学复习及研究(平面几何)	2008-09	58.00	38
初等数学复习及研究(立体几何)	2010-06	38.00	71
初等数学复习及研究(平面几何)习题解答	2009-01	48.00	42
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(上)	2009-06	48.00	49
世界著名平面几何经典著作钩沉——几何作图专题卷(下)	2011-01	88.00	80
世界著名平面几何经典著作钩沉(民国平面几何老课本)	2011-03	38.00	113
世界著名数论经典著作钩沉(算术卷)	2012-01	28.00	125
世界著名数学经典著作钩沉——立体几何卷	2011-02	28.00	88
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷I)	2010-06	28.00	69
世界著名三角学经典著作钩沉(平面三角卷II)	2011-01	28.00	78
世界著名初等数论经典著作钩沉(理论和实用算术卷)	2011-07	38.00	126
几何学教程(平面几何卷)	2011-03	68.00	90
几何学教程(立体几何卷)	2011-07	68.00	130
几何变换与几何证题	2010-06	88.00	70
几何瑰宝——平面几何500名题暨1000条定理(上、下)	2010-07	138.00	76,77
三角形的解法与应用	2012-07	18.00	183
近代的三角形几何学	2012-07	48.00	184
一般折线几何学	即将出版	58.00	203
三角形的五心	2009-06	28.00	51
三角形趣谈	2012-08	28.00	212
俄罗斯平面几何问题集	2009-08	88.00	55
俄罗斯平面几何5000题	2011-03	58.00	89
计算方法与几何证题	2011-06	28.00	129
463个俄罗斯几何老问题	2012-01	28.00	152
近代欧氏几何学	2012-03	48.00	162
罗巴切夫斯基几何学及几何基础概要	2012-07	28.00	188



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
超越吉米多维奇——数列的极限	2009-11	48.00	58
Barban Davenport Halberstam 均值和	2009-01	40.00	33
初等数论难题集(第一卷)	2009-05	68.00	44
初等数论难题集(第二卷)(上、下)	2011-02	128.00	82,83
谈谈素数	2011-03	18.00	91
平方和	2011-03	18.00	92
数论概貌	2011-03	18.00	93
代数数论	2011-03	48.00	94
初等数论的知识与问题	2011-02	28.00	95
超越数论基础	2011-03	28.00	96
数论初等教程	2011-03	28.00	97
数论基础	2011-03	18.00	98
解析数论基础	2012-08	28.00	216
数论入门	2011-03	38.00	99
数论开篇	2012-07	28.00	194
解析数论引论	2011-03	48.00	100
基础数论	2011-03	28.00	101
超越数	2011-03	18.00	109
三角和方法	2011-03	18.00	112
谈谈不定方程	2011-05	28.00	119
整数论	2011-05	38.00	120
初等数论 100 例	2011-05	18.00	122
初等数论经典例题	2012-07	18.00	204
最新世界各国数学奥林匹克中的初等数论试题(上、下)	2012-01	138.00	144,145
算术探索	2011-12	158.00	148
初等数论(Ⅰ)	2012-01	18.00	156
初等数论(Ⅱ)	2012-01	18.00	157
初等数论(Ⅲ)	2012-01	28.00	158
组合数学浅谈	2012-03	28.00	159
同余理论	2012-05	38.00	163
丢番图方程引论	2012-03	48.00	172



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出版 时间	定 价	编 号
历届 IMO 试题集(1959—2005)	2006—05	58.00	5
历届 CMO 试题集	2008—09	28.00	40
历届加拿大数学奥林匹克试题集	2012—08	38.00	215
历届美国数学奥林匹克试题集:多解推广加强	2012—08	38.00	209
历届国际大学生数学竞赛试题集(1994—2010)	2012—01	28.00	143
全国大学生数学夏令营数学竞赛试题及解答	2007—03	28.00	15
全国大学生数学竞赛辅导教程	2012—07	28.00	189
历届美国大学生数学竞赛试题集	2009—03	88.00	43
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(上)	2012—04	28.00	169
前苏联大学生数学竞赛试题及解答(下)	2012—04	38.00	170

整函数	2012—08	18.00	161
俄罗斯初等数学问题集	2012—05	38.00	177
俄罗斯函数问题集	2011—03	38.00	103
俄罗斯组合分析问题集	2011—01	48.00	79
博弈论精粹	2008—03	58.00	30
多项式和无理数	2008—01	68.00	22
模糊数据统计学	2008—03	48.00	31
受控理论与解析不等式	2012—05	78.00	165
解析不等式新论	2009—06	68.00	48
反问题的计算方法及应用	2011—11	28.00	147
建立不等式的方法	2011—03	98.00	104
数学奥林匹克不等式研究	2009—08	68.00	56
不等式研究(第二辑)	2012—02	68.00	153
初等数学研究(Ⅰ)	2008—09	68.00	37
初等数学研究(Ⅱ)(上、下)	2009—05	118.00	46,47
中国初等数学研究 2009 卷(第 1 辑)	2009—05	20.00	45
中国初等数学研究 2010 卷(第 2 辑)	2010—05	30.00	68
中国初等数学研究 2011 卷(第 3 辑)	2011—07	60.00	127
中国初等数学研究 2012 卷(第 4 辑)	2012—07	48.00	190
数阵及其应用	2012—02	28.00	164
绝对值方程—折边与组合图形的解析研究	2012—07	48.00	186
不等式的秘密(第一卷)	2012—02	28.00	154
初等不等式的证明方法	2010—06	38.00	123
数学奥林匹克不等式散论	2010—06	38.00	124
数学奥林匹克不等式欣赏	2011—09	38.00	138
数学奥林匹克超级题库(初中卷上)	2010—01	58.00	66
数学奥林匹克不等式证明方法和技巧(上、下)	2011—08	158.00	134,135



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
500 个最新世界著名数学智力趣题	2008—06	48.00	3
400 个最新世界著名数学最值问题	2008—09	48.00	36
500 个世界著名数学征解问题	2009—06	48.00	52
400 个中国最佳初等数学征解老问题	2010—01	48.00	60
500 个俄罗斯数学经典老题	2011—01	28.00	81
1000 个国外中学物理好题	2012—04	48.00	174
300 个日本高考数学题	2012—05	38.00	142
500 个前苏联早期高考数学试题及解答	2012—05	28.00	185

数学 我爱你	2008—01	28.00	20
精神的圣徒 别样的人生——60 位中国数学家成长的历程	2008—09	48.00	39
数学史概论	2009—06	78.00	50
斐波那契数列	2010—02	28.00	65
数学拼盘和斐波那契魔方	2010—07	38.00	72
斐波那契数列欣赏	2011—01	28.00	160
数学的创造	2011—02	48.00	85
数学中的美	2011—02	38.00	84

最新全国及各省市高考数学试卷解法研究及点拨评析	2009—02	38.00	41
高考数学的理论与实践	2009—08	38.00	53
中考数学专题总复习	2007—04	28.00	6
向量法巧解数学高考题	2009—08	28.00	54
新编中学数学解题方法全书(高考复习卷)	2010—01	48.00	67
新编中学数学解题方法全书(高考真题卷)	2010—01	38.00	62
新编中学数学解题方法全书(高考精华卷)	2011—03	68.00	118
高考数学核心题型解题方法与技巧	2010—01	28.00	86
数学解题——靠数学思想给力(上)	2011—07	38.00	131
数学解题——靠数学思想给力(中)	2011—07	48.00	132
数学解题——靠数学思想给力(下)	2011—07	38.00	133
2011 年全国及各省市高考数学试题审题要津与解法研究	2011—10	48.00	139
新课标高考数学——五年试题分章详解(2007~2011)(上、下)	2011—10	78.00	140, 141
30 分钟拿下高考数学选择题、填空题	2012—01	48.00	146
高考数学压轴题解题诀窍(上)	2012—02	78.00	166
高考数学压轴题解题诀窍(下)	2012—03	28.00	167



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
格点和面积	2012-07	18.00	191
射影几何趣谈	2012-04	28.00	175
斯潘纳尔引理——从一道加拿大数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
李普希兹条件——从几道近年高考数学试题谈起	即将出版		
拉格朗日中值定理——从一道北京高考试题的解法谈起	2012-10	18.00	197
闵科夫斯基定理——从一道清华大学自主招生试题谈起	2012-10	18.00	198
哈尔测度——从一道冬令营试题的背景谈起	2012-08	28.00	202
切比雪夫逼近问题——从一道中国台北数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
伯恩斯坦多项式与贝齐尔曲面——从一道全国高中数学联赛试题谈起	即将出版		
卡塔兰猜想——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
麦卡锡函数和阿克曼函数——从一道前南斯拉夫数学奥林匹克试题谈起	2012-07	18.00	201
贝蒂定理与拉姆贝克莫斯尔定理——从一个拣石子游戏谈起	即将出版		
皮亚诺曲线和豪斯道夫分球定理——从无限集谈起	2012-08	18.00	211
平面凸图形与凸多面体	即将出版		
斯坦因豪斯问题——从一道二十五省市自治区中学数学竞赛试题谈起	2012-07	18.00	196
纽结理论中的亚历山大多项式与琼斯多项式——从一道北京市高一数学竞赛试题谈起	2012-07	28.00	195
原则与策略——从波利亚“解题表”谈起	即将出版		
转化与化归——从三大尺规作图不能问题谈起	2012-08	28.00	214
代数几何中的贝祖定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	2012-07	18.00	193
成功连贯理论与约当块理论——从一道比利时数学竞赛试题谈起	2012-04	18.00	180
磨光变换与范·德·瓦尔登猜想——从一道环球城市竞赛试题谈起	即将出版		
素数判定与大数分解	2012-08	18.00	199
置换多项式及其应用	即将出版		
许瓦兹引理——从一道西德 1981 年数学奥林匹克试题谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
椭圆函数与模函数——从一道美国加州大学洛杉矶分校(UCLA)博士资格考试谈起	即将出版		
差分方程的拉格朗日方法——从一道 2011 年全国高考理科试题的解法谈起	2012-08	28.00	200
拉姆塞定理——从王诗成院士的一个问题谈起	即将出版		
力学在几何中的一些应用	即将出版		
高斯散度定理、斯托克斯定理和平面格林定理——从一道国际大学生数学竞赛试题谈起	即将出版		
康托洛维奇不等式——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
西格尔引理——从一道第 18 届 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
罗斯定理——从一道前苏联数学竞赛试题谈起	即将出版		
拉克斯定理和阿廷定理——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
毕卡大定理——从一道美国大学数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝齐尔曲线——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		
拉格朗日乘子定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
雅可比定理——从一道 2005 年全国高中联赛试题谈起	即将出版		
李天岩—约克定理——从一道波兰数学竞赛试题谈起	即将出版		
整系数多项式因式分解的一般方法——从克朗耐克算法谈起	即将出版		
布劳维不动点定理——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
压缩不动点定理——从一道高考数学试题的解法谈起	即将出版		
伯恩赛德定理——从一道英国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
布查特—莫斯特定理——从一道上海市初中竞赛试题谈起	即将出版		
数论中的同余数问题——从一道普特南竞赛试题谈起	即将出版		
范·德蒙行列式——从一道美国数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
中国剩余定理——从一道美国数学奥林匹克试题的解法谈起	即将出版		
牛顿程序与方程求根——从一道全国高考试题解法谈起	即将出版		
库默尔定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卢丁定理——从一道冬令营试题的解法谈起	即将出版		
沃斯滕霍姆定理——从一道 IMO 预选试题谈起	即将出版		
卡尔松不等式——从一道莫斯科数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
信息论中的香农熵——从一道近年高考压轴题谈起	即将出版		
约当不等式——从一道希望杯竞赛试题谈起	即将出版		
拉比诺维奇定理	即将出版		
刘维尔定理——从一道《美国数学月刊》征解问题的解法谈起	即将出版		



哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室 已出版(即将出版)图书目录



书 名	出 版 时 间	定 价	编 号
卡塔兰恒等式与级数求和——从一道 IMO 试题的解法谈起	即将出版		
勒让德猜想与素数分布——从一道爱尔兰竞赛试题谈起	即将出版		
天平称重与信息论——从一道基辅市数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
艾思特曼定理——从一道 CMO 试题的解法谈起	即将出版		
一个爱尔特希问题——从一道西德数学奥林匹克试题谈起	即将出版		
有限群中的爱丁格问题——从一道北京市初中二年级数学竞赛试题谈起	即将出版		
贝柯码与编码理论——从一道全国高中联赛试题谈起	即将出版		

中等数学英语阅读文选	2006—12	38.00	13
统计学专业英语	2007—03	28.00	16
统计学专业英语(第二版)	2012—07	48.00	193
幻方和魔方(第一卷)	2012—05	68.00	173
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第一卷)	2012—07	48.00	205
尘封的经典——初等数学经典文献选读(第二卷)	2012—07	38.00	206

实变函数论	2012—06	78.00	181
初等微分拓扑学	2012—07	18.00	182
方程式论	2011—03	38.00	105
初级方程式论	2011—03	28.00	106
Galois 理论	2011—03	18.00	107
代数方程的根式解及伽罗瓦理论	2011—03	28.00	108
线性偏微分方程讲义	2011—03	18.00	110
N 体问题的周期解	2011—03	28.00	111
代数方程式论	2011—05	28.00	121
动力系统的不变量与函数方程	2011—07	48.00	137
基于短语评价的翻译知识获取	2012—02	48.00	168
应用随机过程	2012—04	48.00	187

闵嗣鹤文集	2011—03	98.00	102
吴从斡数学活动三十年(1951~1980)	2010—07	99.00	32

吴振奎高等数学解题真经(概率统计卷)	2012—01	38.00	149
吴振奎高等数学解题真经(微积分卷)	2012—01	68.00	150
吴振奎高等数学解题真经(线性代数卷)	2012—01	58.00	151
钱昌本教你快乐学数学(上)	2011—12	48.00	155
钱昌本教你快乐学数学(下)	2012—03	58.00	171

联系地址:哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 哈尔滨工业大学出版社刘培杰数学工作室

网 址: <http://lpj.hit.edu.cn/>

邮 编:150006

联系电话:0451-86281378 13904613167

E-mail: lpi1378@yahoo.com.cn



VIII

◎

目

录

第一章 三角形的解法 //1

第一节 直角三角形的解法 //1

第二节 斜三角形的解法 //9

第二章 解三角形的应用 //40

第一节 在平面几何方面的应用 //40

第二节 在立体几何方面的应用 //60

第三节 在解析几何方面的应用 //75

第四节 在测量方面的应用 //81

第五节 在物理和化学等方面的一些应用 //104

编辑手记 //122

三角形的解法

第一章

三角形的三条边和三个角,叫做三角形的六个元素.只要知道了一个三角形的三个元素(但至少要是有一个是边),就可以求出其他三个未知的元素.这个求解的过程就叫做解三角形.在解三角形的时候,还可以求出它的面积,以及外接圆或内切圆的半径.

第一节 直角三角形的解法

研究三角形的解法,首先要研究直角三角形的解法,因为它不仅是解三角形的基础,而且在物理、化学和工程技术上也都有着广泛的应用.

一、基本公式

在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 中,若 C 是直角, a, b, c 分别是角 A, B, C 所对的边,则有下列关系:

1. 角与角的相互关系

三角形的内角和为 180° , 因为 $C = 90^\circ$, 所以

$$A + B = 90^\circ \quad (1.1.1)$$

三角形的解法与应用

2. 角与边的相互关系

如图 1.1, a, b 分别是 A 的对边和邻边, c 是斜边, 由三角函数定义, 可以知道

$$\begin{aligned}\sin A &= \frac{a(\text{对边})}{c(\text{斜边})}, \cos A = \frac{b(\text{邻边})}{c(\text{斜边})} \\ \tan A &= \frac{a(\text{对边})}{b(\text{邻边})}, \cot A = \frac{b(\text{邻边})}{a(\text{对边})} \quad (1.1.2) \\ \sec A &= \frac{c(\text{斜边})}{b(\text{邻边})}, \csc A = \frac{c(\text{斜边})}{a(\text{对边})}\end{aligned}$$

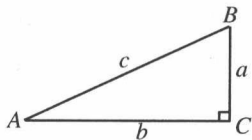


图 1.1

一般的, 在实际应用中往往把上面的前四个式子写成

$$\begin{aligned}a(\text{对边}) &= c(\text{斜边}) \sin A = b(\text{邻边}) \tan A \\ b(\text{邻边}) &= c(\text{斜边}) \cos A = a(\text{对边}) \cot A \quad (1.1.3) \\ c(\text{斜边}) &= \frac{a(\text{对边})}{\sin A} = \frac{b(\text{邻边})}{\cos A}\end{aligned}$$

3. 边与边的相互关系

根据勾股定理

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (1.1.4)$$

4. 三角形的面积

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab \quad (1.1.5)$$

5. 三角形的外接圆半径 R

根据直角三角形性质, 斜边上的中点到这个三角形的三个顶点等远, 因此

$$R = \frac{c}{2} \quad (1.1.6)$$

6. 三角形的内切圆半径 r

如图 1.2, $\text{Rt}\triangle ABC$ 中, 内切圆 O 分别切三边 AB , AC , BC 于点 D , E , F , 联结 OE , OF , 则 $CE = CF = OE = OF$, 且 $AE = AD$, $BF = BD$, 故

$$\begin{aligned} AC + BC &= (CE + AE) + (CF + FB) \\ &= r + AD + r + BD = 2r + AB \end{aligned}$$

所以

$$r = \frac{a + b - c}{2} \quad (1.1.7)$$

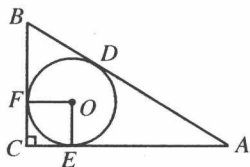


图 1.2

二、基本解法

解直角三角形一般可以分为四种情况:

1. 已知斜边 c 和一锐角 A (或 B)

由式(1.1.1)求出 B (或 A): $B = 90^\circ - A$;

由式(1.1.3)求出 $a = c \sin A$, $b = c \cos A$.

例 1 $\triangle ABC$ 中, C 为直角, $c = 13$ cm (厘米), $A = 30^\circ$, 求其他各角、各边和外接圆及内切圆的半径.

解 $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$

$$a = c \sin A = 13 \sin 30^\circ = 6.5 \text{ (cm)}$$

$$b = c \cos A = 13 \cos 30^\circ = \frac{13\sqrt{3}}{2} \approx 11.3 \text{ (cm)}$$

三角形的解法与应用

$$R = \frac{c}{2} = \frac{13}{2} = 6.5(\text{cm})$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} = \frac{6.5+11.3-13}{2} = 2.4(\text{cm})$$

2. 已知一直角边 a (或 b) 和一锐角 A (或 B)

由式(1.1.1)求出 B (或 A): $B = 90^\circ - A$;

由式(1.1.3)求出 $c = \frac{a}{\sin A}$, $b = a \cot A$.

例2 $\triangle ABC$ 中, C 为直角, $a = 18 \text{ cm}$, $A = 47^\circ$, 求其他各角与各边.

解 $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 47^\circ = 43^\circ$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{18}{\sin 47^\circ} = \frac{18}{0.7314} \approx 24.6(\text{cm})$$

$$b = a \cot A = 18 \cot 47^\circ = 18 \times 0.9325 \approx 16.8(\text{cm})$$

3. 已知斜边 c 和一直角边 a

由式(1.1.2) $\sin A = \frac{a}{c}$, 求出锐角 A ;

由式(1.1.1)求出 $B = 90^\circ - A$;

由式(1.1.3)求出 $b = c \cos A$.

例3 $\triangle ABC$ 中, C 为直角, $c = 25 \text{ cm}$, $a = 7 \text{ cm}$, 求其他各边、各角.

解 $\sin A = \frac{a}{c} = \frac{7}{25} = 0.28$, 所以 $A = 16^\circ 16'$. 故

$$B = 90^\circ - A = 73^\circ 44'$$

$$b = c \cos A = 25 \times \cos 16^\circ 16' \approx 25 \times 0.9598 \approx 24(\text{cm})$$

4. 已知两直角边 a 与 b

由式(1.1.2) $\tan A = \frac{a}{b}$, 求出锐角 A ;

由式(1.1.1)求出 $B = 90^\circ - A$;

由式(1.1.3)求出 $c = \frac{a}{\sin A}$ (也可以由式(1.1.4) $c^2 = a^2 + b^2$ 求出 c).

例4 已知 $\triangle ABC$ 中, C 是直角, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm, 求其他各边与各角.

解 $\tan A = \frac{3}{4} = 0.75$, 所以 $A = 36^\circ 52'$, 故

$$B = 90^\circ - A = 53^\circ 8'$$

$$c = \frac{a}{\sin A} = \frac{3}{0.6} = 5 \text{ (cm)}$$

以上四种情况的直角三角形可以归纳成两种类型:一种是已知一边和一锐角(斜边和一锐角或一直角边和一锐角);另一种是已知两边(斜边和一直角边或两直角边).也就是说,只要知道两个元素(但至少有一边)的直角三角形都能解.

三、等腰三角形及正多边形的解法

1. 等腰三角形的解法

等腰三角形可以分为两个类型:

一种是已知一边一角(腰和底角,腰和顶角,底边和底角,底边和顶角);另一种是已知两边(一腰和底边).解的时候,一般都是先作出底边上的高线,从而可归到直角三角形去解.

例1 等腰三角形腰长为 10 cm, 顶角为 120° , 求它的各边、各角以及内切圆和外接圆的半径.

解 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC = 10$ cm, $A = 120^\circ$, 所以

$$B = C = \frac{1}{2}(180^\circ - A) = 30^\circ$$

过点 A 作 $AD \perp BC$, 交 BC 边于点 D . 在 $\text{Rt} \triangle ABD$ 中, $AB = 10$ cm, $B = 30^\circ$, 所以