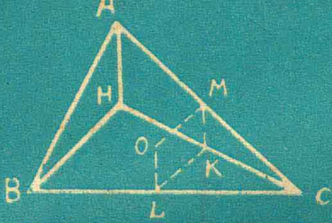
中学数学学习丛书之一

如何证明几何题

邓安邦 编写



四川师范学院

数学系《中学数学教研组》编

说　明

我们伟大的祖国已经进入社会主义革命和社会主义建设新的发展时期。为了在实现新时期的总任务、“提高整个中华民族的科学文化水平”、跟随华主席进行新长征的伟大斗争中贡献我们的一点力量，我们以现行《中学数学教学大纲》中的传统内容为基础，并以适当的加宽、加深和提高，采用统一规划、分人负责、集体讨论的方法，编写了这套《中学数学学习丛书》，供中学数学教师和中学数学爱好者参考。

这套丛书共分十二册：第一册如何证明几何题；第二册轨迹、变换与作图；第三册数、数量与矢量；第四册代数式的恒等变形；第五册初等函数及其恒等变形；第六册平面与空间图形的计算；第七册方程；第八册不等式；第九册二次曲线与极坐标和参数方程；第十册排列、组合与级数；第十一册数列的极限；第十二册中学数学与唯物辩证法。待各册编写完后，准备陆续分册出版。

考虑到这套丛书是中学数学的参考资料，在编写时，我们力求做到：既不脱离中学数学的传统内容，又必须在此基础上加宽、加深和提高，以培养读者深入钻研的精神；要适当介绍一些高等数学的基础知识和方法，但又不完全脱离中学数学的基础，或把高等数学的一些内容简单的搬过来。

在编印过程中，我们得到了不少兄弟院校和有关单位的

支持和帮助，学习了他们的有关资料，雅安地区教育局和印刷厂热情地承担了印刷任务，给我们以有力的支持。在此，特向他们一并表示深切的感谢。

由于我们水平有限，经验不足，加以时间仓卒，这套丛书的缺点和错误在所难免，殷切希望同志们批评指正。

川　师　数　学　系
中学数学教研组
一九七八年十二月

目　　录

一、几何证明题的形式

要想懂得如何证明几何题，必先搞清楚几何证明题究竟有哪几种形式，以及它们之间有什么关系。

1·1 简单几何证明题的变换

1.定义、公理和定理

（1）判断与命题

人们要认识事物，就要经常对客观世界中事物的某种属性或某种关系进行肯定或否定。例如：

平角的一半（或90°的角）是直角；

经过两点的直线有一条，并且只有一条；

如果一个三角形的两边不等，那么它们所对的两角也不等；

经过一点与已知直线垂直的直线，不能有两条；

………

等等。前两条是肯定性的，即断定某种事物是什么或有什么；后两条是否定性的，即断定某种事物不是什么或没有什么。象这种对客观事物的某种属性或某种关系有所肯定或者否定的思维形式，就叫做判断。

由于种种原因，人们对客观事物的认识总是有差异的，

因此作为反映客观现实情况的判断就有可能是截然不同的。所以，对于一个判断来说，它可能是正确的，也可能是错误的，其正确与否，“不是依主观上觉得如何而定”，而是看它是否和客观事实一致。与客观事实一致的判断就是正确的，否则就是错误的。

叙述一个判断的完成语，叫做命题。由于判断有正确与错误之分，因此，命题也有真假之别。上面所列举的四个判断都是真实命题的例子。

在数学里，命题是很多的，如象我们下面将要介绍的定义、公理和定理都是命题。

（2）概念与定义

由于判断是由概念构成的，推理是由判断构成的，因此，概念是思维最基本的单位，是构成判断、推理的要素。

所谓概念，是指反映客观事物的本质属性最基本的思维形式。

要使概念明确，首先必须明了概念的本质属性。

什么是概念的本质属性呢？就拿平行四边形这个概念来说吧，它所反映的对象具有许多属性，如象有四条边、四个角这两个属性，不仅平行四边形具有，而其他的四边形也都具有。象这种不仅为某类事物所具有，而它类事物也具有的属性叫做概念的非本质属性；然而，两组对边分别平行、两组对边分别相等、两组对角分别相等、一组对边平行且相等、对角线互相平分等属性就只为平行四边形所具有，而其他的四边形则不具有。象这种只为某类事物所具有而又区别于它类事物的特殊性质，叫做概念的本质属性。一个概念之所以能区别于另一个概念，就在于它们各自具有不同的本质

属性。

要使概念明确，其次必须明了概念的内涵和外延。

所谓概念的内涵，是指概念所反映的对象的本质属性的总合。例如，钝角这个概念，它所反映的对象的本质属性，就是“大于直角而小于平角”；平行四边形这个概念，它所反映的对象的本质属性，就是“两组对边分别平行、两组对边分别相等……”；等等。

所谓念概念的外延，是指概念所反映的对象的全体。例如，三角形这个概念，它所反映的对象就是“锐角三角形、直角三角形、钝角三角形”；有理数这个概念，它所反映的对象就是“正负整数、正负分数和零”，等等。

概念的内涵和外延之间，是互相联系着和互相影响着的。概念的内涵增加，外延缩小；反之，概念的内涵减小，外延扩大。例如，对于菱形这个概念，如果在它的内涵里增加“有一个角是直角”一条时，那么它的外延就缩小成正方形；反之，如果在它的内涵里减少“邻边相等”一条时，那么它的外延就扩大成平行四边形。由此可见，概念的内涵是不能随意变动的。

要使概念明确，还必须明了概念间的关系。

客观事物是互相联系、互相制约的，存在这样或那样的关系，因而反映客观事物的概念之间，也有着各种不同的关系。就可以比较的关系而言，可分为如下两类：

1）相容概念：是指外延至少有一部分是重合的两个概念。这种概念，又可分为三种：

1°重合概念：是指外延完全重合的两个概念。

例如，“等边三角形”与“等角三角形”、“正整数”与“自然数”等都是重合概念。在这两组中，由于它们都分别

指的是同一事物，因此其外延是完全相同的，如图1·1所示。

2°从属概念：是指这样的两个概念，其中一个概念的外延完全包含了另一个概念的外延。

例如，“平行四边形”与“矩形”、“有理数”与“正整数”等都是从属概念。在这两组中，前一个概念叫种概念，后一个概念叫属概念。种概念的外延完全包含了属概念的外延，如图1·2所示。

3°交叉概念：是指外延部分重合的两个概念。

例如，“矩形”与“菱形”、“非负有理数”与“非正有理数”等都是交叉概念，它们的外延是部分重合的，如图1·3所示。

2）不相容概念；是指外延无重合部分的两个概念。这种概念，可分为两种：

1°矛盾概念：是指在同一种概念下外延不重合，且其外延之和等于种概念外延的两个属概念。

例如，“等腰直角三角形”与“非等腰直角三角形”是在“直角三角形”这个概念下的两个矛盾概念；又如，“有理数”与“无理数”是在“实数”这个概念下的两个矛盾概念。在这两组中，前两个概念的外延无重合部分，且其外延之和等于后一个种概念的外延，如图1·4所示。

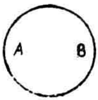


图 1·1

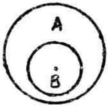


图 1·2

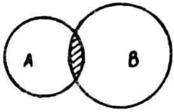


图 1·3

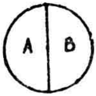


图 1·4

2°反对概念：是指在同一种概念下外延不重合，且其外延之和小于种概念外延的两个属概念。

例如，“梯形”与“平行四边形”是在“四边形”这个概念下的两个反对概念；又如，“正整数”与“负整数”是在“有理数”这个概念下的两个反对概念。在这两组中，前两个概念的外延不重合，且其外延之和小于后一个种概念的外延，如图1·5所示。

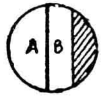


图1.5

注意：“梯形”与“平行四边形的任一属概念（例如矩形）”，也是在四边形这个种概念下的两个反对概念。

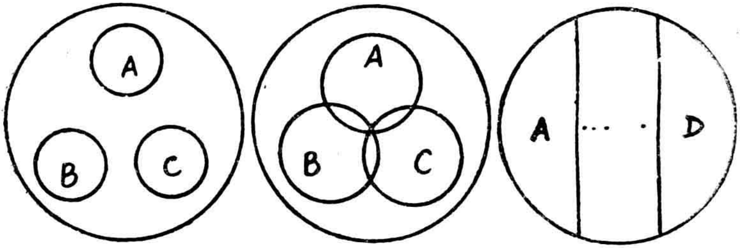
由此可见，反对概念和矛盾概念，无论在外延方面还是在内涵方面，都是不相同的。因此我们在使用概念时决不能把它们混淆起来了。例如，“直角三角形”、“锐角三角形”、“非直角三角形”这三个概念，象前面所讲，前两个是在“三角形”这个种概念下的两个反对概念，而“直角三角形”与“非直角三角形”则是在“三角形”这个种概念下的两个矛盾概念；如果把“锐角三角形”与“非直角三角形”混淆起来，就会发生错误。

此外，概念之间还有一种并列关系，它是指同一种概念下诸属概念之间的关系。同一种概念下的诸属概念叫做并列概念。

并列概念之间，可以是不相容的，如“锐角”、“直角”、“钝角”等，都是“角”这一种概念下的属概念，它们的外延之间彼此是没有重合部分的〔如图1·6(a)〕；也可以是相容的，如“数学家”、“化学家”、“物理学家”都是“科学家”这一种概念下的属概念，它们的外延之间彼此有一部分是重合的〔如图1·6(b)〕。

关于并列概念，还值得指出的是，在数学上研究的一般都是不相容并列关系的特殊情况，即在同一种概念下外延不

重合，且其外延之和等于种概念外延的几个属概念。例如，“锐角三角形、直角三角形、钝角三角形”等，是在“三角形”这一种概念下的三个并列概念，又如“正整数、零、负整数”这三个概念，也是在“整数”这一种概念下的并列概念。在这两组中，前三个概念的外延都没有重合部分，且其外延之和等于后一个概念的外延〔如图1·6(c)〕。



(a)　(b)　(C)

图1.6

要使概念明确，最后还应明了什么是概念的定义和如何给概念下定义。

所谓概念的定义，是指揭露某类事物（或概念）的本质属性的命题。

定义是明确概念内涵的一种逻辑方法。给一个概念下定义，通常有以下几种方式。

1）种加属差式的定义：这是最常用的一种方法。就是用种加属差的办法来揭示概念内涵中的本质属性，从而给概念下定义。

例如，命题“两组对边分别平行的四边形叫做平行四边形”，就是种加属差式的定义。这个定义有什么特点呢？首先，在定义中引进了“四边形”这个概念。由于在四边形的

外延中包括平行四边形和梯形等，因此四边形是平行四边形和梯形的种概念，又由于四边形是多边形的属概念，所以对平行四边形来说，我们特别把四边形叫做它的邻近的种概念。其次，在定义中引用了“两组对边分别平行”——平行四边形的一条本质属性。我们把这种在同一种概念下的属概念所单独具有的本质属性叫做属差。因此，我们有如下种加属差式定义的一般形式：

$$\underbrace{\begin{array}{l}(\text{四边形})+(\text{两组对边分别平行})\\(\text{邻近的种概念})+(\text{属差})\end{array}}_{\text{下定义的概念}}=\underbrace{\begin{array}{l}(\text{平行四边形})\\(\text{属概念})\end{array}}_{\text{被定义的概念}}$$

又如，钝角这个概念，就是用它的邻近的种概念“角”加上它的属差“大于直角而小于平角”来下定义的,即“大于直角而小于平角的角叫做钝角”。

上述定义都是用揭示概念内涵中的本质属性来实现的，所以一般把这种定义称为概念的内涵定义。由于一个概念的本质属性往往不只一条，因此它的内涵定义往往就不是唯一的。而且这些定义之间并不互相抵触,我们称它们是彼此等效的。例如,平行四边形这个概念我们也可以这样给它下定义：“一组对边平行且相等的四边形叫做平行四边形”，等等。

2）发生式的定义：就是用说明概念所反映的对象是怎样形成的方式来揭示概念的本质属性，从而给概念下定义。

例如，“园”这个概念在中学教材上一般是这样定义的：“在平面上任取一条线段，固定它的一个端点，将线段绕固定的端点旋转一周时，另一端点所形成的图形就叫做园”。在有的中学教材上，也有这样来定义的：“园是平面上任意一点对一个定点保持等距离运动所形成的封闭曲线”。

但无论哪一个定义，都是在说明园这个概念所反映的对象是怎样形成的，因此都是发生式定义。

对于发生式定义，如果我们考察其结构，就会发现它与“种加属差式”的定义是同类的，只不过它们都是在说明概念所反映的对象发生的过程罢了。例如，园的后一定义，如果把它表示成种加属差式的定义的形式，则为

（平面上的封闭曲线＋（曲线上任一点到定点的距离都相等）＝（园）

$$\underbrace{\text{（邻近的种概念）＋（属差）}}_{\text{下定义的概念}} = \underbrace{\text{（属概念）}}_{\text{被定义的概念}}$$

3）指示式的定义：就是用指出被定义概念的属差（有时要借助图形）或外延的方式来给概念下定义。

例如，概念“同位角”的定义：先说明一直线与两直线相交，构成八个角，然后借助图形（图1·7），指出∠1与∠5，∠2与∠6，∠4与∠7，∠3与∠8都叫做同位角。

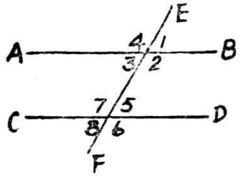


图1.7

又如，概念“零”的定义：“零是这样一个数，它和任意的数a相加仍得数a（即o＋a＝a）。”

以上两个定义，都是用指出被定义概念的属差的方式给概念下定义的例子。下面再举一个用指出被定义概念的外延来给概念下定义的例子。

再如，概念“整数”的定义：“正整数、零、负整数统称为整数。”就是用指出概念“整数”的外延“正整数、零、负整数”来给整数下定义的。

4）否定式的定义：就是用否定一个概念或其本质属性的方式来给另一个概念下定义。

例如，概念“平行线”的定义：“在同一平面内不相交的两条直线叫做平行线”。这个定义就是用否定“相交”的两条直线来给“平行”的两条直线下定义的。

又如，概念“无理数”的定义：“无限不循环小数叫做无理数”。这个定义就是用否定有理数的本质属性“循环”来给无理数下定义的。

在数学中，虽然还有一些概念（如超越数和超越函数等）是用这种方式定义的。但我们必须注意，一般说来是不允许采用这种方式来给概念下定义的。因为，这样的否定式定义没有告诉我们概念所反映的对象到底是什么。例如，如果我们把“园”这个概念定义为“园不是正方形”，就没有说明“园”究竟是什么。因为同样可以说“园不是三角形”、“园不是梯形”、“园不是直线形”等等，这是说不完的。同时，它们都没有揭露出“园”这个概念的本质属性。

从上面对如何给一个概念下定义的探讨中，我们可以知道，每一个新的概念都是用已知的旧概念来定义的，而这个旧概念，又是用更前面的已知的旧概念来定义的，象这样追溯下去，岂不是无止境吗？这是不可能的。因此，在数学中必然存在着一些人们从具体事物抽象出来的、公认是最简单而又无需解释的概念，我们把这种原始的不加定义的概念叫做基本概念。例如，点、直线、平面就是几何中的基本概念。有了它们，其它的几何概念就可以下定义了。

由于基本概念是原始的不加定义的概念。因此在教材中一般都是用一些实际的事物来说明它们的形象，而不给以定义，这是值得我们注意的。

（3）公理与定义

1）公理

在中学数学里有许许多多的命题，但其中有些命题，如“经过两点可以作一条直线，并且只可以作一条直线”、“等于第三个量的两个量相等”，等等，它们的真实性都是为人类长期的亿万次的实践所证实的，因此，我们不加证明就采用它们来作为推断其它命题的真实性的基础。

为人类亿万次的长期实践所证实的，不用推理的方法加以证明就采用来作为推理基础的命题，叫做公理。

例如：

1°经过两点可以作一条直线，并且只可以作一条直线；

2°过直线外一点可以作一条直线，并且只可以作一条直线和已知直线平行；

等等，都是几何公理。

除了几何公理以外，还有一些普通公理。下面介绍常用的等量公理：

1°等于第三个量的两个量相等；

2°等量加等量，其和相等；

3°等量减等量，其差相等；

4°等量的同倍量相等；

5°等量的同分量相等；

6°在等式中，一个量可以用它的等量代替（简称等量代换）。

对于公理，我们应有一个正确的认识。首先，公理的基础是实践。不论直接也好，间接也好，归根结底都是来自客观实际。它决不是人们头脑里固有的东西，也不是任何少数“天才”的数学家凭主观臆造、随便约定出来的，而是劳动

人民长期的生产斗争实践经验的总结。其次，由于公理是经过长期的实践经验所证实、为人们所公认的真理，因此，它的作用在于也仅仅在于：是推断其它命题的真实性基础。正如恩格斯所指出的："数学上的所谓公理，是数学需要用作自己的出发点的少数思想规定。"

2）定理

革命导师恩格斯指出："如果我们的前提是真实的，如果我们又对前提正确地运用了逻辑规律，那么结论必与现实相符"。伟大领袖毛主席也指出："使用判断和推理的方法，就可产生出合乎论理的结论来。"因此，正确进行逻辑推理，也是检验一个命题是否正确的方法。

根据一些定义，公理或已被证实为真实的命题进行逻辑推理而得到的正确命题，叫做定理。

例如，命题"对顶角相等"，"三角形的三个内角之和等于180°"，等等，都是几何定理。

从公理或定理直接推导出来的命题，叫做这个公理或这个定理的推论（或系）。例如，我们从公理"过两点可以作一条直线，并且只可以作一条直线"直接推导出来的命题"两条直线不能有一个以上的交点"，就是这个公理的推论。

人们常说的几何证明题，就是在教材里讲了一些定义、公理和定理以后，所列举的一些要求证明的习题。其实，严格说来它们也是定理，只不过它们的重要性不及定理罢了。

2.简单几何证明题的变换

一个命题，必须包含两个部分：给出的条件部分叫做"前提"，给出的结论部分叫做"断案"（叙述一个命题，也有只说出前提而略去断案的，这时命题便成为问题的形式了）。

由于几何证明题（即定理）是命题的一种，为了区别于一

般的命题，我们特别把“前提”改称“题设”，把断案改称“题断”。注①

几何证明题既是能用推理的方法证明是正确的命题，所以它的含义无非是说，有了这样的题设，必然得到那样的题断。这个意思可以简单地表达为：

（题设）$\Longrightarrow$（题断）

这个式子叫做推测式，它的意思是说，题断所说的事项本以隐含在题设所指的事项之中。

例1.①在△ABC中，如果 $AB=AC$，那么 $\angle B=\angle C$（图1.8）。

其推测式为：

在△ABC中，$(AB=AC)\Longrightarrow(\angle B=\angle C)$。（真）

②在△ABC中，如果 $\angle B=\angle C$，那么 $AB=AC$（图1.8）。

其推测式为：

在△ABC中，$(\angle B=\angle C)\Longrightarrow(AB=AC)$。（真）

③在△ABC中，如果 $AB\neq AC$，那么 $\angle B\neq\angle C$（图1.9）。

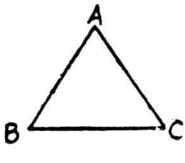


图1.8

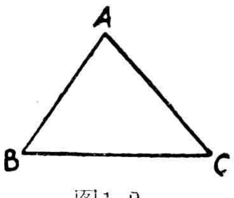


图1.9

其推测式为：

在△ABC 中，$(AB\neq AC)\Longrightarrow(\angle B\neq\angle C)$。（真）

④在△ABC中，如果 $\angle B\neq\angle C$，那么 $AB\neq AC$（图1.9）。

其推测式为：

在△ABC中，$(\angle B\neq\angle C)\Longrightarrow(AB\neq AC)$。（真）