

全国硕士研究生入学统一考试

# 线性代数 辅导讲义

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$$

策划◎文都考研命题研究中心

主编◎汤家凤

$$V(a_1, a_2, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j)$$

名师精心编写指点备考迷津

系统详解重点夯实线代基础

总结解题技巧逐类攻破考点

精选习题快速提高应试能力

 文都教育™

2017

全国硕士研究生入学统一考试

# 线性代数 辅导讲义

策划◎文都考研命题研究中心

主编◎汤家凤

中国原子能出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试线性代数辅导讲义/汤家凤主编. —北京:中国原子能出版社, 2013. 1

ISBN 978-7-5022-5825-2

I. ①全… II. ①汤… III. ①线性代数-研究生-入学考试-自学参考资料  
IV. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 022629 号

## 全国硕士研究生入学统一考试线性代数辅导讲义

---

出版发行 中国原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100048)

责任编辑 侯茸方

特约编辑 付 萍

印 刷 北京建泰印刷有限公司

经 销 全国新华书店

开 本 787mm × 1092mm 1/16

印 张 11.75 字 数 300 千字

版 次 2013 年 1 月第 1 版 2013 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5022-5825-2 定 价 22.00 元

---

网址:<http://www.aep.com.cn>

发行电话:010-68452845

E-mail: [atomep123@126.com](mailto:atomep123@126.com)

版权所有 侵权必究

# 郑重声明

## 买正版图书 听精品课程

文都考研数学独家师资汤家凤老师主编的《考研数学复习大全·数学一》《考研数学复习大全·数学二》《考研数学复习大全·数学三》《全国硕士研究生入学统一考试线性代数辅导讲义》《考研数学接力题典1800:通关、高分、夺冠必备》《考研数学绝对考场最后八套题·数学一》《考研数学绝对考场最后八套题·数学二》《考研数学绝对考场最后八套题·数学三》等系列图书因其独特的编写切入点以及对学科命题特点的独到把握而深受广大考生欢迎。

但当前某些机构和个人非法盗印汤家凤老师的图书,这类图书印制质量差,错误百出,不仅使考生蒙受金钱与精力的损失,而且误导考生,甚至毁掉考生的研究生考试前程。

为了保障考生、作者及出版社等多方的利益,文都教育集团特发如下郑重声明:

1. 对制作、销售盗版图书的网店、个人,一经发现,文都教育集团将严厉追究其法律责任;
2. 凡文都图书代理商、合作单位参与制作、销售盗版图书的,立即取消其代理、合作资格,并依法追究其法律和相关经济责任;
3. 对为打击盗版图书提供重要线索、证据者,文都教育总部图书事业部将给予奖励;若举报者为参加考研的考生,文都教育总部图书事业部将免费提供考研图书资料和考前预测试卷;
4. 全国各地举报电话:010-88820419,13488713672  
电子邮箱:tousu@wendu.com

为方便考生使用考研数学系列正版图书,特提供网上增值服务,考生登录文都教育在线([www.wendu.com](http://www.wendu.com))可听取汤家凤老师的精品课程。

中国原子能出版社  
北京世纪文都教育科技发展有限公司  
授权律师:北京市安诺律师事务所  
刘岩  
2013年1月



# 前言

线性代数是全国硕士研究生入学统一考试数学考试中必考的内容，从历年考试的情况看，很多考生对线性代数知识掌握得不太理想，甚至没有弄清楚其中很多基本原理。作者编写本书目的是为广大复习线性代数的考生在阅读教材的基础上进一步系统复习提供辅导。本书共分为六章，分别为行列式、矩阵、向量、线性方程组、特征值和特征向量、二次型及其标准形。

**本书特色：**

## 1. 对知识体系进行概括总结

无论是高等数学、线性代数还是概率统计，对知识体系全面、透彻地理解非常重要。本书按照线性代数复习需要抓住的两条主线入手进行系统总结，展开分析。一条主线是行列式、矩阵、向量组作为研究方程组的三大工具与方程组解的关系以及它们之间的联系；另一条主线是特征值与特征向量、矩阵的对角化作为工具如何应用于二次型的标准化。本书每一章都按照体系给出需要掌握的基本概念、基本原理、基本性质，特别注重性质之间联系的总结，在关键的概念、原理和性质后面都进行了注解，并且重要内容都给出了巩固题型，这样有助于对相应部分的内容的理解和掌握，同时有助于理解各内容之间的本质联系。

## 2. 对每个部分的基本题型进行分类

在理解基本概念、原理和性质的基础上，本书各部分均给出了典型的综合题型，按题型进行分类概括，给出了规范、详尽的解答，力求简明扼要，有些题目给出了多种解法。这一部分将考研涉及的线性代数题型进行全面分类，既有助于基本知识的掌握，又有助于适应考试题型。

## 3. 各部分给出练习题及解答

每个部分都给出了供读者检测掌握情况的练习题，包括填空题、选择题、计算与证明题。题型全面，所设计的题目既注重基础知识的掌握，又有相当的综合性，对提高读者计算能力、熟练使用基本原理解决问题的能力非常有用。同时题后附有答案与解析，完全满足读者检测的需求，快捷提高应试能力。

本书在编写过程中，得到了文都同仁非常大的帮助，在此表示深深的敬意。由于本书的编写时间非常仓促，加上编者水平所限，不足之处在所难免，望广大读者批评指正。

编者

2013年1月

## 文都图书邮购目录

序号	书名	开本	定价(元)	作者	出版时间	出版社
<b>2014 考研思想政治理论系列</b>						
1	《报考知识全集及政治理论基础知识全集》	32 开	13.80	徐之明	已出版	中国原子能
2	《考研思想政治理论高频考点与备考策略》	32 开	12.80	蒋中挺	2013/02	中国原子能
3	《考研思想政治理论知识点精粹与课程导学》	32 开	15.00	王向明	2013/02	中国时代经济
4	《考研思想政治理论历年真题详解》	16 开	12.80	蒋中挺	2013/03	中国原子能
5	《考研思想政治理论历年真题精析》	16 开	18.80	赵政	2013/03	中国时代经济
6	《考研思想政治理论七年真题精析》	16 开	18.00	王向明	2013/03	中国时代经济
7	《考研思想政治理论强化通关 800 题》	16 开	29.80	蒋中挺	2013/06	中国原子能
8	《考研思想政治理论名师全教程》	16 开	45.00	王向明	2013/06	中国时代经济
9	《考研思想政治理论高分必练 1000 题》	16 开	32.00	王向明	2013/06	中国时代经济
10	《考研思想政治理论复习全书》	16 开	42.00	蒋中挺	2013/06	中国时代经济
11	《考研思想政治理论客观题应试宝典》	64 开	6.00	蒋中挺	2013/06	中国时代经济
12	《全国硕士研究生入学统一考试思想政治理论考试大纲导读》	32 开	16.00	文都考研命题研究中心	2013/09	中国原子能
13	《考研思想政治理论形势与政策命题热点及核心预测》	32 开	15.00	王向明	2013/10	中国时代经济
14	《考研思想政治理论主观题应试宝典》	32 开	12.00	王向明	2013/10	中国时代经济
15	《形势与政策全集暨相关分析题预测》	32 开	13.80	徐之明	2013/10	中国原子能
16	《考研思想政治理论形势与政策热点剖析及命题预测》	32 开	12.00	蒋中挺	2013/10	中国原子能
17	《考研思想政治理论真题预测百分百》	32 开	12.00	蒋中挺	2013/10	中国原子能
18	《考研思想政治理论冲刺考点必背》	32 开	12.00	蒋中挺	2013/11	中国原子能
19	《考研思想政治理论绝对考场最后五套题》	8 开	14.60	蒋中挺	2013/11	中国原子能
20	《政治理论终极预测 4 套卷》	16 开	12.80	徐之明	2013/11	中国原子能
21	《考研思想政治理论冲刺模拟 6 套卷》	16 开	16.00	王向明	2013/11	中国时代经济
<b>2014 考研英语系列</b>						
22	《考研英语必考词汇突破全书》	16 开	35.00	何凯文	已出版	中国时代经济
23	《考研词汇速记指南》	16 开	40.00	刘一男	已出版	中国时代经济
24	《考研词汇速记指南(典藏版)》	16 开	56.00	刘一男	已出版	中国时代经济
25	《考研英语长难句解密》	32 开	10.00	何凯文	已出版	中国时代经济
26	《考研英语阅读同源外刊时文精析》	16 开	36.00	何凯文	已出版	中国时代经济
27	《考研英语写作秘笈》	32 开	12.00	文都考研命题研究中心	已出版	中国原子能
28	《考研英语高分策略:翻译与句型结构专项特训》	16 开	19.80	李超	已出版	中国原子能
29	《考研英语写作高分攻略》	16 开	18.00	何凯文	已出版	中国时代经济
30	《考研英语历年真题精析:命题剖析与复习指导》(英语一)	16 开	32.00	文都考研命题研究中心	已出版	中国原子能
31	《考研英语语法 7 天乐》	32 开	25.00	韩苏	2013/02	中国时代经济
32	《考研英语高分策略:长难句与语法突破专项特训》	32 开	18.00	程呈	2013/02	中国原子能
33	《考研英语高分策略:完形填空与新题型专项特训》	16 开	22.00	赵文通	2013/02	中国原子能
34	《考研英语阅读思路解析》	16 开	26.00	何凯文	2013/02	中国时代经济
35	《考研英语历年真题全解析》	16 开	25.00	何凯文	2013/04	中国时代经济
36	《全国硕士研究生入学统一考试英语考试大纲导读》	32 开	18.00	文都考研命题研究中心	2013/09	中国原子能
37	《考研英语绝对考场最后六套题》(英语一)	8 开	16.00	何凯文	2013/10	中国时代经济
<b>2014 考研数学系列</b>						
38	《考研数学必备手册》	64 开	5.00	文都考研命题研究中心	已出版	中国原子能
39	《考研数学复习大全》(数学一)	16 开	58.00	汤家凤	已出版	中国时代经济
40	《考研数学复习大全》(数学二)	16 开	48.00	汤家凤	已出版	中国时代经济
41	《考研数学复习大全》(数学三)	16 开	53.00	汤家凤	已出版	中国时代经济

序号	书 名	开本	定价(元)	作者	出版时间	出版社
42	《全国硕士研究生入学统一考试线性代数辅导讲义》	16开	22.00	汤家凤	已出版	中国原子能
43	《全国硕士研究生入学统一考试高等数学辅导讲义》	16开	28.00	汤家凤	2013/02	中国时代经济
44	《考研数学接力题典1800:通关、高分、夺冠必备》	16开	40.00	汤家凤	2013/02	中国原子能
45	《考研数学15年真题解析与方法指导》(数学一)	16开	25.00	汤家凤	2013/03	中国时代经济
46	《考研数学15年真题解析与方法指导》(数学二)	16开	25.00	汤家凤	2013/03	中国时代经济
47	《考研数学15年真题解析与方法指导》(数学三)	16开	25.00	汤家凤	2013/03	中国时代经济
48	《考研数学轻松跨越100分》	16开	25.00	汤家凤	2013/03	中国时代经济
49	《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲导读》	32开	12.00	文都考研命题研究中心	2013/09	中国原子能
50	《考研数学绝对考场最后八套题》(数学一)	8开	13.00	汤家凤	2013/10	中国原子能
51	《考研数学绝对考场最后八套题》(数学二)	8开	13.00	汤家凤	2013/10	中国原子能
52	《考研数学绝对考场最后八套题》(数学三)	8开	13.00	汤家凤	2013/10	中国原子能
<b>2014 考研专业硕士系列</b>						
53	《考研英语历年真题精析:命题剖析与复习指导》(英语二)	16开	25.00	邵宁	2013/02	中国时代经济
54	《考研英语词汇速记攻略》(英语二)	16开	28.00	邵宁	2013/03	中国时代经济
55	《考研英语复习指导一本通关》(英语二)	16开	32.00	邵宁	2013/04	中国时代经济
56	《考研英语绝对考场最后五套题》(英语二)	8开	15.00	邵宁	2013/10	中国时代经济
57	《管理类联考综合能力-数学复习指南》	16开	48.00	张乃岳	2013/02	中国时代经济
58	《管理类经济类联考综合能力-逻辑复习指南》	16开	48.00	张乃岳	2013/02	中国时代经济
59	《管理类联考综合能力考试-数学精选500题》	16开	42.00	张乃岳	2013/03	中国时代经济
60	《管理类经济类联考综合能力考试-逻辑精选500题》	16开	42.00	张乃岳	2013/03	中国时代经济
61	《管理类联考数学复习大全》	16开	42.00	周远飞	2013/03	中国时代经济
62	《管理类联考数学每日一练》	16开	38.00	周远飞	2013/04	中国时代经济
63	《管理类联考数学历年真题透析》	16开	25.00	周远飞	2013/04	中国时代经济
64	《管理类经济类联考综合能力考试模拟6套题》	16开	18.00	张乃岳	2013/05	中国时代经济
65	《管理类联考数学模拟十套卷》	16开	28.00	周远飞	2013/09	中国时代经济
<b>2014 考研计算机专业课系列</b>						
66	《计算机学科专业基础综合辅导讲义》	16开	55.00	宋雨姗	2013/04	中国时代经济
67	《计算机学科专业基础综合考试历年真题精析》	16开	24.00	宋雨姗	2013/05	中国原子能
68	《计算机专业基础综合要点速记手册》	64开	10.00	文都考研命题研究中心	2013/05	中国时代经济
69	《计算机学科专业基础综合辅导讲义同步练习》	16开	35.00	文都考研命题研究中心	2013/6	中国时代经济
70	《计算机学科专业基础综合考试全真模拟试题集》	16开	22.00	文都考研命题研究中心	2013/09	中国时代经济
<b>2014 考研西医综合专业课系列</b>						
71	《考研西医综合历年真题精析》	16开	48.00	魏易生	已出版	中国原子能
72	《考研西医综合辅导讲义》	16开	82.00	魏易生	已出版	中国原子能
73	《考研西医综合高分必备》	16开	55.00	顾艳南	2013/02	中国时代经济
74	《考研西医综合辅导讲义同步练习》	16开	48.00	魏易生	2013/02	中国原子能
75	《考研西医综合考点速记》	16开	28.00	魏易生	2013/03	中国原子能
76	《考研西医综合全真模拟试题卷及精析》	16开	25.00	魏易生	2013/03	中国原子能
77	《考研西医综合最后密押五套卷》	16开	12.00	魏易生	2013/08	中国原子能
<b>2014 考研中医综合专业课系列</b>						
78	《考研中医综合辅导讲义》	16开	92.00	张凤瑞	已出版	中国时代经济
79	《考研中医综合辅导讲义同步练习》	16开	53.00	张凤瑞	2013/04	中国原子能
80	《考研中医综合逻辑图解》	8开	38.00	张凤瑞	2013/05	中国原子能
81	《考研中医综合历年真题精析》	16开	28.00	张凤瑞	2013/06	中国原子能
82	《考研中医综合全真模拟试题卷及精析》	16开	16.00	张凤瑞	2013/09	中国原子能
<b>2014 考研教育学/历史学/心理学专业课系列</b>						

序号	书 名	开本	定价 (元)	作者	出版时间	出版社
83	《考研专业课教育学基础综合辅导讲义》	16开	48.00	段会东	2013/03	中国原子能
84	《考研专业课历史学基础综合辅导讲义》	16开	48.00	李浩然 任燕翔	2013/03	中国原子能
85	《考研专业课心理学基础综合辅导讲义》	16开	48.00	文都考研命题 研究中心	2013/03	中国原子能
<b>大学同步辅导系列</b>						
86	《毛泽东思想和中国特色社会主义理论体系概论》(同步辅导教程)	32开	10.00	王向明	已出版	中国时代经济
87	《中国近现代史纲要》(同步辅导教程)	32开	10.00	王向明	已出版	中国时代经济
88	《马克思主义基本原理概论》(同步辅导教程)	32开	10.00	王向明	已出版	中国时代经济
89	《思想道德修养与法律基础》(同步辅导教程)	32开	10.00	王向明	已出版	中国时代经济
90	《托福词汇速记指南》	16开	40.00	刘一男	2013/03	中国时代经济
91	《英语单词那点事儿》	32开	40.00	刘一男	2013/03	中国时代经济
<b>2013 大学英语四六级系列</b>						
92	《大学英语四级词汇分层妙记》	32开	28.00	何凯文	已出版	中国原子能
93	《四级词汇速记指南》	32开	36.00	刘一男	已出版	中国时代经济
94	《30天攻克大学英语四六级词汇》	32开	22.00	何威威 李自健	已出版	中国时代经济
95	《大学英语四级词汇背单词练听力》(赠 Mp3)	32开	26.00	张雅军	已出版	中国原子能
96	《大学英语四六级考试词汇高分突破》	32开	25.00	王丽 何威威	已出版	中国原子能
97	《大学英语四级考试三层突破 - 写作·完形·翻译》	16开	18.00	黄磊 何凯文 赵文通	已出版	中国原子能
98	《大学英语四级考试强化集训 - 听力理解》(赠 Mp3)	32开	13.00	赵文通	已出版	中国原子能
99	《大学英语四级考试强化集训 - 阅读理解》	32开	14.00	赵文通 何威威 徐可风	已出版	中国原子能
100	《大学英语四级考试强化集训 - 完形·翻译》	32开	9.00	赵文通 徐可风 何凯文	已出版	中国原子能
101	《大学英语四级考试一本通关 - 命题剖析与应试指导》(赠 Mp3)	16开	19.00	文都大学英语四六级 考试研究中心	已出版	中国时代经济
102	《大学英语四级考试历年真题详解(精讲版)》(赠 Mp3)	16开	29.80	张雅军 何威威	已出版	中国原子能
103	《大学英语四级考试真题与预测5+5》(赠 Mp3)	16开	19.80	文都大学英语四六级 考试研究中心	已出版	中国原子能
104	《大学英语六级考试真题与预测5+5》(赠 Mp3)	16开	19.80	文都大学英语四六级 考试研究中心	已出版	中国原子能
105	《大学英语四六级考试写作全解读》	32开	12.00	黄磊 赵文通 徐可风	已出版	中国原子能
106	《六级词汇速记指南》	32开	32.00	刘一男	已出版	中国时代经济
107	《大学英语四级考试历年真题精析(精华版)》(赠 Mp3)	16开	19.80	文都大学英语四六级 考试研究中心	2013/03	中国原子能
108	《大学英语四级考试全真预测卷》(赠 Mp3)	16开	19.80	文都大学英语四六级 考试研究中心	2013/03	中国原子能
109	《大学英语六级考试历年真题精析(精华版)》(赠 Mp3)	16开	25.00	张静 刘玉楼	2013/03	中国原子能
110	《大学英语六级考试全真预测卷》(赠 Mp3)	16开	19.80	文都大学英语四六级 考试研究中心	2013/03	中国原子能
<b>2013 医师资格考试系列</b>						
111	《国家医师资格考试临床执业医师核心笔记》	16开	98.00	魏易生	已出版	中国时代经济
112	《国家医师资格考试临床执业助理医师核心笔记》	16开	79.00	魏易生	已出版	中国时代经济
113	《国家医师资格考试临床执业医师考点速记》	16开	45.00	魏易生	已出版	中国时代经济
114	《国家医师资格考试临床执业助理医师考点速记》	16开	35.00	魏易生	已出版	中国时代经济
115	《国家临床执业(助理)医师资格考试实践技能应试宝典》	16开	60.00	叶扶光	2013/02	中国原子能
116	《国家临床执业医师资格考试辅导讲义》(上、下)	16开	138.00	顾艳南	2013/02	中国原子能
117	《国家临床执业医师资格考试辅导讲义目标练习》	16开	35.00	顾艳南	2013/02	北京出版社



序号	书 名	开 本	定价 (元)	作 者	出版 时间	出 版 社
118	《国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义》	16 开	108.00	顾艳南	2013/02	中国原子能
119	《国家临床执业助理医师资格考试辅导讲义目标练习》	16 开	30.00	顾艳南	2013/02	北京出版社
120	《国家临床执业医师资格考试历年真题精析》	16 开	48.00	顾艳南	2013/03	中国原子能
121	《国家临床执业助理医师资格考试历年真题精析》	16 开	25.00	顾艳南	2013/03	中国时代经济
122	《国家临床执业医师资格考试全真模拟题集》	16 开	20.00	顾艳南	2013/05	中国时代经济
123	《国家临床执业助理医师资格考试全真模拟题集》	16 开	16.00	顾艳南	2013/05	中国时代经济
<b>2013 护士执业资格考试系列</b>						
124	《全国护士执业资格考试通关必备》	16 开	42.00	吴瑞	已出版	中国时代经济
125	《全国护士执业资格考试通关必练 880 题》	16 开	22.00	吴瑞	已出版	中国时代经济
126	《全国护士执业资格考试全真模拟试卷》	16 开	32.00	李杰	已出版	中国原子能
127	《全国护士执业资格考试速记宝典》	32 开	16.00	张如月	2013/05	中国时代经济
<b>公务员考试系列</b>						
128	《公务员录用考试专用教材·行政职业能力测验》	16 开	45.00	文都公务员考试研究中心	2013/01	中国原子能
129	《公务员录用考试专用教材·行政职业能力测验历年真题精解》	16 开	38.00	文都公务员考试研究中心	2013/01	中国原子能
130	《湖北省公务员考试一本通》	16 开	108.00	文都公务员考试研究中心	2013/01	中国时代经济
131	《公务员录用考试专用教材·申论》	16 开	46.00	李易成	2013/01	中国原子能
132	《公务员录用考试专用教材·申论历年真题精解》	16 开	32.00	李易成	2013/01	中国原子能
133	《公务员录用考试专用教材·公共基础知识》	16 开	46.00	文都公务员考试研究中心	2013/03	中国原子能
134	《公务员录用考试专项突破教材·言语理解与表达》	16 开	35.00	文都公务员考试研究中心	2013/03	中国原子能
135	《公务员录用考试专项突破教材·数量关系》	16 开	32.00	文都公务员考试研究中心	2013/03	中国原子能
136	《公务员录用考试专项突破教材·推理判断》	16 开	35.00	文都公务员考试研究中心	2013/03	中国原子能
137	《公务员录用考试专项突破教材·资料分析》	16 开	35.00	文都公务员考试研究中心	2013/03	中国原子能
138	《公务员录用考试专用教材·申论高分秘诀》	16 开	32.00	李易成	2013/03	中国原子能
139	《公务员录用考试专用教材·面试》	16 开	40.00	文都公务员考试研究中心	2013/05	中国原子能
140	《公务员录用考试专用教材·公务员面试经典真题精解 1000 题》	16 开	45.00	文都公务员考试研究中心	2013/05	中国原子能
141	《公务员录用考试专用教材·时政热点深度分析及命题趋势预测》	32 开	12.00	文都公务员考试研究中心	2013/05	中国时代经济
<b>报关员资格考试系列</b>						
142	《报关员资格考试考点精华汇编》	16 开	48.00	秦立杰	已出版	中国时代经济

## 文都教育全国总部图书事业部

地址:北京市海淀区西三环北路 72 号世纪经贸大厦 B 座 20 层

邮编:100048

文都教育在线:www.wendu.com

网上书城:www.51testbook.com

购书热线:010-88820362

书城客服 QQ:1281847040,2275920907

发行部 QQ:791615263

编辑电话:010-88820136 转 808

Email:wendutushu@wendu.com

QQ:2238719772

# 文都考研数学 名师精品巨献

综合提高



全程必备



模拟冲刺



# 目 录

第一章 行列式 .....	(1)
本章概要 .....	(1)
重要知识点讲解 .....	(1)
第一节 行列式的基本概念与性质 .....	(1)
第二节 行列式的应用——克拉默法则 .....	(6)
综合题型 .....	(8)
题型一 行列式的基本概念 .....	(8)
题型二 低阶行列式的计算 .....	(9)
题型三 $n$ 阶行列式的计算 .....	(12)
题型四 矩阵的行列式计算 .....	(14)
题型五 余子式与代数余子式 .....	(15)
本章练习题 .....	(16)
练习题答案与解析 .....	(17)
第二章 矩 阵 .....	(20)
本章概要 .....	(20)
重要知识点讲解 .....	(20)
第一节 矩阵的基本概念与特殊矩阵 .....	(20)
第二节 矩阵的运算及性质 .....	(21)
第三节 矩阵的逆矩阵 .....	(24)
第四节 矩阵的秩 .....	(28)
第五节 矩阵等价 .....	(30)
综合题型 .....	(31)
题型一 矩阵的运算与矩阵的行列式计算(续) .....	(31)
题型二 矩阵的幂矩阵 .....	(33)
题型三 初等变换与初等矩阵 .....	(35)
题型四 逆矩阵的计算与证明 .....	(37)
题型五 伴随矩阵与矩阵的逆阵关系问题 .....	(40)
题型六 矩阵方程 .....	(41)
题型七 矩阵的秩 .....	(43)
本章练习题 .....	(44)
练习题答案与解析 .....	(47)
第三章 向 量 .....	(53)
本章概要 .....	(53)
重要知识点讲解 .....	(53)
第一节 向量基本概念 .....	(53)
第二节 向量的性质 .....	(56)
第三节 $n$ 维向量空间(仅限数学一) .....	(58)
综合题型 .....	(59)
题型一 判断向量组的线性相关性 .....	(59)



题型二 向量组相关性问题的证明 .....	(63)
题型三 判断一个向量是否可由一个向量组线性表示 .....	(67)
题型四 向量组的极大线性无关组与向量组的秩 .....	(68)
题型五 过渡矩阵与向量的坐标 (仅限数学一) .....	(70)
本章练习题 .....	(71)
练习题答案与解析 .....	(74)
<b>第四章 线性方程组</b> .....	(81)
本章概要 .....	(81)
重要知识点讲解 .....	(81)
综合题型 .....	(87)
题型一 涉及线性方程组理论的矩阵证明 .....	(87)
题型二 线性方程组解的结构与性质 .....	(87)
题型三 齐次线性方程组的基础解系与通解 .....	(92)
题型四 非齐次线性方程组的通解 .....	(97)
题型五 方程组的公共解 .....	(109)
本章练习题 .....	(114)
练习题答案与解析 .....	(116)
<b>第五章 特征值和特征向量</b> .....	(121)
本章概要 .....	(121)
重要知识点讲解 .....	(121)
第一节 特征值与特征向量的基本概念 .....	(121)
第二节 特征值与特征向量的性质 .....	(123)
第三节 矩阵对角化理论 .....	(124)
综合题型 .....	(126)
题型一 求矩阵的特征值与特征向量 .....	(126)
题型二 特征值与特征向量的定义与性质 .....	(130)
题型三 非实对称矩阵的相似对角化 .....	(133)
题型四 实对称矩阵的对角化 .....	(138)
题型五 求 $A^n$ .....	(142)
题型六 用特征值、特征向量的方法求矩阵 $A$ .....	(144)
题型七 特征值特征向量命题的证明 .....	(147)
本章练习题 .....	(148)
练习题答案与解析 .....	(150)
<b>第六章 二次型及其标准形</b> .....	(155)
本章概要 .....	(155)
重要知识点讲解 .....	(155)
第一节 二次型的基本概念及其标准形 .....	(155)
第二节 正定矩阵与正定二次型 .....	(159)
综合题型 .....	(160)
题型一 二次型的概念与性质 .....	(160)
题型二 二次型的标准形 .....	(161)
题型三 含参数的二次型问题 .....	(163)
题型四 正定二次型的判别与证明问题 .....	(168)
题型五 矩阵相似与合同 .....	(171)
本章练习题 .....	(171)
练习题答案与解析 .....	(173)



# 第一章 行列式

## 本章概要

行列式本质上是一个数,行列式反映行列式元素之间的运算关系,熟练掌握不超过四阶的行列式的计算是重点,同时要能计算简单、特殊的  $n$  阶行列式.

行列式的计算是按照行列式的性质进行的.低阶行列式的计算主要有两个思路——转化为上(下)三角行列式和降阶,但一般是把两种思路相结合; $n$  阶行列式的计算主要有数学归纳法、递推法、升阶法、转化为上(下)三角行列式法.

行列式是线性代数中一个非常重要、非常基础的工具,在后面的学习中经常使用到,归纳起来主要有如下几个方面的应用:

### 1. 向量组的相关性

设  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  是  $n$  个  $n$  维向量,令  $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ ,则向量组  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  线性无关的充分必要条件是  $|A| \neq 0$ .

### 2. 矩阵的满秩与可逆

(1) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,则  $A$  满秩的充分必要条件是  $|A| \neq 0$ ; 当  $|A| \neq 0$  时,又称  $A$  为非奇异矩阵,即满秩矩阵与非奇异矩阵是等价的.

(2) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,则  $A$  可逆的充分必要条件是  $|A| \neq 0$ .

### 3. 方程组的解

(1) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,则  $AX=0$  只有零解的充分必要条件是  $|A| \neq 0$ .

(2) 设  $A$  为  $n$  阶矩阵,则  $AX=b$  有唯一解的充分必要条件是  $|A| \neq 0$ .

### 4. 特征值、特征向量

设矩阵  $A$  的特征值为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , 则  $|A| = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n$ .

## 重要知识点讲解

### 第一节 行列式的基本概念与性质

#### 一、基本概念

1. 逆序 设  $i, j$  是一对不等的正整数,若  $i > j$ , 则称  $(i, j)$  为一对逆序.

2. 逆序数 设  $i_1 i_2 \cdots i_n$  是  $1, 2, \dots, n$  的一个排列,该排列所含的逆序总数称为该排列的逆序数,记为  $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ . 逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

3. 对换 对排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  中任意两个数的位置进行对调,称为对该排列的一次对换,对换改变排列的奇偶性.

4. 行列式 由  $n^2$  数组成的下列记号

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix},$$

称为  $n$  阶行列式, 规定

$$D = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

5. 余子式与代数余子式 把行列式  $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix}$  中元素  $a_{ij}$  所在的第  $i$  行元素

和第  $j$  列元素去掉, 剩下的  $n-1$  行和  $n-1$  列按照原来的排列次序构成的  $n-1$  阶行列式, 称为元素  $a_{ij}$  的余子式, 记为  $M_{ij}$ , 称  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  为元素  $a_{ij}$  的代数余子式.

### 【注解】

1. 逆序指两个正整数之间的关系, 而逆序数指一个排列中所含的所有逆序的总数, 是对一个排列而言的.

2. 在所有可能的排列中, 奇偶排列各占一半.

3. 行列式本质上是一个数, 所以不同阶的行列式完全有可能相等, 行列式反映行列式中各元素之间的乘法和加减法的关系, 如果行列式中元素都是整数, 则行列式应该为整数, 二、三阶行列式的计算比较简单, 但高阶行列式(除特殊高阶行列式)若按照定义进行计算将非常复杂, 所以行列式的计算一般按照两个思路: 一是把普通的高阶行列式化为特殊的高阶行列式; 二是降低行列式的阶数.

## 二、几个特殊的高阶行列式

以下是几个常用的特殊行列式, 因其计算简便, 所以在线性代数理论中应用广泛:

### 1. 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{mm}.$$

### 2. (主)上(下)三角行列式

$$(1) \text{ 上三角行列式 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{mm}.$$

$$(2) \text{ 下三角行列式 } \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{mm}.$$

## 3. (副)上(下)三角行列式

$$(1) \text{ (副)上三角行列式} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

$$(2) \text{ (副)下三角行列式} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

## 4. 范德蒙德行列式

$$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j).$$

## 【注解】

$V(a_1, a_2, \cdots, a_n) \neq 0$  的充分必要条件是  $a_1, a_2, \cdots, a_n$  两两不等.

## 5. 广义对角行列式

$$\text{设 } A_1, A_2, \cdots, A_m \text{ 都是方阵, 则} \begin{vmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_m \end{vmatrix} = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \cdots \cdot |A_m|.$$

## 6. 特殊分块行列式

设  $A, B$  分别为  $m$  与  $n$  阶矩阵, 则

$$(1) \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|; \quad (2) \begin{vmatrix} A & O \\ D & B \end{vmatrix} = |A| \cdot |B|.$$

## 三、行列式的性质

二阶和三阶行列式的计算比较容易, 一般的高阶行列式运算比较复杂, 但特殊的高阶行列式的运算比较简单, 所以计算行列式一般是转化为特殊行列式或者降低行列式的阶数, 因此行列式的性质可以分为两类:

## 1. 把行列式转化为特殊行列式的性质

(1) 行列式与其转置行列式相等, 即  $D = D^T$ .

(2) 对调两行(或列)行列式改变符号.

(3) 行列式某行(或列)有公因子可以提取到行列式的外面.

**推论①** 若行列式某行(或列)元素全为零, 则该行列式为零.

**推论②** 若行列式某两行(或列)元素相同, 则行列式为零.

**推论③** 若行列式某两行(或列)元素对应成比例, 则行列式为零.

(4) 行列式某行(或列)的每个元素皆为两数之和时,行列式可分解为两个行列式之和,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + b_{i1} & a_{i2} + b_{i2} & \cdots & a_{in} + b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(5) 行列式的某行(或列)的倍数加到另一行(或列),行列式不变,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j2} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中  $k$  为任意常数.

## 2. 行列式降阶的性质

(1) 行列式等于行列式某行(或列)元素与其对应的代数余子式之积的和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j=1, 2, \cdots, n).$$

(2) 行列式的某行(或列)元素与另一行(或列)对应元素的代数余子式之积的和为零.

### 【注解】

1. 当改变某行(或列)元素时,该行(或列)元素对应的代数余子式不变.

2. 行列式的第  $i$  行(或列)元素与第  $j$  行(或列)元素的代数余子式之积的和等于该行列式中把第  $j$  行(或列)元素用第  $i$  行(或列)元素代替,显然代替后的行列式有两行(或列)相同,所以结果为零.

### 巩固题型

**【例 1】** 设  $a_{11}a_{23}a_{35}a_{4j}a_{54}a_{6k}$  为六阶行列式中带正号的项,则  $i = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $j = \underline{\hspace{2cm}}$ ,  $k = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**【解】** 对排列  $i35j4k$ ,  $ijk$  的可能取值为 126, 162, 216, 261, 612 和 621, 因为  $\tau(135246) = 3$ ,  $\tau(135642) = 6$ ,  $\tau(235146) = 4$ ,  $\tau(235641) = 7$ ,  $\tau(635142) = 11$ ,  $\tau(635241) = 12$ , 所有可能取值为  $i=1, j=6, k=2$ ;  $i=2, j=1, k=6$ ;  $i=6, j=2, k=1$ .

**【例 2】** 设  $f(x) = \begin{vmatrix} 2x+1 & -1 & 2 \\ 3 & 1-x & 2x \\ -1 & -1 & x+2 \end{vmatrix}$ , 求  $x^3$  与  $x^2$  的系数.

**【解】** 根据行列式的定义,含  $x^3$  的项在  $(2x+1)(1-x)(x+2)$  中,且该项带正号,故  $x^3$  的系数为  $-2$ .

含  $x^2$  的项有两个,一个是  $(2x+1)(1-x)(x+2)$ ,此项带正号,另一个是  $(2x+1)2x(-1)$ 且



前面的符号为  $(-1)^{r(132)} = -1$ , 故  $x^2$  的系数为  $1-4+4=1$ .

**【例 3】** 计算  $D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 8 & -7 & 3 & 5 \end{vmatrix}$ .

**【解】**  $D = - \begin{vmatrix} 8 & -7 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 8 & -7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -372$ .

**【例 4】** 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ .

**【解】** 把行列式的第 2, 3 两行加到第 1 行得  $D = \begin{vmatrix} a+2b & a+2b & a+2b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ ,

第 1 行提取公因子得  $D = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$ , 第 2, 3 两行分别减去第 1 行的  $b$  倍得

$$D = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+2b)(a-b)^2.$$

**【例 5】** 计算行列式  $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ .

**【解】**  $D = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{第 1 行加到第 2 行}]{\text{第 1, 3 列对调}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 2 & -9 & 5 & 7 \\ 1 & -6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 1 行的 -1 倍加到第 4 行}]{\text{第 1 行的 -2 倍加到第 3 行}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{第 2 行的 (-2) 倍加到第 3 行}]{\text{第 2, 3 两行对调}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$\xrightarrow[\text{第 3 行的 1 倍加到第 4 行}]{\text{第 2 行的 1 倍加到第 4 行}} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -9$ .