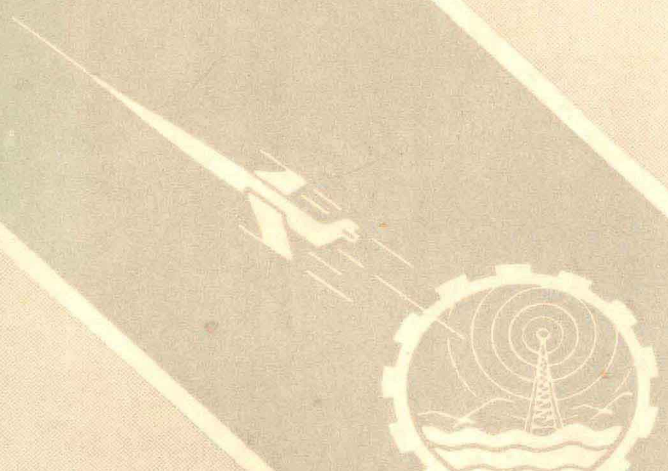
工程数学講义

上册　第一分册



西北工业大学

1963.8.

目　　录

上　册　第一分册

第一章　場論（附矢量分析）

§1.0 矢量分析大意……1
1.0.1 矢量函数及与之有关的一些概念……1
1.0.2 矢量函数的导数之几何意义……3
*1.0.3 高阶导数及其应用……5
§1.1 場的概念……7
1.1.1 場的定义及例……7
§1.2 数量場……7
1.2.1 等值面……7
1.2.2 方向导数与梯度……8
§1.3 矢量場……10
1.3.1 矢綫……10
1.3.2 通量……12
1.3.3 散度与奥氏公式……14
1.3.4 环量……15
1.3.5 旋度与斯托克司公式……16
§1.4 曲綫坐标……18
1.4.1 曲綫坐标的定义……19
1.4.2 坐标面与坐标綫……19
1.4.3 正交曲綫坐标系……20
1.4.4 梯度、散度、旋度之表达式……21
1.4.5 奥氏公式及斯托克司公式之証明……25
§1.5 汉弥登算子……28
1.5.1 汉弥登算子……28
1.5.2 汉弥登算子对乘积之作用……30
§1.6 一些特殊的場……32
1.6.1 管量場……32
1.6.2 无旋場（或有势場）……34
1.6.3 平面場……38
§1.7 一些应用……41

1.7.1 連續性方程……41
1.7.2 理想流体之动力学方程……42

第二章 复变函数

§2.1 复数……43
2.1.1 定义及运算……43
2.1.2 复数及平面上的点……44
2.1.3 复数和平面矢量……45
§2.2 复变函数……46
2.2.1 定义……46
2.2.2 与实变函数的联系……46
2.2.3 映象……47
§2.3 极限……49
2.3.1 概說……49
2.3.2 ∞……49
§2.4 連續……50
2.4.1 連續的概念……50
2.4.2 黎曼面的概念……50
2.4.3 連續的定义及連續函数的性质……51
§2.5 导数和柯西——黎曼条件……52
2.5.1 导数之定义……52
2.5.2 正則点与奇点……52
2.5.3 柯西——黎曼条件……52
2.5.4 复势……55
§2.6 初等函数……56
2.6.1 指数函数……56
2.6.2 三角函数……57
2.6.3 双曲函数……58
2.6.4 对数函数……58
2.6.5 幂函数……58
2.6.6 反三角函数及反双曲函数……60
§2.7 积分……61
2.7.1 定义……61
2.7.2 性质……62
2.7.3 变量代换及計算……62
2.7.4 原函数……65
2.7.5 在流体力学中的应用……65
§2.8 柯西定理及柯西公式……66
2.8.1 柯西定理……66

2.8.2 柯西公式……69
*§2.9 含参变数的积分……71
2.9.1 常义积分……71
2.9.2 旁义积分……73
§2.10 柯西型积分……76
2.10.1 定义及一些基本性质……76
§2.11 級数……77
2.11.1 数項級数……77
2.11.2 函数項級数……78
2.11.3 冪級数……82
§2.12 函数之展开与延拓……85
2.12.1 台劳級数……85
2.12.2 重点……86
2.12.3 恒等关系之延續……87
2.12.4 解析延拓……88
2.12.5 对称原理……90
2.12.6 罗朗級数……91
2.12.7 奇点∞……95
§2.13 留数定理及其应用……97
2.13.1 留数定理……97
2.13.2 极点的鑑定及留数之計算……98
2.13.3 在計算实变函数的积分中之应用……99
2.13.4 約当引理及积分之例……101
2.13.5 杂例……103
2.13.6 幅角原理……106
§2.14 保角映象……107
2.14.1 定义及基本性质……108
2.14.2 一些初等函数的映象……112
2.14.3 映象 $w=\dfrac{az+b}{cz+d}$……114
2.14.4 保角映象之例……116
2.14.5 完全繞流之复势……120
§2.15 一些边值問題……122
2.15.1 圓内之許伐茲公式……122
*2.15.2 边界值不連續的情形……126
2.15.3 上半平面之許伐茲公式……127
*2.15.4 許伐茲一克列斯多夫公式……129
习　題……138

第一章　場論(附矢量分析)

場論所研究的对象还是函数。不过它所討論的內容和連續介质中的物理現象有特別緊密的联系。在討論連續介质中的物理現象时，它是一个基本的工具。因此，我們将它作为单独的一章来讲述。为了使得討論能簡洁起見，我們在很多地方利用了矢量。在本章的开始，我們先簡单地介紹一些矢量分析的大意，然后再談場論方面的知識。

§1.0. 矢量分析大意

1.0.1　矢量函数及与之有关的一些概念

在这一节中，我們类比着数量函数的情况，簡要地引出矢量函数及与之有关的一些概念。

矢量函数的定义：若矢量 $\vec{A}$ 随着数量 t 的值而定，则我們称 $\vec{A}$ 为 t 的函数；記作

$$\vec{A}=\vec{A}(t)\ \text{或}\ \vec{A}=\vec{f}(t),\ \cdots\cdots。$$

很明显，若 $\vec{A}$ 为 t 的函数，则其各分量亦均为 t 的函数，反之亦然。

矢量函数也象数量函数，它在客观世界中也是經常出現的。例如：动点之矢径、速度、加速度等均为时間 t 的函数。为了进一步研究这种函数，下面介紹一下它的极限、連續以及导数、积分的概念。

矢量函数的极限：若 $t\to t_0$ 时，$\vec{A}(t)\to$ 某一固定矢量 $\vec{B}$，則称 $\vec{B}$ 为 $\vec{A}(t)$ 当 $t\to t_0$ 时的极限；記作 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{A}(t)$。

更确切地說：若对任一正数 ε，总相应有正数 δ，使

$$0<|t-t_0|<\delta\ \text{时，}\ |\vec{A}(t)-\vec{B}|<\varepsilon$$

则我們称

$$t\to t_0\ \text{时，}\ \vec{A}(t)\to\vec{B}$$

或

$$\lim_{t\to t_0}\vec{A}(t)=\vec{B}$$

实际求矢量函数之极限时，可用下列定理：

若 $\vec{A}(t)$ 的三个分量为 $A_1(t)$，$A_2(t)$ 及 $A_3(t)$ 且 $t\to t_0$ 时，它們分別 $\to B_1$，B_2 及 B_3 則 $t\to t_0$ 时 $\vec{A}(t)\to\vec{B}=B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}$。

这定理也就是說：求矢量函数之极限可按其各分量来求。

証：由假設可知，对任一 $\varepsilon>0$，我們总可取 t 与 t_0 充分接近以使得

$$|A_i(t)-B_i|<\frac{\varepsilon}{3}\qquad(i=1,\ 2,\ 3)$$

此时

$$|\vec{A}(t)-\vec{B}|=|A_1(t)\vec{i}+A_2(t)\vec{j}+A_3(t)\vec{k}-(B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k})|$$
$$\leq|A_1(t)\vec{i}-B_1\vec{i}|+|A_2(t)\vec{j}-B_2\vec{j}|+|A_3(t)\vec{k}-B_3\vec{k}|$$
$$=|A_1(t)-B_1|+|A_2(t)-B_2|+|A_3(t)-B_3|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

故由矢量函数之极限的定义可知 $t\to t_0$ 时

$$\vec{A}(t)\to B_1\vec{i}+B_2\vec{j}+B_3\vec{k}。$$

上述定理之逆也是成立的。关于这一点，讀者可自行証明之。通过上述定理，我們不难驗証矢量函数求极限的运算規律与数量函数求极限的运算規律是完全类似的。例如：

若 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{A}(t)=\vec{B}$，$\lim\limits_{t\to t_0}\vec{A_1}(t)=\vec{B_1}$ 則 $\lim\limits_{t\to t_0}[\vec{A}(t)+\vec{A_1}(t)]=\vec{B}+\vec{B_1}$；……。

矢量函数的連續：若 $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{A}(t)=\vec{A}(t_0)$，則称 $\vec{A}(t)$ 在 t_0 連續。

矢量函数的导数：若 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}$ 存在，則称此极限为 $\vec{A}(t)$ 之导数；記作 $\vec{A}'(t)$ 或 $\dfrac{d\vec{A}(t)}{dt}$。亦即

$$\vec{A}'(t)=\frac{d\vec{A}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}\ 。$$

下面我們来介紹一个实际上求矢量函数之导数的办法：

由于

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{[A_1(t+\Delta t)\vec{i}+A_2(t+\Delta t)\vec{j}+A_3(t+\Delta t)\vec{k}]-[A_1(t)\vec{i}+A_2(t)\vec{j}+A_3(t)\vec{k}]}{\Delta t}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{A_1(t+\Delta t)-A_1(t)}{\Delta t}\vec{i}+\frac{A_2(t+\Delta t)-A_2(t)}{\Delta t}\vec{j}+\frac{A_3(t+\Delta t)-A_3(t)}{\Delta t}\vec{k}\right]$$
$$=\frac{dA_1(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dA_2(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dA_3(t)}{dt}\vec{k}$$

$$\therefore\qquad \frac{d\vec{A}(t)}{dt}=\frac{dA_1(t)}{dt}\vec{i}+\frac{dA_2(t)}{dt}\vec{j}+\frac{dA_3(t)}{dt}\vec{k}$$

这也就是說，求矢量函数的导数可按其分量来求。

此外，矢量函数有和数量函数相类似的求导規律。

例如：

$$[\vec{A}(t)\pm\vec{B}(t)]'=\vec{A}'(t)\pm\vec{B}'(t),$$
$$[f(t)\vec{A}(t)]'=f(t)\vec{A}'(t)+f'(t)\vec{A}(t),$$

$$[\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)]' = \vec{A}(t)\cdot\vec{B}'(t) + \vec{A}'(t)\cdot\vec{B}(t),$$

$$\frac{d\vec{A}(t)}{ds} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\ \frac{dt}{ds}, \cdots\cdots。$$

我們在这里只驗証上面的第三个等式而将其余各等式的驗証留給讀者作为練习。上列第三式的驗証如下:

$$\begin{aligned}[\vec{A}(t)\cdot\vec{B}(t)]' &= [A_1(t)B_1(t)+A_2(t)B_2(t)+A_3(t)B_3(t)]'\\ &= A_1(t)B_1'(t)+A_1'(t)B_1(t)+A_2(t)B_2'(t)+A_2'(t)B_2(t)+A_3(t)B_3'(t)+\\ &\quad + A_3'(t)B_3(t) = \vec{A}(t)\cdot\vec{B}'(t)+\vec{A}'(t)\cdot\vec{B}(t)。\end{aligned}$$

矢量函数的积分和数量函数的积分也完全类似，并且求矢量函数的积分也可按其分量来求。这里不贅述。

以上我們所讲的都是一个自变量的矢量函数。对于多个自变量的矢量函数应該作怎样的定义以及可以怎样地类比着多变量的数量函数进行一些討論都是很明显的。因此这里也不作繁瑣的介紹。

1.0.2 矢量函数的导数之几何意义

在談矢量函数的导数之几何意义之前，我們先介紹一个矢量函数的矢端曲綫的概念。

設有矢量函数 $\vec{A}(t)$，我們用始点在原点的有向綫段将 $\vec{A}(t)$ 表示起来(見图1.0.2.1)。这种有向綫段称为 $\vec{A}(t)$ 之矢。現在由于 $\vec{A}(t)$ 随 t 而改变，所以 $\vec{A}(t)$ 的矢端也随 t 而改变。它的軌跡为空間的一条曲綫。

这种 $\vec{A}(t)$ 的矢端的軌跡称为 $\vec{A}(t)$ 的矢端曲綫。有了矢端曲綫之后，我們就可以来看导数的几何意义了。

由于在导数存在的情况下，

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0-}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{A}(t)}{dt}$$

因此，我們只来看 $\lim\limits_{\Delta t\to 0+}\dfrac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}$ 的几何意义。

首先，由于 $\Delta t>0$ 故

$$\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}[\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)]$$

与 $\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)$ 的方向一致。但 $\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)$ 的方向沿着矢端曲綫上联結 $\vec{A}(t)$ 的矢端到 $\vec{A}(t+\Delta t)$ 的矢端的割綫方向（图1.0.2.1）。

故 $\dfrac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}$ 也沿着这一方向。

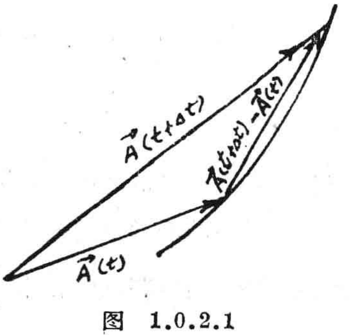


图 1.0.2.1

其次
$$\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}\text{的模为}$$

$$\left|\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}\right|=\frac{1}{\Delta t}\left|\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)\right|$$

如分别以 Δl，Δs 記矢端曲綫上联結 $\vec{A}(t)$，$\vec{A}(t+\Delta t)$ 之矢端的小段弦长及弧长，则

$$\left|\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}\right|=\frac{\Delta l}{\Delta t}=\frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta l}{\Delta s}$$

現在，当 $\Delta t\to 0$ 时

矢端曲綫上联結 $\vec{A}(t)$ 之矢端到 $\vec{A}(t+\Delta t)$ 之矢端的割綫方向 $\to$ 矢端曲綫上在 $\vec{A}(t)$ 之矢端的切綫方向且指向 t 增加时矢端移动之方向。

并且

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta l}{\Delta s}\longrightarrow\frac{ds}{dt}\cdot 1=\frac{ds}{dt}$$

$$\therefore\qquad \frac{d\vec{A}(t)}{dt}\text{作为}\frac{\vec{A}(t+\Delta t)-\vec{A}(t)}{\Delta t}\text{当 }\Delta t\to 0\text{ 时之极限，}$$

应該具有矢端曲綫上在 $\vec{A}(t)$ 的矢端之切綫的方向，且指向 t 增加时，$\vec{A}(t)$ 之矢端移动的方向；而其模 $\left|\frac{d\vec{A}(t)}{dt}\right|$ 则为 $\frac{ds}{dt}$。它就是矢端曲綫上之弧长对 t 之变化率。这一些就是 $\frac{d\vec{A}(t)}{dt}$ 在几何上的意义。

在实用上，$\vec{A}(t)$ 为动点 $(x(t),\ y(t),\ z(t))$ 的矢徑 $\vec{r}(t)$ 的情形特别重要。由于在这种情形下，$\vec{r}(t)$ 的矢即为从原点到 $(x,\ y,\ z)$ 之有向綫段，所以 $(x,\ y,\ z)$ 就是 $\vec{r}(t)$ 的矢端，从而 $\vec{A}(t)=\vec{r}(t)$ 的矢端曲綫就是动点的軌跡。因此 $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ 的方向是动点軌跡的切綫方向，且指向 t 增加时动点移动的方向，并且 $\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|$ 是动点軌跡之弧长对 t 的变化率 $\frac{ds}{dt}$。亦即 $\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|=\frac{ds}{dt}$。

若变数 t 表示时間，那么我們知道

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

它就是动点运动的速度 $\vec{v}$。因此，

$\vec{v}$ 之方向沿着动点軌跡之切綫方向且指向 t 增加时，动点移动的方向，并且 $|\vec{v}|$ 是动点移过路程对时間的变化率 $\frac{ds}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$。

若将$\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}$除以$\left|\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|$，则得动点軌跡上之单位切綫矢量$\vec{t}$。它指向$t$增大时，动点移动的方向。由于

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\Big/\left|\frac{d\vec{r}(t)}{dt}\right|=\frac{d\vec{r}}{dt}\Big/\frac{ds}{dt}=\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{dt}{ds}=\frac{d\vec{r}}{ds}$$

$$\therefore\qquad \vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{dx}{ds}\vec{i}+\frac{dy}{ds}\vec{j}+\frac{dz}{ds}\vec{k}$$

而$\vec{t}$的三个分量则分别为$\vec{t}$的三个方向余弦。亦即

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\ \frac{dy}{ds}=\cos\beta,\ \frac{dz}{ds}=\cos\gamma。$$

例：設动点之矢径为$\vec{r}(t)=\cos t\,\vec{i}+\sin t\,\vec{j}+t\,\vec{k}$；或即动点之坐标为$x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=t$，試求此动点軌跡上任一点处之单位切綫矢量$\vec{t}$以及它的三个方向余弦。

解：
$$\vec{t}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d\vec{r}}{dt}\,\frac{dt}{ds}=(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\vec{k})\frac{1}{\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+(1)^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t\,\vec{i}+\cos t\,\vec{j}+\vec{k})。$$

它的三个方向余弦分别为$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin t$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cos t$及$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$。

1.0.3 高阶导数及其应用

任一矢量函数$\vec{A}(t)$的导数仍是一矢量函数$\vec{A}'(t)$。此新的矢量函数的导数即称为原矢量函数的二阶导数。或即矢量函数的导数称为此矢量函数的二阶导数；記作$\vec{A}''(t)$或$\dfrac{d^2\vec{A}}{dt^2}$。依此类推，我們可以定义更高阶的导数，但在各高阶导数中用到得最多的只是二阶导数。

在力学上我們知道，若$\vec{r}$为动点之矢径则

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}$即为动点之速度；

$\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\vec{a}$即为动点之加速度。

在几何上，

$\dfrac{d\vec{r}}{ds}$为动点軌跡上之单位切綫矢量$\vec{t}$

而

$\dfrac{d\vec{t}}{ds}=\dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}$则表示$\vec{t}$对弧长的变化率。它对曲綫的研究也很有用处。下面我們来看一下$\dfrac{d\vec{t}}{ds}$的意义。

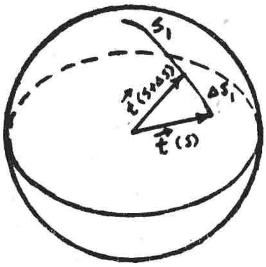


图 1.0.3.1

我們先作出 $\vec{t}$ 的矢端曲綫 s_1。这条曲綫与 $\vec{r}$ 的矢端曲綫可以有很大的不同。由于 $|\vec{t}|=1$ 而方向不断改变，故 s_1 是单位球面上的一条曲綫(图 1.0.3.1)。根据上一节所讲过的結果，$\frac{d\vec{t}}{ds}$ 与 s_1 相切故它与 $\vec{t}$ 垂直。

并且
$$\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|=\frac{ds_1}{ds}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta s_1}{\Delta s}$$

但 Δs_1 可算作 $\vec{t}(s+\Delta s)$ 与 $\vec{t}(s)$ 之夹角。

或即 Δs_1 可算作 s 上隣接切綫之夹角（毗角）。故 $\left|\frac{d\vec{t}}{ds}\right|$ 是 s 上的毗角对弧长的变化率，这种变化率显然表示出曲綫弯曲的程度，我們称之为曲綫 s 的曲率而記之为 $\varkappa$。因此

$$\frac{d\vec{t}}{ds}=\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\frac{d^2x}{ds^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{ds^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{ds^2}\vec{k}=\varkappa\vec{n}$$

此处 $\vec{n}$ 为垂直于 $\vec{t}$ 的一个单位矢量，我們称之为曲綫的单位主法綫矢量。
从上式，我們有

$$|\varkappa\vec{n}|=\varkappa=\left|\frac{d^2x}{ds^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{ds^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{ds^2}\vec{k}\right|=\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}$$

$$\vec{n}=\frac{1}{\varkappa}\left[\frac{d^2x}{ds^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{ds^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{ds^2}\vec{k}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}}\left[\frac{d^2x}{ds^2}\vec{i}+\frac{d^2y}{ds^2}\vec{j}+\frac{d^2z}{ds^2}\vec{k}\right]$$

最后，我們来看一下上述結果在力学上的一个簡单应用：
我們知道

$$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}=\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\Big/\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|\right)=\frac{ds}{dt}\vec{t}$$

$$\therefore\quad \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\vec{t}\right)=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{t}+\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{t}}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{t}+\frac{ds}{dt}\frac{d\vec{t}}{ds}\frac{ds}{dt}$$
$$=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{t}+\varkappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{n}$$

上式給出了加速度沿 $\vec{t}$ 及 $\vec{n}$ 之分解式，其中

$\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$（$v=\frac{ds}{dt}$）称切向加速度，

$\varkappa\left(\frac{ds}{dt}\right)^2=\frac{1}{R}v^2$（$R=\frac{1}{\varkappa}$ 称曲率半径）称法向加速度。

关于矢量分析及其簡单的应用，我們就談到这里。下面将开始介紹場論部分的內容。

§1.1 場的概念

1.1.1 場的定义及例

假如某种量在空間某区域的每一点处都有确定的值，那么我們称这个量为一个場；当这种量是数量时，我們称它为数量場；当这种量是矢量时，我們称它为矢量場。大气的密度、带电体附近的电位等就是一些数量場的例子；而河流的流速、电場强度等則是一些矢量場的例子。

由于成为場的量随着某一区域上的点而定，因此它其实就是該区域上的一个确定的函数。一个数量場 φ 是一个数量函数：$\varphi=\varphi(x,y,z)=\varphi(P)$；一个矢量場 $\vec{v}$ 是一个矢量函数：$\vec{v}=\vec{v}(x,y,z)=\vec{v}(P)$。

数量場和矢量場在研究一些实际問題时，往往同时出現，并且它們之間也有密切的联系。但是为了讲述的方便，下面将对数量場、矢量場分別进行討論并且始終假設数量場及矢量場的各分量均連續且有連續的一阶偏导数，在不需要特別强調的地方均不再作声明。

§1.2 数量場

1.2.1 等值面

在数量場的研究中，我們首先討論一个关于它的分布的問題。

設 $\varphi=\varphi(x,y,z)$ 为一数量場，我們把使 φ 取同样值 c 的点所形成的曲面称为此数量場的一个等值面。等值面上之点 (x,y,z) 将滿足下列关系：

$$\varphi(x,y,z)=c \tag{1.2.1.1}$$

(1.2.1.1) 即为 φ 的一个等值面的方程。

很明显，使 φ 取得另一值 c' 之点将形成另一等值面。一般說来，一个数量場可以有无穷多个等值面。它們将确定場的区域一层一层地分开，在每一层上 φ 都有相同的数值。如果我們画出了一些等值面，那么我們对 φ 的分布情况就会有一个較清晰的形象。通常談到的等压面、等溫面等，即分別是压力、溫度等的等值面。

例：試决定由单位点电荷所产生的电位場及它的等值面。

解：由物理学知道，在空間任一非点电荷所在的点处均有确定的电位。它等于該点到点电荷之距离 r 之倒数 $\frac{1}{r}$。

$$\therefore \qquad V=\frac{1}{r}$$

即为欲求之电位，設所考慮之点为 (x,y,z) 点电荷位于 (x_0,y_0,z_0) 則 V 可表示为更明显的形式：

$$V=\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$$

V之等值面为

$$\frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}=c$$

或即

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=\frac{1}{c^2}$$

这是以(x_0, y_0, z_0)为中心的一族球面。

1.2.2 方向导数与梯度

現在我們再来研究φ的变化情況。設φ为一数量場，P为确定此場的区域中之任一定点，并且s为过P点之任一确定的有向曲綫或直綫。現在我們来看点沿着s所指定的方向自P变动时，φ所相应的改变之快慢程度。

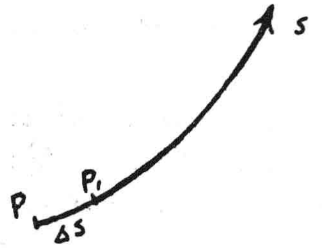


图 1.2.2.1

当点移动一段弧长Δs而到达P_1时，φ取得了增量

$$\Delta\varphi=\varphi(P_1)-\varphi(P)$$

以点移过的路程去除φ的相应增量$\Delta\varphi$得$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$。我們称之为点自$P$沿$s$移动了$\Delta s$时$\varphi$的平均变化率。这个量的大小标誌着$\varphi$沿$s$改变的快慢。就$P$附近来看$\varphi$沿$s$改变的快慢，我們可以用$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$来作为衡量的标誌。若此值大，则在$P$附近$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$也大；此值小，$\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$也小。故$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$的大小决定着$\varphi$在$P$点附近沿$s$方向变化的快慢。点自$P$沿$s$移动$\Delta s$时$\varphi$之平均变化率，当$\Delta s\to 0$时的极限$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$称为$\varphi$在$P$点沿$s$方向的导数。它虽然与方向有关，但它本身却沒有方向而只是一个数量。

由于$\lim\limits_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$即是$\varphi$对$s$之导数，故知$\varphi$沿某曲綫$s$方向之导数即$\varphi$对其弧长$s$之导数，通常記之为$\frac{\partial\varphi}{\partial s}$。

例：設r为矢径长度，则$\frac{1}{r}$沿矢径方向之导数$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}$。

数量場在一点之方向导数虽能說明数量場之变化情况，但是数量場在一点处沿各个不同曲綫方向之导数往往各不相同。要想直接利用这些数来表达数量場在一点处的变化情况是不方便的。

下面我們对表达方向导数的問題作一簡化。我們来証明下述定理：

数量場φ在任一点P处沿着曲綫s方向之导数，只取决于該曲綫在P的单位切綫矢量$\vec{t}$的方向；并且可以引进一个确定的与过該点之曲綫无关的矢量，使得它在$\vec{t}$方向之投影就表示此方向导数。象这样的矢量，我們称之为数量場在該点处之梯度，而記之为$\mathrm{grad}\varphi(P)$。

亦即 grad $\varphi(P)$ 为一矢量。它在 $\vec{t}$ 方向的投影給出了 φ 在 P 处沿着以 $\vec{t}$ 为单位切綫矢量的曲綫方向的导数。φ 沿着以 $\vec{t}$ 为单位切綫矢量的曲綫方向之导数以后簡称 φ 沿 $\vec{t}$ 方向之导数。

証：由于任一曲綫上的点之坐标 x,y,z 都是弧长 s 的函数，因此根据复合函数求导的法則，有

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds} \tag{1.2.2.1}$$

但 $\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}$ 分別为曲綫上切綫的方向余弦 $\cos(\vec{t},x),\cos(\vec{t},y),\cos(\vec{t},z)$，

（此处 $\vec{t}$ 为曲綫上之单位切綫矢量）。故（1.2.2.1）即为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\vec{t},x)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\vec{t},y)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\vec{t},z) \tag{1.2.2.2}$$

由此可見，$\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ 只取决于曲綫的切綫方向，这就証明了上述定理的第一部分。

現在将(1.2.2.2)改写为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)\cdot\vec{t} \tag{1.2.2.3}$$

其中 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}$ 是一个与过 P 点之曲綫 s 无关的矢量。命

$$\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k} \tag{1.2.2.4}$$

則（1.2.2.3）即

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{t} \tag{1.2.2.5}$$

这就証明了上述定理的第二部分。

現在如果我們記 grad φ 与 $\vec{t}$ 之夹角为 θ，則

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s}=\operatorname{grad}\varphi\cdot\vec{t}=|\operatorname{grad}\varphi|\cos\theta$$

故知

当 $\vec{t}$ 之方向与 grad φ 之方向一致时 $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ 最大，而此最大的方向导数即为 $|\operatorname{grad}\varphi|$。

因此，梯度的方向是数量場有最大变化率的方向，而其模即为最大变化率。这个性质也通常被用来作为梯度的定义。

例：試求 $\varphi=r$（r 表示点之矢径长度）在任一点 P 处之梯度。

解：根据梯度之表达式，我們有

$$\operatorname{grad}r=\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}=\frac{\partial r}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial r}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial r}{\partial z}\vec{k}$$

但 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，

故 $\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

$$\therefore \quad \text{grad}\, r = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\vec{k} =$$

$$= \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\vec{r}}{r}。$$

这表示 grad r 是矢径方向的一个单位矢量。

由这个結果我們还可以知道 r 沿任何 s 方向之导数

$$\frac{\partial r}{\partial s} = \text{grad}\, r \cdot \vec{t} = \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{t} = \cos(\vec{r}, \vec{t})$$

此处 $\vec{t}$ 为 s 方向上单位切綫矢量。

§1.3 矢 量 場

1.3.1 矢 綫

要很好地研究矢量場 $\vec{V}$ 的分布，我們将研究其方向的变化情况。为此，我們在每点处画出此点之 $\vec{V}$ 的方向，然后順着这种方向作出一条条的曲綫使它們在每点处之切綫方向都和該点处之 $\vec{V}$ 的方向一致。这样的曲綫一經作出就可以帮助我們来了解 $\vec{V}$ 的方向改变情况。在静电学中，当 $\vec{V}$ 表示电場强度时，这种綫就称电力綫；在流体力学中，当 $\vec{V}$ 表示流速时，这种綫就称流綫。象这种每点处之切綫方向都和該点处之 $\vec{V}$ 的方向一致的曲綫，在数学上称为場 $\vec{V}$ 的矢綫；以矢綫为壁所成之管称为矢綫管。（图1.3.1.1）

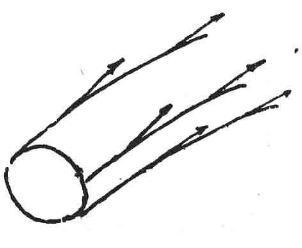


图 1.3.1.1

从分析的角度来看：曲綫上任一点之切綫的方向数为 $\frac{dx}{ds}$，$\frac{dy}{ds}$，$\frac{dz}{ds}$；$\vec{V}$ 之方向数为 V_x，V_y，V_z。要使此曲綫成为矢綫就是要其切綫方向与 $\vec{V}$ 之方向一致；亦即要

$$\frac{\frac{dx}{ds}}{V_x} = \frac{\frac{dy}{ds}}{V_y} = \frac{\frac{dz}{ds}}{V_z}$$

或

$$\frac{dx}{V_x} = \frac{dy}{V_y} = \frac{dz}{V_z} \qquad (1.3.1.1)$$

这是一个微分方程組。它也可写成

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{V_y}{V_x} = f(x,y,z), \\ \frac{dz}{dx} &= \frac{V_z}{V_x} = \varphi(x,y,z) \end{aligned}\right\} \qquad (1.3.1.2)$$

如果能找出滿足这两个微分方程的未知函数

$$y = y(x), \quad z = z(x) \qquad (1.3.1.3)$$

那么由 (1.3.1.3) 所确定的曲綫就是矢量場 $\vec{V}$ 的矢綫了。(1.3.1.3) 所确定的曲綫也称 (1.3.1.1) 或 (1.3.1.2) 的积分曲綫。

从原則上来說，求滿足 (1.3.1.2) 的未知函数可化为解一个二阶微分方程的問題。事实上，我們可从 (1.3.1.2) 的第一式解出

$$z=\psi(x,y,y') \tag{1.3.1.4}$$

将此式求导，得

$$z'=\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}y'+\frac{\partial\psi}{\partial y'}y''$$

以此式代入 (1.3.1.2) 的第二式，即得

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial\psi}{\partial y}y'+\frac{\partial\psi}{\partial y'}y''=\varphi(x,y,\ \psi(x,y,y'))$$

这是关于 y 的一个二阶微分方程。解出 y 之后，代入 (1.3.1.4) 即可求出 z 来。

例：試求 $\vec{V}=x\vec{i}+(xy+xz)\vec{j}+(y+z)\vec{k}$ 之矢綫。

解：由矢綫所要滿足的微分方程組(1.3.1.1)，我們有

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{xy+xz}=\frac{dz}{y+z}$$

或

$$\frac{dy}{dx}=y+z$$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{y+z}{x}$$

由第一式得:

$$z=y'-y$$

求导得

$$z'=y''-y'$$

代入第二式得

$$y''-y'=\frac{y+(y'-y)}{x}=\frac{y'}{x}$$

或

$$y''-(1+\frac{1}{x})y'=0$$

令 $\quad y'=p$

得 $\quad p'-(1+\frac{1}{x})p=0$

解之得 $\quad \frac{dy}{dx}=p=cxe^x$

再积分一次得 $\quad y=c(xe^x-e^x)+c_1 \quad (1.3.1.5)$

从而

$$z=y'-y=ce^x-c_1 \tag{1.3.1.6}$$

(1.3.1.5~6) 給出所求之矢綫。

上面我們讲的求矢綫的办法只是一般的原則。在一些具体問題中往往不如直接从（1.3.1.1）找出 x,y,z 之間的关系更为簡捷。下面我們仍以求上例中的矢綫为例来說明这种方法：

$$\vec{V}=x\,\vec{i}+(xy+xz)\,\vec{j}+(\,y+\,z\,)\,\vec{z}$$

之矢綫滿足

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{xy+xz}=\frac{dz}{y+z}$$

由加比定理可得

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{xy+xz}=\frac{dz}{y+z}=\frac{d(y+z)}{(x+1)(y+z)} \qquad (1.3.1.7)$$

由上式首尾两端之等式可得：

$$y+z=cxe^{x}$$

再由（1.3.1.7）的第一、第三項間的等式，可得

$$\frac{dx}{x}=\frac{dz}{y+z}=\frac{dz}{cxe^{x}}$$

$$\therefore \qquad z=ce^{x}-c_{1},$$

这显然和用以前的办法所得之結果是一致的。

1.3.2 通 量

在进一步研究矢量場时，有两个特殊的量經常要出現。其中一个叫通量，另一个叫环量。从数学的角度来看，通量是一个特殊形式的曲面积分，它只牵涉到在某一曲面上确定的矢量函数；环量是一个特殊形式的曲綫积分，它只牵涉到在某一曲綫上确定的矢量函数。它們都不牵涉到在一个区域上确定的矢量場。然而在实际問題中，我們往往联系着矢量場来討論这两个量。因此它們就作为場論的一部分內容了。

現在我們先来談通量的概念。这个概念可以从下面的具体問題引入。

我們来求流体在单位时間內，通过一个曲面 S 的某一側而流出的容量。（如果流体实际上是流入的，那么我們把流入量的負値算作流出量）。假設曲面上每一点处流动粒子的速度 $\vec{V}$ 是已知的并且它不随时間改变。

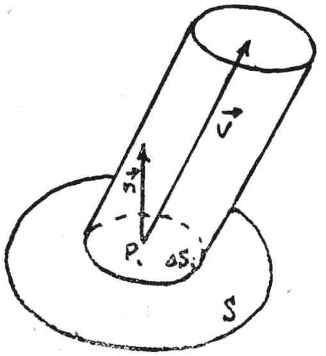


图 1.3.2.1

要解决这个問題，我們先把曲面 S 分成許多小块 $\Delta S_1,\Delta S_2,\cdots\Delta S_n$，流体流出 S 的容量等于它流出各小块曲面的容量之和。現在就 ΔS_i 上任一点 P_i 处来看，在单位时間內的每一时刻都連續不断地有流体的粒子从 P_i 处以速度 $\vec{V}$ 运动。一开始就从 P_i 处运动的粒子跑得最远，以后各时刻才从 P_i 处开始运动的粒子都落在它的后面。如以 P_i 为始点作一长度等于 $\vec{V}(P_i)$ 的大小且方向与 $\vec{V}(P_i)$ 一致的有向綫段，則这个跑得最远的粒子在单位时間內将达到这个有向綫段的終点，而其余的粒子則連續不断地位于这个有向綫段上。由于通过 ΔS_i 上任一点处的流体粒子的情况都是这样，因此若以 ΔS_i 上每一点为始点作出上述那样的有向綫段，則所有这些有向綫段形成的一个区域就是在单位时間內通过 ΔS_i 的流体

粒子所組成的。这个区域的体积就是在单位时間內通过 ΔS_i 的流体的容积。当 ΔS_i 很小时，这个小区域近似于一个小的斜柱体，它的底面积可算作 ΔS_i，它的正高可算作 $\pm\vec{V}(P_i)\cdot\vec{n}(P_i)$。此处 P_i 为 ΔS_i 上一点，$\vec{n}(P_i)$ 为 S 所指定的那一側上在 P_i 处之单位法綫矢量。$\vec{V}(P_i)\cdot\vec{n}(P_i)$ 前面的“$\pm$”視 $\vec{V}$ 与 $\vec{n}$ 所成的角是銳角还是鈍角来决定。这也就是說，流体是通过这一側流出时取“+”号，流入时取“−”号。故此容积近似于 $\pm\vec{V}(P_i)\vec{n}(P_i)\Delta S_i$ 其中“$\pm$”視流体实际上是流出或流入而定。但是照我們的約定：流体实际上是流入时，我們把流入量的負值认为是流出量。因此流体通过 ΔS_i 所指定的那一側流出的容积总是近似于

$$\vec{V}(P_i)\cdot\vec{n}(P_i)\Delta S_i \quad \text{或} \quad -[-\vec{V}(P_i)\cdot\vec{n}(P_i)\Delta S_i]=\vec{V}(P_i)\cdot\vec{n}(P_i)\Delta S_i$$

故流体在单位时間內通过 S 所指定这一側流出的容量近似于

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{V}(P_i)\cdot\vec{n}(P_i)\Delta S_i$$

可以想象，当最大的 ΔS_i 之直径 $\|\Delta S_i\|$ 愈小上式之近似程度愈好，因而在单位时間內通过 S 所指定的一側而流出的流体容量就是

$$\lim_{\|\Delta S_i\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\vec{V}(P_i)\cdot\vec{n}(P_i)\Delta S_i$$

根据曲面积分的定义，上式即

$$\int_S[\vec{V}(P)\cdot\vec{n}(P)]dS \qquad (1.3.2.1)$$

这里我們把表示曲面积分的积分号省写了一个。以后在用到几重积分号的地方，我們将均只写一个积分号而不再声明。形如（1.3.2.1）的表达式在其他地方也常会遇見。不过在其他地方，$\vec{V}(P)$ 的物理意义可以不再是速度而（1.3.2.1）也可有其他的解释。但在数学上不管 $\vec{V}$ 有什么物理意义，只要它在 S 上确定就一概称（1.3.2.1）为 $\vec{V}$ 通过 S 所指定的那一側的通量。在讲通量时，我們都特别提到 S 所指定的那一側。因为它关系着通量的符号。事实上，若将原来指定的一側换成另一側时，相应的法綫要改成相反的方向。因而相应的通量为

$$\int_S\vec{V}\cdot(-\vec{n})dS=-\int_S\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS$$

它与 $\vec{V}$ 过原来那一側的通量相差一符号。

根据第一类曲面积分与第二类曲面积分間的关系，$\vec{V}$ 通过 S 所指定那一側的通量还可表示为

$$\int_S\vec{V}\cdot\vec{n}\,dS=\int_S[V_x\cos(\vec{n},x)+V_y\cos(\vec{n},y)+V_z\cos(\vec{n},z)]dS$$

$$=\int_S V_x\,dy\,dz+V_y\,dz\,dx+V_z\,dx\,dy。$$

例：試求 $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ 通过单位球面外側之通量：

解：单位球面外側法綫的方向是与矢径 $\vec{r}$ 方向一致的，因此相应的 $\vec{n}$ 为 $\vec{r}$ 上的单位矢量，或即

$$\vec{n}=\frac{\vec{r}}{r}=\frac{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$$