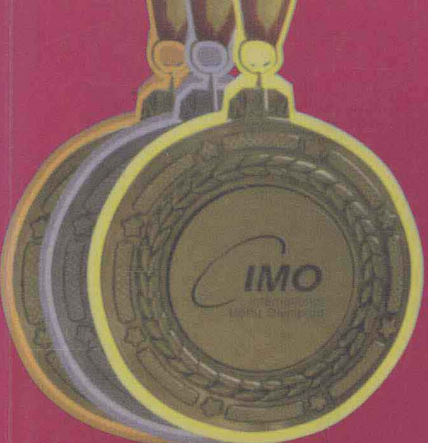
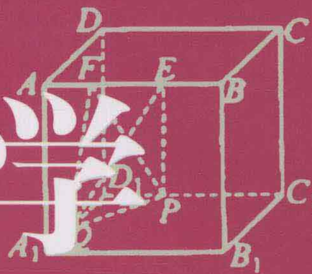
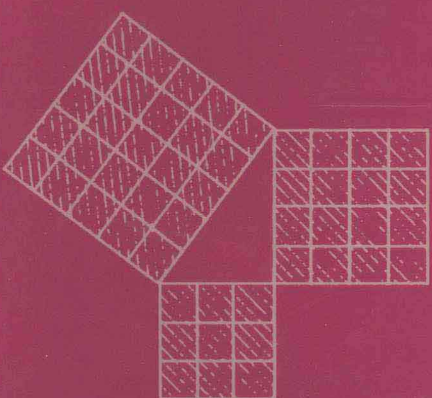


北京数学会　北京数学培训学校教学用书
（原北京数学奥林匹克学校）



高中数学奥林匹克教程



主　　编：赵　桢
副 主 编：刘来福　张秀平
分册主编：李延林

提高分卷

国内成立最早的数学奥林匹克学校
获奖最多的数学培训学校——
际中学生数学奥林匹克竞赛　IMO
金牌14块、银牌3块、铜牌1块
中国中学生数学奥林匹克竞赛　CMO
屡创佳绩、独领风骚
学生组队参加“大学生数学建模竞赛”唯一的数学培训学校
集20多年本培训学校竞赛教研成果之大成
——奥赛必读！

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

高中数学奥林匹克教程

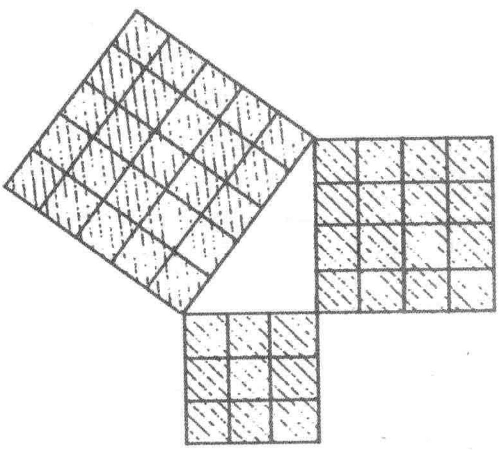
提高分卷

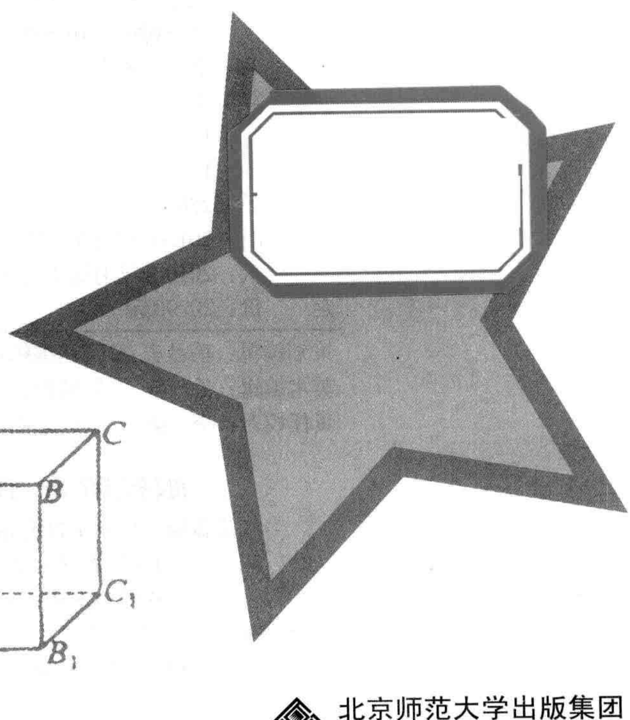
北京数学培训学校教学用书
（原北京数学奥林匹克学校）

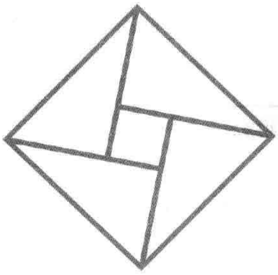
高中数学奥林匹克教程

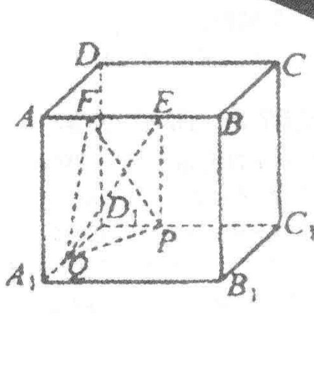
提高分卷

主　　编：赵　桢
副 主 编：刘来福　张秀平
分册主编：李延林
作　　者：（按姓氏笔画为序）
艾颖华　纪云飞　朱庆三
李秋生　赵维悦　徐文兵









北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学奥林匹克教程.提高分卷/赵桢主编.—北京：北京师范大学出版社，2010.7
ISBN 978-7-303-11148-0

Ⅰ.①高… Ⅱ.①赵… Ⅲ.①数学课－高中－教学参考资料 Ⅳ.①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 126664 号

营销中心电话 010-58802181 58808006
北师大出版社高等教育分社网 http://gaojiao.bnup.com.cn
电子信箱 beishida168@126.com

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街 19 号
邮政编码：100875
印　　刷：北京京师印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：184 mm × 260 mm
印　　张：11.75
字　　数：230 千字
版　　次：2010 年 7 月第 1 版
印　　次：2010 年 7 月第 1 次印刷
定　　价：20.00 元

策划编辑：岳昌庆　　责任编辑：岳昌庆　王　颖　马莉媛
美术编辑：毛　佳　　装帧设计：毛　佳
责任校对：李　菡　　责任印制：李　丽

版权所有 侵权必究

反盗版、侵权举报电话：010－58800697
北京读者服务部电话：010－58808104
外埠邮购电话：010－58808083
本书如有印装质量问题，请与印制管理部联系调换。
印制管理部电话：010－58800825

序　言

北京数学培训学校是由北京数学会主办的一所课外培养中学生的数学学校（前身是北京数学奥林匹克学校）。1985 年开始建校，是我国成立最早的一所数学奥林匹克学校。二十多年来，该校为北京市培养了一大批数学优秀学生，不仅在全国和国际中学生数学竞赛中获奖，而且在高等学校的“数学建模竞赛”中（和大学生一起参加，评奖标准也完全一致），该校学生也曾多次获得全国（新苗）奖和北京市奖。

在该校学习的学生，即使没有获得竞赛奖，也获得了不少课外数学知识，提高了数学能力（包括解决实际问题的能力），增强了数学素质；这对于参加高考时解决难题和应用题也有不少帮助，从而使很多学生提高了自己的高考分数，考上了理想的大学。因此，该校一直受到学生和家长的欢迎。

二十多年来该校在高中数学教学中积累了丰富的教学经验和教学资料，一直希望能够很好地整理一下，以供教师和学生参考使用（特别是对于新课标的部分选课也将很有参考价值）。本套丛书就是在此基础上由该校任教的部分教师编写，由北京师范大学出版社出版的，目前陆续出版的有高中基础分卷Ⅰ、高中基础分卷Ⅱ、高中应用分卷Ⅰ、高中应用分卷Ⅱ、高中提高分卷和高中建模分卷等。

王梓坤
赵桢

2007 年 9 月 27 日

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

北京数学培训学校情况简介

北京数学培训学校是由北京数学会主办的一所课外培养中学生的数学学校，我们的办学方针是：

1. 丰富学生的课外知识，促进中学数学教学质量的提高，激发学生对数学学习的兴趣；

2. 在德智体全面发展的基础上，及时发现和培养数学尖子学生，使他们有较宽的知识面和较强的分析问题和解决问题（包括实际问题）的能力；

3. 探索数学特长生的培养方法和规律。

我校的办学方式是利用星期日进行业余培训。按照我们自定的教学计划，聘请北京市大、中学校热爱数学普及工作、有丰富教学经验的数学专家和教师担任教学工作。根据学生和家长对教学的意见，不断改进教学，保证教学质量的不断提高。每年都有一批我校学生在全国和北京市各种数学竞赛中获奖。我校应用班的很多学生都参加了北京市高中学生数学知识应用竞赛。根据竞赛要求，参加决赛的学生每人要完成一篇小论文，通过写作论文，学生普遍认为收获很大。这是从选题、调研、提出数学模型、修改数学模型一直到利用计算机编程计算的全过程。这可以说是在进行素质教育。这样的培训工作可以使学生从小就逐步建立起“应用”意识，对适应社会主义市场经济发展将起重要作用。从而，我校为中学数学教学改革也摸索了初步经验。

我校的前身是北京数学奥林匹克学校，1985 年开始建校，是在我国成立最早的一所数学奥林匹克学校，二十多年来培养了一大批数学特长学生。

通过我校培养，北京中学生在全国中学生数学竞赛中成绩很长时间名列前茅。自从全国中学生数学奥林匹克竞赛设立“陈省身杯”以来，北京市的中学生代表队曾多次获得了“陈省身杯”，并由于连续三次获得了“陈省身杯”，因此将“陈省身杯”保存在北京市教育局。

在参加国际中学生数学奥林匹克竞赛的中国代表队中，曾多次有北京的中学生，并获得了多枚奖牌，为我国争得了荣誉。这些学生毫无例外地都曾经接受过我校和北京数学会组织的培训。

具体获奖的学生名单如下：

1987 年第 28 届国际数学奥林匹克竞赛（以下简称 IMO）：北京大学附中　滕峻　获得金牌；北京大学附中　高峡　获得铜牌；

1989 年第 30 届 IMO：北京人大附中　颜华菲　获得银牌；

1990 年第 31 届 IMO：北京四中　张朝晖　获得金牌；

1991 年第 32 届 IMO：北京大学附中　张里钊　获得金牌；北京大学附中　王绍昱　获得金牌；北京大学附中　刘彤威　获得银牌；

1992 年第 33 届 IMO：北京大学附中　周宏　获得金牌；

1993 年第 34 届 IMO：北京大学附中　周宏　获得金牌；

1994 年第 35 届 IMO：北京人大附中　姚健刚　获得金牌；北京大学附中　奚晨海　获得银牌；

1996 年第 37 届 IMO：北京 22 中　阎珺　获得金牌；

2001 年第 42 届 IMO：北京人大附中　肖梁　获得金牌；

2002 年第 43 届 IMO：清华附中　付云皓　获得金牌；

2003 年第 44 届 IMO：清华附中　付云皓　获得金牌；

2007 年第 48 届 IMO：人大附中　杨奔　获得金牌；

2008 年第 49 届 IMO：人大附中　张瑞祥　获得金牌；

2009 年第 50 届.IMO：人大附中　林博　获得金牌；

共计：金牌 14 块；银牌 3 块；铜牌 1 块。

目前教育部在高等学校组织的数学竞赛只有“数学建模竞赛”，经竞赛组委会批准，只有我校可以推荐中学生组队（每队 3 人）参加大学生的“数学建模竞赛”，和大学生一起参加评奖（标准完全一致）。我校学生也曾多次获奖（包括全国奖和北京市奖）。

部分获奖情况如下：(2000 年以前获奖资料暂缺)

2000 年　北京四中　索岳　皮德义　曾依一　新苗特等奖
　　北京四中　李卓蒙　韩准　崔燕宁　新苗一等奖
　　北京师范大学第二附属中学　戴熹　王昕　李森　新苗一等奖
　　北京 50 中　丁杰　孙喜龙　高鹏远　新苗二等奖
　　北京师范大学第二附属中学　康健　谢安平　孙琦　新苗二等奖
　　组合队　郭婷婷（北京 13 中）　张韬（北京 13 中）
　　　　李璋　（北京四中）　新苗二等奖

2001 年　北京十一学校　李煦　黄雄韬　郭枫　新苗一等奖
　　北京 15 中　赵晨　乐晨　王辉　新苗二等奖

2002 年　北京大学附中　刘熹　谭思睿　周栋　新苗一等奖
　　北京师范大学第二附属中学　任昊宇　薛飞　孙文昊　新苗一等奖

2003 年　北京汇文中学　王超　耿华　王业竑　新苗一等奖
　　北京四中　钱珑　邹箐箐　张品超　新苗一等奖

2004 年　北京 15 中　付潇鹏　鲁黎阳　张强　新苗特等奖

　　　　北京 15 中　税梁宇　洪拓　戴洋　新苗一等奖

　　　　北京 15 中　王阳　侯天逸　朱达　新苗二等奖

　　　　北京 15 中　许辰　任冠宇　刘博浩　新苗二等奖

2005 年　北京师范大学实验中学　何子淮　张弢　沈熹　新苗二等奖

共计：新苗特等奖 2 队，新苗一等奖 8 队，新苗二等奖 7 队，获奖学生 51 人。

1985 年我校成立时，第一任校长是梅向明教授（时任北京数学会副理事长、北京师范学院教授），名誉校长是江泽涵教授（时任北京数学会理事长、北京大学教授）。后来因为北京数学会改选和梅先生从政，1989 年开始由北京师范大学数学系赵桢教授担任校长（时任北京数学会副理事长、北京师范大学教授）。数学学校的校址也由北京师范学院转到了北京师范大学，江泽涵教授仍任名誉校长一直到江先生去世。2005 年 10 月北京师范大学数学科学学院刘来福教授担任校长（时任北京数学会副理事长、北京师范大学教授），赵桢教授任名誉校长。

为了加强我校和中学之间的沟通，督促和改进我校的教学工作，2005 年暑假前我校还成立了教学指导委员会，聘请一些北京市重点中学的校长、数学教研组长、特级教师等作为委员，由赵桢担任主任，刘来福、明知白担任副主任。已经开过几次例会，另外还与北京师范大学数学科学学院，北京数学会共同组织了北京市在职中学教师参加的数学教学改革座谈会（第一次座谈会已经于 2006 年 10 月在北京师范大学召开，参加座谈会的中学教师大约有 70 人），这样可以使我校的教学更好地适应中学数学教学改革的需要。

20 多年来，我校在高中教学中积累了丰富的教学经验和教学资料，一直想很好地整理一下，以供教师和学生们使用。现在这套“北京数学会北京数学培训学校教学丛书”正是在我校多年教学经验的基础上整理出版的，我们希望它对于高中学生提高数学能力和数学素质能起到积极的作用，对于同学们参加数学竞赛、数学知识应用竞赛以及解决高考中的数学难题及应用题都会起很好的作用。

北京数学培训学校

2010 年 6 月

作者的话

北京数学培训学校在出版了两本《高中基础分卷》教学用书和《应用分卷》教学用书之后，赵祯先生和刘来福先生对我讲，希望编写一本供夏令营使用的提高分卷。多年来，北京数学培训学校承担着北京市中学生数学夏令营活动，参加活动的数学爱好者具有较高的水平。他们需要怎样的学习呢？

作为数学爱好者，应当比一般的学生懂得更多的数学知识，比如数论、图论、组合论的基础知识，不等式、数学归纳法、平面几何的拓展学习。而这些在《高中基础分卷》中基本囊括了，在一般的数学课外读物中也很常见。

其实，数学爱好者更重要的是对数学的理解，要有数学的眼光。学数学不仅是解题，解题只是数学学习的一部分。不过，当前的数学竞赛是以解题为载体，从这个意义上讲，与中考、高考是一样的。如何借解题的形式学习数学呢？有一点是要警觉的，就是千万不可搞成题海式的训练，千万不可让学生淹没在题型中，很多中学生的脑子很好使，看了很多书，记住了很多题型，其目的很清楚，那就是平时学习对已有的题型高度覆盖，考试时对大脑进行现场搜索，找熟悉的题型完成任务。这无疑对他们解题是有帮助的，但不是我们提倡的。尽管像辞典一样的脑海可以帮助学生解决不少的问题，但如此的学习不会激发和保持学生的兴趣，面对生疏的数学题往往手足无措，更不会由此正确地认识数学，理解数学的价值。

会解题的核心是会思考！我与赵桢先生、刘来福先生和几位作者共同商议，夏令营活动需要着力提高数学爱好者对数学的深入理解，在解题方面着力提高数学爱好者的思维能力，居高临下地综合运用数学知识解决问题。这本教学用书应当体现这种立场。

中学生面对的数学题千模百样，深入到很多分支，数学的性质、定理、公式多得很，但是，思维的方法有一些是具有普适性的，是策略性的，这些最值得关注。这本书就聚焦到了这一关注点上。

“从简单情况入手”就是常用策略，比如三维变二维，无限变有限等，虽然变后已不是原问题了，但它的解决为原问题提供思路与方法。“从特殊情况入手”的策略也很重要，比如特殊位置，极端状态等，特殊情况属于原问题的一部分，研究它为解决一般情况提供思路。类似这样的策略往往是解决问题的思考起点，这两种策略被安排在本书的前两讲。

还有些策略是在解决问题的中间过程中使用的，比如“排序”，现在有很多写排序的文章，所举例子往往是直接给出解法，一上来就给一串字母代表的数

排个序，但没有揭示思路，很多学生感到莫名其妙，难以掌握，经常是凭感觉蒙着走。其实，一般来讲，思考问题的开始阶段没有给数排序的需求，当思考到一个阶段的时候，排序的想法应运而生。本书的“不妨设个序”揭示了思维过程。

数学中很多问题是紧密关联的，像等式与不等式。大家熟悉：a 不大于 b，又 a 不小于 b，则 a 等于 b。这是通过不等关系推出相等关系。要证一个不等式，经常想到的是直接利用几个常见的基本的不等式，其实，通过证明一个等式中等号某一侧的一项是正值（或是负值），那么去掉这项就是不等式，这种想法很自然，也很有效。相等寓于不等之中，不等寓于相等之中，这种辩证思想很重要，对于一个人，数学的学习需要这样的哲学思想指导，数学的学习也有利于哲学思想的建立和活化。在本书中这一点被强调了，有一讲是“等与不等”。

我在这里不想对每一讲的编排意图一一讲明，读者会在阅读使用中了解，得到自己的感受。

在写作方式上，本书突出了“思路分析”，对于数学爱好者，面对问题能找到思考的入口，能形成自己的思路，是非常重要的。并不见得每一种思路都可以解决问题，真正的难题也不是谁都能一下子就思路到位，如果这样就不是难题了，要会改进思路或重新思考，逐步向解决问题靠拢。“思路分析”会帮助读者学会理清解题的想法，脱离题海式的学习方式，形成良好的思维习惯，获得解题能力。

本书里还出现了“方法提炼”“变式拓展”，这是在解题之后给出的，虽然没有对每一个题都如此设计，但已经可以传递如下信息：什么叫学习？怎样叫解完题了？在学习中，纯粹回答完问题还不够，还需要深入思考，比如做“方法提炼”“变式拓展”的工作，如果学生在平时做作业时也能够经常这样，就很了不起了。

本书给出了 12 讲，突出了具有普适性、策略性的思维方法，但并没有做的大而全，只是开个门，引导读者去思考在数学解题中什么是重要的，要养成什么样的习惯。当然，我们希望这本书能对参加高中数学竞赛的同学有实际帮助。

本书由我总体策划，是由李秋生（第 1，2，3 讲），朱庆三（第 4 讲），赵维悦（第 5，6 讲），纪云飞（第 7，8 讲），徐文兵（第 9，10 讲），艾颖华（第 11，12 讲）分别执笔的，书稿各讲由我进行了修改，补充，加工和统稿完成。

在这里要感谢郭志江同志，他对本书的初稿做了审读，提出了宝贵的意见。本书的出版得到了北京师范大学出版社的热情支持和帮助，对他们付出的辛劳表示由衷地感谢！

李延林

2010 年 2 月

CONTENT

目录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

第 1 讲　从简单情况入手

数学是思维的艺术，是思维的体操，我们着迷于数学，不仅仅是为了一个个问题的解决，更是因为在思考问题的过程中，体验到探索的乐趣，思维的奥妙；体验到在变幻万千的问题背后，有着共同的规律在引导着我们的分析方向．一个技巧也许可以解决一个难题，一种方法能够解决一类问题，而那些共同的规律超越了技巧，超越了方法的总结，能够跨越数学的章节之分，在更广阔的领域里指导我们．

大家可能都有这种经历，面对一个新的问题，有时会无从下手，或是找不到问题的突破口，或是猜测不出问题的结论，那么此时如何着手呢？让我们从一个游戏说起．

例 1　桌子上有 1 000 根火柴，甲、乙两人轮流从中取出若干根，要求每次取出的数量是 p^k 根（其中 p 是质数，k 是自然数，p，k 每次可由取火柴的人自行确定），如果甲先取，乙后取，并且规定取走最后一根火柴者获胜，那么谁有必胜策略？

思路分析　初看问题，甲、乙谁有必胜策略并不明显，也没有固定的方法可供选择，也不太可能做一次试验看看（更何况一次试验的结果并不能说明问题）．

其实主要问题就在于“1 000 根火柴”太多了，多到了让我们无法进行尝试的地步，那么我们就把火柴数量大胆的减少一些，从很容易解决的简单情况入手．

比如只有 n（$n=1$，2，3，4 或 5）根火柴的时候，很容易判断甲取一次就获得胜利了；而当 $n=6$ 时，无论第一次甲取多少根，乙都能接下来一次取光所有剩余的火柴．

万事开头难！可我们已经成功地解决了 $n\leqslant 6$ 时的情况，虽然距离 1 000 还比较遥远，但是我们不仅熟悉了题目条件，而且会逐渐发现解决问题的钥匙．

因为 $7=7^1$，$8=2^3$，$9=3^2$，所以 $n=7$，8，9 时，甲都能一次获胜．而 $n=10$ 的情形是我们第一次面临考验，也是第一个很有价值的分析．

当我们逐一考察甲第一次取 1，2，3，4，5，7，8，9 根火柴的情况时，不难发现乙面对的情况都是刚才已经讨论过的“更简单的情形”，于是只有当乙面对 6 根火柴时没有获胜对策，因此甲第一次只需取出 4 根火柴即可确保获胜．

考虑过这种情形之后，不难用类似方法解出初始火柴数较小时，拥有必胜策略的一方，汇总得下表：

表 1－1

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
必胜方	甲	甲	甲	甲	甲	乙	甲	甲	甲	甲	甲	乙
首次取的根数	1	2	3	4	5		7	8	9	4	5	
N	13	14	15	16	17	18	……					
必胜方	甲	甲	甲	甲	甲	乙	……					
首次取的根数	1	2	3	4	5		……					

这时我们距离 1 000 根火柴依然很遥远，但是已经可以从中找到规律，帮助我们猜出获胜的是甲，并且具体的必胜策略也已经露出端倪．这就是从简单情形入手的效果与价值！

解　甲有必胜策略，他的策略如下：

甲第一次取出 4 根火柴，还剩下 996 根．由于乙取走的根数 P^k 不可能是 6 的倍数，因此当甲再取火柴的时候，只需取走火柴数除以 6 所得的余数，就总可以使得每次乙都面对 6 的整数倍数根火柴，这样乙不可能获胜．

变式拓展　本题属于致胜策略类型的问题，可以采用“必胜状态”“必败状态”的分析方法．但是哪些状态是“必胜状态”，哪些状态是“必败状态”？必胜策略如何获得？这些往往都需要从最简单的情况进行分析．如果把每次取的火柴数量限定为 2^k 根，你能用类似方法分析出谁有必胜策略吗？

例 2　有一串珠子排成一行，共有 108 颗，甲、乙两人轮流从中取出一些珠子：要求每次只能取出一颗，或者是相邻的两颗（可以从中间某个位置取出珠子）．如果甲先取，并且规定取走最后一颗珠子的人获胜，那么谁有必胜策略？

思路分析　这也是一个关于必胜策略的问题，与例 1 不同的是，此时我们不仅要关心数量的变化，还要关心珠子的位置．有了例 1 的经验，如果一开始没有太好的思路，那么我们是不是可以先从珠子数量较少的情形开始尝试呢？

如果一共只有 3 颗珠子，你是否可以经过试验，找到必胜策略呢？不难发现，此时只要甲先取走中间的一颗就一定获胜了．接下来再试试 4 颗、5 颗珠子的情形吧！相信你很快就可以找到解决问题的钥匙了．

解　甲有必胜策略，方法如下：

甲第一次取走最中间的两颗珠子，这样余下的珠子就成为两段，各有 53 颗．以后无论乙怎么取，甲就取对称位置的珠子即可．

变式拓展　如果这串珠子不是排成一行，而是围成一个圆圈，那么谁有必胜策略呢？

例 3　火星上是否有生命的存在？这是人类一直关心的问题，并且 2008 年，美国宇航局发射了“凤凰号”火星探测器，去探索火星上的生命迹象．在此我们做一个童话般的想象：在火星表面上，200 个大圆将其分成了很多个国家（其中任何三个大圆不交于同一点），一个火星人希望不重复地游览所有国家，求证：如果规定从一个国家只能直接到达与它有公共边界的国家，那么这个火星人的愿望是不可能实现的．

思路分析　题目中不确定的条件很多，而且对火星球面也不是很熟悉．

而在熟悉的平面图形中，我们是否研究过类似的遍历所有区域的问题呢？不难回想起一个简单的问题：如右图，将 8×8 的方格表去掉两个角，试证明不可能不重复的走遍所有方格．

这个简单的题目是如何解决的呢？是通过这样的步骤：先将所有方格黑白相间染色，然后发现黑色方格比白色方格少两个，那么就不可能无重复地走遍所有方格了．

受平面情形的启发，我们也尝试对球面情形进行黑白相间染色．

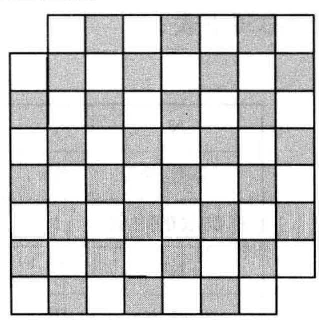


图 1－1

证明　(1) 首先证明可以将球面上的所有区域黑白染色，使得有公共边界的区域具有不同的颜色．为此用数学归纳法证明此结论对一般的 n 个大圆的情形都成立．

当 $n=1$ 时，显然可以将两个区域染成一黑一白．

假设 n 个大圆时，已经可以将所有区域按要求黑白染色，那么当第 $n+1$ 个大圆加入时，将其一侧所有区域同时变色，另一侧所有区域的颜色不变，那么这时具有公共边界的区域颜色必定不同.

所以当 $n=200$ 时，可以将所有区域黑白相间染色.

(2) 下面证明黑色区域和白色区域的数量至少相差 2.

由于每个大圆都是关于球心对称的，所以球面上的区域也是关于球心对称的. 从 (1) 中的归纳过程中可见，当大圆个数 n 是奇数时，关于球心对称的两个区域颜色不同；而当 n 是偶数时，关于球心对称的两个区域颜色相同. 那么当有 200 个大圆时，可知黑色区域的个数与白色区域的个数都是偶数.

而黑色区域与白色区域的个数之和就是国家的总数，下面用递推法来求国家的数量：记 n 个大圆（其中任何三个大圆不交于同一点）将球面分成 a_n 个区域.

当第 $n+1$ 个大圆加入时，与前 n 个大圆共有 $2n$ 个交点，这些交点将第 $n+1$ 个大圆分成了 $2n$ 段弧，这 $2n$ 段弧使得球面上增加了 $2n$ 个区域，即 $a_{n+1}=a_n+2n$. 结合 $a_1=2$，可得 $a_n=n^2-n+2$.

那么 $a_{200}=200^2-200+2$，被 4 除余 2. 如果黑色区域与白色区域一样多，那么国家总数应该是 4 的倍数，矛盾！这就说明了黑色区域与白色区域数量不相等，又因为它们都有偶数个，所以数量至少相差 2.

(3) 假设该火星人的愿望能够实现，由 (1) 可知，从每个黑色区域必然到达白色区域，从每个白色区域又必然到达黑色区域，因此黑色区域与白色区域至多相差 1，这与 (2) 的结论矛盾！

综上所述，该火星人的愿望是不可能实现的.

评注　相对于 1000 根火柴，则 10 根火柴就算是简单的情形；而相对于球面，则平面就算是简单的情形. 因此，从复杂到简单，并不仅仅是数量上的变化. 很多三维空间中的问题，都可以在二维平面中找到对应的问题，并从中得到启发.

变式拓展　考虑一般的情形，n 个大圆将火星表面分成了若干个国家. 从证明过程中可见，当 n 是被 4 整除的整数时，火星人的旅行愿望是不可能实现的. 那么当 n 不能被 4 整除时，该愿望就一定能够实现吗?

例 4　设集合 $P=\{1,2,3,4,5\}$，对任意 $k\in P$ 和正整数 m，记 $f(m,k)=\sum_{i=1}^{5}\left[m\sqrt{\frac{k+1}{i+1}}\right]$，其中 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数.

求证：对任意正整数 n，存在 $k\in P$ 和正整数 m，使得 $f(m,k)=n$.

思路分析　这是 2007 年全国高中数学联赛二试第三题，有相当的难度，多数同学感觉没有切入点. 但事实上，如果能抛开复杂、华丽的题目表面陈述，从简单的情况入手分析，或许就能找到与已有问题、已有方法的联系.

为什么 P 的元素是 1～5? 5 是否具有一般性? 所以在没有任何思路的时候，不妨先来看看把 5 换成 2，题目结论是否仍然正确.

此时 $f(m,1)=m+\left[m\sqrt{\frac{2}{3}}\right]$，$f(m,2)=\left[m\sqrt{\frac{3}{2}}\right]+m$，那么 $f(m,k)$ 可以取到的值如下表：

表 1－2

m	1	2	3	4	5	6	7	
$f(m,1)$	1	3	5	7	9	10	12	……
$f(m,2)$	2	4	6	8	11	13	15	

通过上表，有以下发现：

(1) 将题目中的 5 换成 2 以后，结论依然成立，这说明 5 不是本质的，很可能（甚至我们已经确信）对任意正整数均成立，所以我们在思考时不必拘泥于数字 5 的特性；

(2) 结论还可以加强：对任意正整数 n，不仅存在 $k\in P$ 和正整数 m，使得 $f(m,k)=n$，而且这样的 (m,k) 是唯一的.

根据前面例题的经验，对于简单情况的分析，往往提供了原复杂问题的解决思路，那么我们就着手对于数字 2 这种情形的证明.

由加强的结论可知，我们需要证明的是：数列 $\{f(m,1)\}$ 与 $\{f(m,2)\}$ 是互补数列. 那么我们对于互补数列有哪些经验呢？下面这个经典题目就给了我们提示.

有关互补数列的经典例题：若正无理数 α，β 满足 $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=1$，则数列 $\{[\alpha n]\}$ 与 $\{[\beta n]\}$ 是互补数列.

如果你熟悉它的证明方法，就有了对例 4 的思维基础了.

对于任意正整数 k，数列 $\{[\alpha n]\}$ 中不超过 k 的项都满足 $\alpha n<k+1$，即有 $\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]$ 项. 同理，在数列 $\{[\beta n]\}$ 中不超过 k 的有 $\left[\frac{k+1}{\beta}\right]$ 项.

由于 α，β 是无理数，易证 $\left[\frac{k+1}{\alpha}\right]+\left[\frac{k+1}{\beta}\right]=k$，这说明两个数列中共有 k 项不超过 k. 同理，两个数列中共有 $(k-1)$ 项不超过 $(k-1)$，所以其中恰有 1 项就等于 k，这就证明了数列 $\{[\alpha n]\}$ 与 $\{[\beta n]\}$ 是互补数列.

受这个证明的启发，试着来解决一下原问题吧！

证明　定义集合 $A=\{m\sqrt{k+1}\mid m\in\mathbf{N}^*,\ k\in P\}$.

由于对任意 k，$i\in P$ 且 $k\neq i$，$\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$ 是无理数，则对任意的 k_1，$k_2\in P$ 和正整数 m_1，m_2，有 $m_1\sqrt{k_1+1}=m_2\sqrt{k_2+1}$，当且仅当 $k_1=k_2$ 且 $m_1=m_2$.

注意到 A 是一个无穷集合，现将 A 中的元素按从小到大的顺序排成一个无穷数列. 对于任意的正整数 n，设此数列中第 n 项为 $m\sqrt{k+1}$，下面证明 $f(m,k)=n$.

若 $m_1\sqrt{i+1}\leqslant m\sqrt{k+1}$，则 $m_1\leqslant m\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$.

由 m_1 是正整数知，对 $i=1,2,3,4,5$，满足这个条件的 m_1 的个数为 $\left[m\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}\right]$.

从而 $n=\sum\limits_{i=1}^{5}\left[m\sqrt{\frac{k+1}{i+1}}\right]=f(m,k)$.

因此正整数 n，存在 $k\in P$ 和正整数 m，使得 $f(m, k)=n$.

评注 在本例中，从简单情形入手分析，不仅解决了切入点的问题，而且为我们提供了值得尝试一下的解决思路，甚至帮助我们得到了更深入的命题.

例 5 能否将 1～1 000 排成一行，使得对其中任意两个数，它们的算术平均数的位置都不在这两数之间？

思路分析 对于 1～1 000，不太容易确定这样的排列是否存在，也就无法确定应该去构造还是去证明. 那么，先把 1 000 改得小一些，便于我们判断“能”还是“否”，这样既可以帮助我们猜测 1～1 000 能否如题目要求排列，也可以对复杂情形的构造或证明有一些提示.

对于 1～3，可以排列如 1，3，2；

对于 1～4，添加数字 4 时，发现只需注意 4 和 2 的算术平均数是 3，因此可排列如 1，3，4，2 或 1，3，2，4；

对于 1～5，同样发现只需注意 5 和 1 的算术平均数是 3，5 和 3 的算术平均数是 4，由前者即知 5 的位置应该在 3 之前，可排列如 5，1，3，4，2 等；

对于 1～6，可排列如 5，1，3，4，2，6.

……

通过对这些简单情况的分析，对于 1～1 000，首先我们可以猜测答案是肯定的，其次也可以观察出满足要求的排列有其规律：奇数排在前半段，偶数排在后半段. 这就给 1～1 000的排列提供了思路.

解 能够将 1～1 000 排成一行，使得对其中任意两个数，它们的算术平均数的位置都不在这两数之间.

下面用数学归纳法证明：对任意的正整数 n，都可以将 $1\sim n$ 排成一行，使得对其中任意两个数，它们的算术平均数的位置都不在这两数之间.

当 $n=1\sim 6$ 时，前面已经给出了具体的排列方法.

假设 $n\leqslant k$ 时命题成立，则当 $n=k+1$ 时，共有 $m=\left[\frac{k+1}{2}\right]$个偶数和 $n-m$ 个奇数，易知 $m\leqslant k$ 且 $n-m\leqslant k$.

由归纳假设，$1\sim m$ 可以按题目要求排成一行，记作 a_1，a_2，…，a_m；$1\sim n-m$ 可以按题目要求排成一行，记作 b_1，b_2，…，b_{n-m}.

那么将 $1\sim n$ 排成一行：$2b_1-1$，$2b_2-1$，…，$2b_{n-m}-1$，$2a_1$，$2a_2$，…，$2a_m$. 这时前 $n-m$ 个奇数与后 m 个偶数各自满足要求，而任何一个奇数与偶数的算术平均数都不是整数，自然不在这两个数之间，因此上面的排列满足题目要求.

因此，对任意的正整数 n，都可以将 $1\sim n$ 排成一行，使得对其中任意两个数，它们的算术平均数的位置都不在这两数之间.

当 $n=1\ 000$ 时，命题成立，本题得证.

例 6 对于四面体，称连结顶点与其所对界面重心的线段为四面体的中线. 求证：四面体的四条中线相交于一点并且交点分每一条中线为 3∶1 的两段.

思路分析 学习几何学，我们会发现，三角形与四面体的某些性质很像. 与三角形联系的许多几何概念，在空间也有类似的概念，比如：三角形的边——四面体的面，边

长——面积，内切圆——内切球，三角形面积——四面体体积，角平分线——二面角的平分面等.

许多关于三角形的定理，如果其中的平面几何术语用相应的立体几何术语来代替，叙述上作相应修改，往往就变为了关于四面体的定理．因此，在研究四面体的问题时，我们可以将上述过程反过来，先来考察它对应的平面情形.

对于本例，其对应的平面定理就是：三角形的三条中线相交于一点并且交点分每一条中线为 2∶1 的两段．这是平面几何中一个基本的定理，证明方法很多，如面积法、塞瓦定理、向量法．考虑到与立体图形证明方法的类比，我们将向量法作一回顾：

已知在$\triangle ABC$中，D，E，F分别是边BC、AB、AC的中点.

设P是中线AD上的点，且使$|AP|:|PD|=2:1$，任取平面上一点O.

则有$\overrightarrow{OP}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$.

同理，如果Q，R分别是中线BF、CE上的点，且使$|BQ|:|QF|=|CR|:|RE|=2:1$，则有$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$，这说明$P$，$Q$，$R$三点是重合的，于是命题得证.

证明　设A_1，B_1，C_1，D_1分别是四面体$ABCD$的面BCD、面ACD、面ABD、面ABC的重心，M_1，M_2，M_3，M_4分别是中线AA_1，BB_1，CC_1，DD_1上的点，且分相应线段的比例是 3∶1.

任取空间中一点O，则$\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$，进而有

$\overrightarrow{OM_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\overrightarrow{OA_1}=\frac{1}{4}\overrightarrow{OA}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$.

同理，有$\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_3}=\overrightarrow{OM_4}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$，即$M_1$，$M_2$，$M_3$，$M_4$四点重合，于是原命题得证.

评注　四面体四条中线的交点也称作四面体的重心，那么从题目中顺便得到了四面体重心的性质.

例 7　设p为大于 3 的质数，求证：存在若干个整数a_1，a_2，…，a_t，满足条件$-\frac{p}{2}<a_1<a_2<\cdots<a_t<\frac{p}{2}$，并使得乘积$\frac{p-a_1}{|a_1|}\cdot\frac{p-a_2}{|a_2|}\cdot\cdots\cdot\frac{p-a_t}{|a_t|}$是 3 的某个正整数次幂.

思路分析　这是 2006 年第五届女子数学奥林匹克第 8 题，是一道结论比较新颖的好题．由于在数论中没有与之存在明显关联的定理，很多同学不知如何下手，对其望而却步．但实际上，如果从最小的质数p开始尝试，很容易发现规律.

当$p=5$时，取$a_1=-1$，$a_2=2$，则$\frac{5-(-1)}{|-1|}\times\frac{5-2}{|2|}=3^2$；

当$p=7$时，取$a_1=-2$，$a_2=1$，则$\frac{7-(-2)}{|-2|}\times\frac{7-1}{|1|}=3^3$；

当$p=11$时，取$a_1=-4$，$a_2=-1$，$a_3=2$，$a_4=5$，则

$$\frac{11-(-4)}{|-4|}\times\frac{11-(-1)}{|-1|}\times\frac{11-(2)}{|2|}\times\frac{11-(5)}{|5|}=3^5;$$

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com