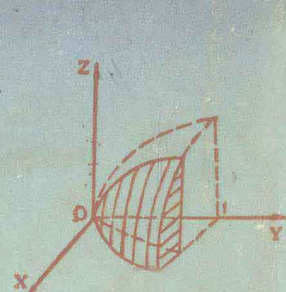
GAO DENG
SHU XUE
FANG FA
DAO LUN

高等数学方法导论

主编　黄光谷　余尚智

武汉测绘科技大学出版社



高等数学方法导论

黄光谷　余尚智　主编

武汉测绘科技大学出版社

内 容 提 要

本书是为了帮助读者解决学习“微积分”的困难而编写的。全书共分十一章，包括了高等数学与数学分析的绝大部分内容。各节按内容提要、答疑辅导、题型归类三部分编写，每章有一节综合题并附有一套自我测验题，书末附有测试题答案及提示。

本书由浅入深、书写精练，对大量的各类试题按题型与解法进行了“双向”归纳，便于自学。可供工科、理科、农林科、财经类各专业大、专学生，研究生，自学者作为学习高等数学方法的辅导书和备考、应试的指导书，也可供教师及科技工作者参考。

高 等 数 学 方 法 导 论

黄光谷　余尚智主编

*

武汉测绘科技大学出版社出版发行

武汉测绘科技大学印刷厂印刷

（武昌珞瑜路39号）

开本787×1092mm　1/32　印张15.5　字数357千字

1991年5月武汉第一版第一次印刷

ISBN　7-81030-089-X/O·10

印数 1—8 000　　定价 5.30元

前　言

高等数学与数学分析（通常简称《微积分》）是各工科、理科、农林科与财经类等院校各专业的必修课，其重要性是众所周知的，学生普遍反映微积分难学。本书就是为了指导读者解决学习微积分的困难而编写的。

全书共分十一章（详见目录），包括了高等数学与数学分析的绝大部分内容。为了配合教材、便于读者阅读，编写本书时，我们参照了国家教委批准的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》和教材的系统性。但又不完全受该系统的限制，对有些方法进行了适当的集中与归纳，以便读者全面地掌握有关方法。本书各节按内容提要、答疑辅导、题型归类三部分编写，力求叙述简明，提问确切，归类恰当。每章有一节综合题，各章后附有一套自我测验题，全书附有两套阶段考试题，书末附有测验、考试题答案及提示等。

本书收入了许多研究生入学、数学竞赛以及学科考试等试题。对于研究生入学试题，仅标注校名和年号；选编这些试题，是为了说明有关内容，不具有其它含意。我们在研究各类大量试题的基础上，对它们作了精选和双向归纳。一是对题型作了归纳；二是对同一题型的不同解法作了归纳。这样不仅使读者对微积分的主要方法有较全面和系统的了解，而且可以活跃思路，使读者灵活掌握有关方法。

为了节省篇幅、突出重点，书中对一些例题的推导过程写的比较简略。读者在阅读这些内容时，不妨补充验算一下，会大有裨益。对于还未学到的内容，初学者可以暂时跳过

这些内容往后看，回过头来再补学，体会将会更全面、更深刻。

本书内容新，观点新，针对性强，适用面广，由浅入深，便于自学。适宜各工科、理科、农林科与财经类各专业的大、专学生，研究生及“卫电”、电大、函大、职大、夜大、自修大学员阅读，也可供教师及科技工作者参考。

本书由黄光谷和余尚智主编，编委是（按姓氏笔划）：

王世敬　冯兴山　刘一勋　刘代芳　宋占奎　余尚智　范允正　周长菊　张剑英　张祖发　杨　球　杨　谦　赵德修　黄光谷　梅家斌　程孝先　曾宪武　詹前涌　穆汉林　戴定春。

编写本书得到武汉纺织工学院和纺院基础课部领导的关心和支持，在此我们对他们表示衷心的感谢。

本书第一至九章及附录Ⅱ由黄光谷终审定稿，第十、十一章由余尚智终审定稿。由于我们水平有限，加上时间仓促，书中可能有不妥之处，恳请读者多提宝贵意见，以便再版时修改。

编　者

1991年4月

目　录

第一章　函数与极限

高等数学与数学分析研究的对象是函数.

研究函数的方法是极限方法.

函数的连续性是函数的一个重要属性. 连续函数具有很多特性, 它是最常用到的函数, 是高等数学与数学分析的主要研究对象. 因此, 函数、极限与连续是高等数学中最重要、最基本的概念, 是高等数学理论的基础.

本章学习的要求是:

1. 深入理解函数概念, 了解函数的类型和性质;

2. 正确理解极限概念, 熟练掌握求(证)极限的各种方法;

3. 理解函数连续与间断的概念, 了解连续函数的性质.

§1.1　函　数

一、内容提要

1. 函数定义

定义1　用数集上的自变量与因变量间的对应关系来定义(略, 见书〔1〕P. 6或〔2〕, P. 5).

定义2(用点集与对应来定义) 设D是x轴(即一维空间R)上的一个点集, 如果对于每个点P(或x)$\in D$, 变量y按照一定的规则总有确定的值和它对应, 则称y是变量x的(一元)函数(或点P的函数), 记为$y=f(x)$, 或$x\to y$, $y=f(P)$.

函数又称为映射、映照、变换．点集D称为该函数的定义域，x称为自变量，y称为因变量，数集$\{y| y=f(x), x\in D\}$称为该函数的值域．作为点函数，很容易把函数概念推广到多元函数．

2．函数性质简述

1）有界性：$|f(x)|\leqslant M$，$\forall x\in X\subset D$；

2）单调性：$x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\underset{(>)}{<}f(x_2)$，$\forall x_1$、$x_2\in I\subset D$；

3）奇偶性：$f(-x)=\underset{(+)}{-}f(x)$，$\forall x$、$-x\in D$；

4）周期性：$f(x\pm T)=f(x)$，$\forall x$、$(x\pm T)\in D$；

5）分析性质：连续性、可微性、可积性等，见本书有关部分（此略）．

3．函数的分类（略）

4．复合函数．简述为：$y=f[\varphi(x)]$，其中f称为**外函数**，φ称为**内函数**．

5．反函数．简记为$x=f^{-1}(y)$或$y=f^{-1}(x)$，其中原来的函数$y=f(x)$叫做**直接函数**．

6．基本初等函数．是指常数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数六类函数．它们的定义、性质与图象在中学数学里已学，此略．

7．初等函数．是指由基本初等函数经过有限次的四则运算与复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数．

8．其它常见的一些函数

1）分段函数：在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子表示的函数．

2）符号函数（Signum）：

$$y=\operatorname{sgn}x\triangleq\begin{cases}1, & 当x>0,\\ 0, & 当x=0,\\ -1, & 当x<0.\end{cases}$$

（其中符号“$\triangleq$”读作“记为”．下同．）

3）取整函数：$y=[x]$，$\forall x\in R$。表示不超过 x 的最大整数，其图形是阶梯曲线。

4）幂指函数：$y=u(x)^{v(x)}$，常变形为复合指数函数 $y=exp[v(x)\ln u(x)]$ 进行研究（其中$e^f\triangleq expf$。下同）．

5）狄里赫勒（Dirichlet）函数：

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\ 为有理数时,\\ 0 & 当\ x\ 为无理数时.\end{cases}$$

6）依赖于参变量的函数：$y=f(x,t)$，一般地，x表自变量，t表参数。

7）变上限的积分定义的函数：

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt \qquad (F'(x)=f(x),\ f\in C(I)).$$

（其中$f\in C(I)$ 表示$f(x)$在区间 I 上连续，下同．）

8）用幂级数表达的函数（略．见第十章）．

9．常用绝对值等式及不等式

$|x|<\varepsilon\Longleftrightarrow-\varepsilon<x<\varepsilon$； $|x|-|y|\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$，

$|x\cdot y|=|x|\cdot|y|$； $|x^n|=|x|^n$； $|x/y|=|x|/|y|$；

$a<x<b\Longrightarrow|x|<|a|+|b|$； $||x|-|y||\leqslant|x-y|$．

二、答疑辅导

1. 确定函数的定义域有哪些方法？

答 通常有如下方法：

1）偶次根式的函数，被开方式的值非负；

2）分式函数，其分母不为零；

3）对数函数，其真数大于零，底数大于零且不等于 1；

4）反函数$y=f^{-1}(x)$ 的定义域是直接函数 $y=f(x)$ 的值域；

5）由四则运算所构成函数的定义域为各函数定义域的交集；

6）复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域是 $u=\varphi(x)$定义域的子集，此子集上函数 $u=\varphi(x)$ 的函数值，必属于$y=f(u)$ 的定义域；

7）具有实际意义的函数，其定义域是由解析式表示函数定义域的子集，此子集兼顾实际意义来确定。

2. 函数的构造法主要有哪些？

答 函数的构造法主要有：

1）拼接法（分段函数）；

2）叠加伸缩法（和、差、积、商、幂函数）；

3）重叠法（复合函数）；

4）逆表示法（反函数）；

5）由方程（或方程组）确定法（隐函数）；

6）镶嵌参数法（依赖于参变量的函数）；

7）增量之比极限法（导函数）；

8）导数之逆运算法（原函数）；

9）积分表示法（变上限积分函数）；

10）无穷级数表示法（和函数）；

11）求解微分方程法（解函数）。

三、题型归类

1．求函数的定义域与值域

例 1 求$y=\sqrt{\cos x}+\ln\sin x$的定义域。

解 $\begin{cases}\cos x\geq 0,\\ \sin x>0\end{cases}\Longrightarrow\begin{cases}2k\pi-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\dfrac{\pi}{2},\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi\end{cases}\quad(k\in J),$

即 $\qquad 2k\pi<x\leqslant 2k\pi+\pi/2,$

故所求定义域为$\left(2k\pi,\ 2k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]\quad(k\in J)$。

例2 求 $y=(3x^2+6x+4)/(x^2+2x+3)$的值域。

解 $\dfrac{3x^2+6x+4}{x^2+2x+3}=\dfrac{3(x^2+2x+3)-5}{x^2+2x+3}$

$$=3-\frac{5}{(x+1)^2+2},$$

$\because\quad (x+1)^2\geq 0\Longrightarrow 0<\dfrac{5}{(x+1)^2+2}\leqslant\dfrac{5}{2}\Longrightarrow$

$$3-\frac{5}{2}\leqslant 3-\frac{5}{(x+1)^2+2}<3,$$

故函数的值域为$[\frac{1}{2},\ 3)$。

2．求函数的表达式

要正确理解函数 $f(x)$ 的符号f，建立函数关系。

例3 设 $f(\sin\frac{x}{2}) = \cos x + 1$，求 $f(x)$。

解一 （变元法）把 $\cos x + 1$ 变成 $\sin(x/2)$的函数。

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right) = \cos x + 1 = 1 - 2\sin^2\frac{x}{2} + 1 = 2 - 2\sin^2\frac{x}{2},$$

$$\therefore \qquad f(x) = 2 - 2x^2.$$

解二 （变量代换法） 令$u = \sin\frac{x}{2}$，则$x = 2\arcsin u$。

$$f\left(\sin\frac{x}{2}\right) = f(u) = \cos(2\arcsin u) + 1 = 2 - 2u^2,$$

$$\therefore \qquad f(x) = 2 - 2x^2.$$

例 4 填空：设函数 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1, \end{cases}$

则
$$f[f(x)] = \begin{cases} f(1), & |x| \leqslant 1, \\ f(0), & |x| > 1 \end{cases}$$
$$= 1。$$ （1990年全国硕士生入学试题）

例 5 设 $f(x) = \frac{x}{x-1}$，试验证 $f\{f[f(f(x))]\} = x$，

并求 $f(1/f(x))$ $(x \neq 0,\ x \neq 1)$。（华中工学院1981年）①

证 1）$f(x) = \frac{1}{1 - 1/x}$，$1/f(x) = 1 - \frac{1}{x}$，

$$\therefore \qquad f[f(x)] = \frac{1}{1 - 1/f(x)} = \frac{1}{1 - (1 - 1/x)} = x,$$

注① 系指华中工学院1981年硕士研究生入学试题，以下类同，不一一注明。

$$f[f(f(x))]=f(x),$$

故 $$f\{f[f(f(x))]\}=\frac{1}{1-1/f(x)}=x.$$

2） $$f(1/f(x))=f\left(1-\frac{1}{x}\right)=\frac{1-1/x}{(1-1/x)-1}=1-x.$$

例 6 如图1.1，试将等腰梯形$ABCD$中的面积S表成$x(0\leqslant x\leqslant a)$的函数。

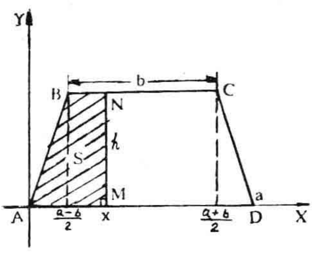
解 如图建立坐标系，则

$$S=\begin{cases}\dfrac{hx^2}{a-b}, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{a-b}{2},\\[2ex] h\left(x-\dfrac{a-b}{4}\right), & \dfrac{a-b}{2}<x<\dfrac{a+b}{2},\\[2ex] h\left(\dfrac{a+b}{2}-\dfrac{(a-x)^2}{a-b}\right), & \dfrac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant a.\end{cases}$$

3. 函数性质的判定

例 7 **证明：** 1）两个（或若干个）增函数之和还是增函数（或减函数之和还是减函数）；

2）若$y=f(x)$是增函数，$x=\varphi(t)$是增函数，则$f[\varphi(t)]$亦是t的增函数.



(图1.1)

证 1）设$f_1(x),f_2(x)$是同时递增（减）的，记

$F(x)=f_1(x)+f_2(x)$，令$x_1<x_2$，则

$$F(x_2)-F(x_1)=[f_1(x_2)-f_1(x_1)]+[f_2(x_2)-f_2(x_1)]$$
$$\geq 0\ (\leqslant 0),$$

这表明和函数 $F(x)$ 与 $f_i(x)$ $(i=1,\ 2)$ 同时递增（减）．同理，可推广至若干个函数之和的情形．

2）因为 $f(x)$，$\varphi(t)$都是增函数，故当 $t_1<t_2$ 时，有 $\varphi(t_1)\leqslant\varphi(t_2)$，$f[\varphi(t_1)]\leqslant f[\varphi(t_2)]$，得证．

注：可类似地证得下表中复合函数的单调性．

函数	$f(x)$	$\varphi(t)$	$f[\varphi(x)]$
单调性	增	增	增
	增	减	减
	减	增	减
	减	减	增

例 8 若 $\varphi(x)$，$\psi(x)$，$f(x)$在它们的公共定义域 X 上都是单调增的，且$\varphi(x)$、$\psi(x)$、$f(x)\in X$，$\varphi(x)\leqslant\psi(x)\leqslant f(x)$，试证：$\varphi[\varphi(x)]\leqslant\psi[\psi(x)]\leqslant f[f(x)]$．

证 对$\forall x_1\in X$，有$\varphi(x_1)\leqslant\psi(x_1)\leqslant f(x_1)$．

$\because\ \varphi[\varphi(x_1)]\leqslant\varphi[\psi(x_1)]\leqslant\psi[\psi(x_1)]\leqslant\psi[f(x_1)]\leqslant f[f(x_1)]$，

$\therefore\qquad \varphi[\varphi(x_1)]\leqslant\psi[\psi(x_1)]\leqslant f[f(x_1)]$．

由 x_1 的任意性，命题真．

例 9 证明任何非零的偶函数与奇函数之和既不是偶函数也不是奇函数．进而证明任何各次项系数均不为零的 n 次