2013

考研数学
大题满分技巧揭秘

（数学三）

便携记忆版

金榜考研数学命题研究组　编

让想放弃的同学得高分
让能得高分的同学得满分
抓住攻克考研数学最后一次机遇
Yes, we can!

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

金榜®

2013

考研数学

大题满分技巧揭秘

（数学三）

便携记忆版

金榜考研数学命题研究组　编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学大题满分技巧揭秘. 数学三 / 金榜考研数学命题研究组编. —北京：北京理工大学出版社，2012.9

ISBN 978-7-5640-6789-2

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①金…　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 218363 号

出版发行/北京理工大学出版社
社　　址/北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编/100081
电　　话/(010)68914775(办公室)　68944990(批销中心)　68911084(读者服务部)
网　　址/http://www.bitpress.com.cn
经　　销/全国各地新华书店
印　　刷/保定市中画美凯印刷有限公司
开　　本/850 毫米×1168 毫米　1/32
印　　张/6.5
字　　数/175 千字
版　　次/2012 年 9 月第 1 版　2012 年 9 月第 1 次印刷　　责任校对/周瑞红
定　　价/25.80 元　　责任印制/边心超

前 言

2013年考研的最后冲刺阶段已经开始，这最后的宝贵时间是提高数学答题能力最关键的时候。数学是考研中的重中之重，而考研数学解答题94分占超过一半的分值，这些题目高度抽象，解答起来需要严谨的推理和准确的计算。从往届考生的成绩来看，考生在解答题部分得分差别很大，直接导致数学成为最能在分数上拉开距离的考试科目。很多同学说，我很想做好解答题，但就是做题无从下笔，或者做了也这错那错。

在这里，我们为大家编写的这本《考研数学大题满分技巧揭秘（数学三）》就是让同学们在最后的考试中会解大题，能得高分，会做的题目力求不失分，部分理解的题目力争多得分。

本书中的题目经典，解答规范，适合考生综合复习使用。

书中的体例设计如下：

[读题联想] 如果这个时候大家还对题中的基本概念、方法和原理不清楚，解题时肯定会碰到各种各样的问题，容易丢失一些基本分，所以大家务必在最后完全吃透基础理论知识，深入地理解基本概念、公式、定理和图表，掌握知识点。

[解题范例] 拓展解题方法，提高解题能力，规范答题格式。大家要提高做题质量，每做完一题，就要总结其所覆盖的知识面并且归纳其所属题型，做到举一反三。希望大家认真领会解题方法及其实质，并做到活学活用。同时，也要注意答题的方式步骤，关键内容要写出来，一些简单过程可省略。

[阅卷者按] 帮大家寻找考试的感觉，保持清晰的复习思路，做题的同时感受真实考场上的氛围，尽快进入临考状态。

由于编者水平有限，本书中的不足与疏漏之处恳请读者批评指正。

祝大家复习顺利！

编　者

2012 **年** 9 **月**

目　录

微积分

1 设 $a_1=\sqrt{2}, b_1=1, a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}, b_{n+1}=1+\frac{1}{b_n}, (n\in N^+)$，请问数列 $\{a_n+b_n\}$ 是否收敛，若收敛，计算其极限，若不收敛，说明理由.

读题联想 讨论数列 $\{a_n+b_n\}$ 收敛性，可分别讨论数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的收敛性. 数列的极限存在与求值问题，一般有两种思路：

(1) 先证明数列极限存在，再设极限解方程，求出极限值；

(2) 先假设极限存在，解出方程值，再证明极限存在.

本题要点：(单调有界定理) 在实数系中，有界的单调数列必有极限.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a, \lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$，则 $\{z_n\}=\{x_1,y_1,x_2,y_2,\cdots,x_n,y_n,\cdots\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$.（若数列 $\{x_n\}$ 奇、偶子列都收敛于 a，则 $\{x_n\}$ 收敛于 a.）

若函数 $f(x)$，在区间上有导数，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减.

解题范例

【解】 由 $a_1=\sqrt{2}, a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$，知 $a_n>0$，

又 $a_1=\sqrt{2}<\sqrt{2+\sqrt{2}}=a_2$.

假设当 $n=k$ 时，$a_k<a_{k+1}$ 也成立.

$\therefore$ 当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}=\sqrt{2+a_k}<\sqrt{2+a_{k+1}}=a_{k+2}$

$\therefore a_n<a_{n+1}$ 对任意的 n 都成立，故 $\{a_n\}$ 单调增加数列. 3 分

又 $a_1<2, a_2=\sqrt{2+a_1}<2,\cdots,a_n<2$

$\therefore \{a_n\}$ 是单调增加且上界为 2 的数列，极限存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a>0$，在 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ 两边同时取极限，得

$a=\sqrt{2+a}$，方程只有一个正解 $a=2$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$. 5 分

记 $b_{n+1}=f(b_n)=1+\frac{1}{b_n}$，

则 $f(x)=1+\frac{1}{x}>1, b_1=1>0$，知 $b_n>0$. 6 分

$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$，在 $x>0$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 在 $x>0$ 上是单调减函数.

又 $b_1=1, b_2=1+\frac{1}{1}=2, b_3=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}, b_1<b_3$

$f(b_1)>f(b_3)$ 即 $b_2>b_4$

$f(b_2)<f(b_4)$ 即 $b_3<b_5$

……

得 $b_1 < b_3 < b_5 \cdots < b_{2k-1} < \cdots, k \in N^+$

$b_2 > b_4 > b_6 \cdots > b_{2k} > \cdots, k \in N^+$

$f(x)$ 为单调减函数，$f(b_n) < f(b_1) < 2$. 8分

$\{b_{2k-1}\}$，$\{b_{2k}\}$ 分别是单调增、减的有界数列，故极限存在，分别记为 $b_{奇}$，$b_{偶}$.

$$b_{2k-1} = 1 + \frac{1}{b_{2k-2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b_{2k-3}}} = 1 + \frac{b_{2k-3}}{b_{2k-3} + 1} = 2 - \frac{1}{b_{2k-3} + 1}$$

$$b_{奇} = 2 - \frac{1}{b_{奇} + 1}, b_{奇}^2 - b_{奇} - 1 = 0, b_{奇} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}\text{(舍去小于 1)}$$

$$b_{2k} = 1 + \frac{1}{b_{2k-1}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{b_{2k-2}}} = 1 + \frac{b_{2k-2}}{b_{2k-2} + 1} = 2 - \frac{1}{b_{2k-2} + 1},$$

$$b_{偶} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\lim_{k\to\infty} b_{2k-1} = \lim_{k\to\infty} b_{2k} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \therefore \lim_{n\to\infty} b_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$ 10分

$\therefore$ 数列 $\{a_n + b_n\}$ 收敛且 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 2 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$. 11分

阅卷者按 本题满分 11 分，难度适中. 数列 $\{b_n\}$ 不是单调的数列，而是在极限值附近来回波动的数列，所以不能直接应用单调有界性来证明. 对于递推数列极限的题，在解答题中出现，一般很难直接推导出数列的通项式.

2 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 与 $J=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

读题联想 题中是 $n\to\infty$，求数列的极限，而数列是用正弦函数与数列复合而成的. 考虑到正弦函数的周期性和有界性，只要内部的数列可以表示成 π 的整数倍与一个收敛的数列之和.

本题要点：（函数极限与数列极限的关系） 如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 存在，$\{x_n\}$ 为函数 $f(x)$ 的定义域内任一收敛于 x_0 的数列，且满足：$x_n\neq x_0$，那么相应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 必收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$.

解题范例

【解】 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi+n\pi)$ 1 分

记 $\alpha_n=(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 可知 $0<\alpha_n<\dfrac{\pi}{2n}$，

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 且 3 分

$$I=\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\sin(n\pi+\alpha_n)$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\sin n\pi\cos\alpha_n+\cos n\pi\sin\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\alpha_n.$$ 5 分

由于 $|(-1)^n\sin\alpha_n|\leqslant\alpha_n$，故 $I=0$. 6 分

$$J=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi+n\pi).$$

记 $\beta_n=(\sqrt{n^2+n}-n)\pi=\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}$ 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\dfrac{\pi}{2}$，故 8 分

$$J=\lim_{n\to\infty}\sin^2(n\pi+\beta_n)=\lim_{n\to\infty}(\sin n\pi\cos\beta_n+\cos n\pi\sin\beta_n)^2$$ 9 分

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\beta_n=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$ 10 分

阅卷者按 本题满分 10 分，难度适中，有一定的技巧性. 此题虽然是计算两个极限，但方法相同，故只要知道解法，后面就是简单计算题.

3 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$.

读题联想 本题是求“1^∞”型未定式数列的极限.除利用极限的四则运算法则,洛必达法则以及等价无穷小代换外,还需要首先把数列极限转化为适当的函数极限.本题要点:(1) 一般说来,对于1^∞型未定式$\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$,利用等价无穷小代换$\ln f(x)\sim f(x)-1$化为求极限$e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$,常能简化计算.

(2) 利用函数极限与洛必达法则求数列极限的理论根据是:

① 若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,则对任何数列$\{x_n\}$,只要它满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$,就有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

② 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则对任何数列$\{x_n\}$,只要它满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$且$x_n\neq x_0$,就有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

解题范例

【解】 设函数$f(x)=(e^{3x}-3\tan x)^{\frac{1}{x^2}}$和数列$x_n=\frac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$,

则 $f(x_n)=\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}(n=1,2,3,\cdots)$,且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0^+$. 2 分

计算可得 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^{3x}-3\tan x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln(e^{3x}-3\tan x)}{x^2}}=e^J$, 4 分

其中

$$J=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(e^{3x}-3\tan x)}{x^2}=\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}-3\tan x-1}{x^2}$$ 6 分

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}-\sec^2x}{x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}\frac{e^{3x}\cos^2x-1}{x}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to0^+}(3e^{3x}\cos^2x-2e^{3x}\cos x\sin x)=\frac{9}{2}.$$ 9 分

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=e^J=e^{\frac{9}{2}}$. 10 分

阅卷者按 本题满分10分,是计算数列极限中常考题型.关键点是幂指型转化成指数型;数列不能直接应用洛必达法则,要转化成函数再求极限.

求1^∞型极限$J=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}$,其中$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=1$,$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$,除了用上述一般方法外,还可用如下方法:

$$J=\lim_{x\to x_0}(1+(f(x)-1))^{\frac{1}{f(x)-1}\cdot(f(x)-1)g(x)}$$

转化为求$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-1)g(x)$.

部分同学在计算出$J=\frac{9}{2}$后,就结束了这一题的解答,这样的失误是很可惜的.

4 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域有二阶连续导数，且满足 $f'(0)=1, f''(0)=2$. 求 $J=\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(0)}-\dfrac{1}{xf'(x)}\right]$.

读题联想 本题是抽象函数求极限，且极限是"$\infty-\infty$"型未定式，可通分化为求"$\dfrac{0}{0}$"型未定式的极限.

本题要点："$\dfrac{0}{0}$"型未定式

设

(1) $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0, \lim\limits_{x\to\square} g(x)=0$；

(2) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\square$ 的去心邻域 $\mathring{U}$ 内可导，且 $g'(x)\neq0$；

(3) $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞)，

则
$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

导数定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

泰勒公式
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$
设 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)\sim a(x), \beta(x)\sim b(x)$，则
$$\lim_{x\to\square}\frac{\alpha(x)\gamma(x)}{\beta(x)\delta(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{a(x)\gamma(x)}{b(x)\delta(x)}.$$

解题范例

【解法一】

$$J=\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{f(x)-f(0)}-\frac{1}{xf'(x)}\right]=\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x[f(x)-f(0)]f'(x)}$$ 3 分

分子，分母同除 x^2

$$=\lim_{x\to0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}f'(x)}\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x^2}$$ 5 分

$$=\left(\frac{1}{f'(0)}\right)^2\lim_{x\to0}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x^2}$$ 7 分

代入 $f'(0)=1$，再用洛必达法则得

$$J=\lim_{x\to0}\frac{xf''(x)+f'(x)-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}f''(x)=\frac{1}{2}f''(0)=1.$$ 9 分

【解法二】 分母用等价无穷小因子替换：
$$f(x)-f(0)\sim f'(0)x=x$$ 2 分

然后用洛必达法则

$$J=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x[f(x)-f(0)]f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{xf'(0)xf'(x)}$$ 5 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(0)f'(x)}\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{2x}$$ 7 分

$$=\frac{1}{2}f''(0)=1.$$ 9 分

阅卷者按　本题满分 9 分，应用洛必达法则计算极限时，注意满足洛必达法则的同时，也要注意适当的化简和无穷小等价替换来简化计算.

5 求下列数列极限

（Ⅰ）$I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx^{n-1}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

（Ⅱ）$J=\lim\limits_{n\to\infty}x_n, x_n=\frac{1}{n^2+1}+\frac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}$.

读题联想 （Ⅰ）是定积分函数表示的数列，无法直接计算极限，因此考虑分部积分法将定积分化简.

（Ⅱ）中的 n 项和数列，简单的放大缩小法不能解决问题，再看 x_n 是否是某函数的一个积分和.

本题要点：（分部积分法）定积分分部积分法的公式与方法，与不定积分的类似，只是多了个上、下限而已：

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x,$$

或
$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x)=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$$

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，$f(x)\leqslant g(x)$，且至少存在点 $x_1\in[a,b]$，使 $f(x_1)<g(x_1)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

设收敛数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都以 a 为极限，数列 $\{c_n\}$ 满足：存在正数 N_0，当 $n>N_0$ 时有 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$，则 $\{c_n\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$u_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)$ 或 $u_n=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)$，则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}u_n&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\left(\text{或}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\\&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

解题范例

（Ⅰ）
$$\begin{aligned}I_n&\xlongequal{\text{记}}\int_0^1\frac{nx^{n-1}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x^n}{1+\mathrm{e}^x}\\&=\frac{x^n}{1+\mathrm{e}^x}\Big|_0^1+\int_0^1\frac{\mathrm{e}^x x^n}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{1+\mathrm{e}}+\int_0^1\frac{x^n\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$ 2 分

由

$$0<\int_0^1\frac{x^n\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x<\int_0^1 x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$$ 4 分

其中$\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}<1$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n e^x}{(1+e^x)^2}dx=0$$

因此

$$I=\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{1+e}.$$ 5 分

(Ⅱ) $x_n=\dfrac{1}{n^2}\left[\dfrac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\dfrac{2}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\dfrac{n}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]$

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{\frac{1}{n}}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{\frac{2}{n}}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{\frac{n}{n}}{1+(\frac{n}{n})^2}\right].$$ 7 分

这是 $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2}$ 在[0,1]上的一个积分和(n 等分). 8 分

因此

$$J=\lim_{n\to\infty}x_n=\int_0^1\frac{x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2.$$ 10 分

阅卷者按 本题满分 10 分，两个极限的求法都是常见类型，应该熟练掌握.

6 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\dfrac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\dfrac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\sin\dfrac{1}{n}$.

读题联想 这是一个 n 项和的数列极限，常用的方法有两种，一种是夹逼原理，另一种是定积分的定义.

解题范例

【解】 由于当 $n\to\infty$ 时，$\sin\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$，则 1 分

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\frac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1^2+n^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$ 3 分

又 $$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}(1+\frac{1}{n})\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$ 5 分

由于 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$$ 7 分

$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n})=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\dfrac{1}{n^2})=1$，

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$

$=\ln(1+\sqrt{2})$. 9 分

故 $I = \ln(1+\sqrt{2})$. 10 分

阅卷者按 本题满分10分,主要考察利用夹逼原理和定积分定义求极限.本题的关键是要将这两种方法结合起来问题才能得到解决.

7 设 a,b,p 为非零常数，求 $I=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\dfrac{\sin px}{|x|}\right)$.

读题联想 两函数乘积的极限，不能直接分别计算极限，因为这里 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin px}{|x|}$ 均不存在，但 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\dfrac{\sin px}{|x|}\right)$ 存在，所以分别求左、右极限.

本题要点：x_0 左(右)极限就是在 x_0 左(右)邻域内考虑极限

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A.$$

$$\sin x\sim x,x\to 0.$$

解题范例

因 $\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0$ 不相同，又 $|x|$ 是分段函数，所以要分别求左、右极限. 3分

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin px}{|x|}=\lim_{x\to 0^+}\frac{ae^{-\frac{1}{x}}+b}{ae^{-\frac{1}{x}}-b}\cdot\frac{px}{x}=\frac{0+b}{0-b}p=-p.$$ 5分

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{\sin px}{|x|}=\lim_{x\to 0^-}\frac{a+be^{\frac{1}{x}}}{a-be^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{px}{-x}=\frac{a+0}{a-0}(-p)=-p.$$ 7分

因此

$$I=-p.$$ 9分

阅卷者按 本题满分9分，求的函数的极限，关键是两个函数的极限不存在，要分别求左、右极限，左(右)极限计算时适用各种求极限的法则，只要将此时的0当成符号是负(正)的.

8 设 $f(x)$ 有一阶连续导数，$f(0)=0, f'(0)=1$，求

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}\left(\int_0^u f(u-t)\,dt\right)du}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^3}.$$

读题联想 这是求$\frac{0}{0}$型极限.考虑用洛必达法则，极限的函数是变限积分函数，利用变限积分求导法.

本题要点：如果函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在$[a,b]$上具有导数，且它的导数 $F'(x)=f(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$.

解题范例

【解法一】 用洛必达法则及变限积分求导法得

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{2x\int_0^{x^2}f(x^2-t)\,dt}{3f(x)\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)/x}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(x^2-t)\,dt}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2}$$ 3 分

其中 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)=1$ 4 分

$$\int_0^{x^2}f(x^2-t)\,dt\xlongequal{x^2-t=s}-\int_{x^2}^0 f(s)\,ds=\int_0^{x^2}f(s)\,ds$$ 5 分

于是

$$I=\frac{2}{3}\cdot 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2}f(t)\,dt}{\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)\cdot 2x}{2\int_0^x f(t)\,dt\cdot f(x)}$$ 7 分

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f(x^2)}{\int_0^x f(t)\,dt}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x)}{x}}$$

$$=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x^2)\cdot 2x}{f(x)}\cdot\frac{1}{f'(0)}=\frac{2}{3}\,\frac{f'(0)\cdot 2}{f'(0)}\cdot\frac{1}{f'(0)}=\frac{4}{3}$$ 10 分

【解法二】 由泰勒公式可得：设 $g(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导，

$g(a)=0, g'(a)=0,\cdots,g^{(n-1)}(a)=0, g^{(n)}(a)\neq 0$

$$\Rightarrow\quad g(x)=\frac{1}{n!}g^{(n)}(a)(x-a)^n+o((x-a)^n)\quad(x\to a)$$

$$\Rightarrow\quad g(x)\sim\frac{g^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\quad(x\to a)$$

若 $g(x)=\int_a^x f(t)\,dt$，设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处一阶可导，$f(a)=0, f'(a)\neq 0$