高等院校计算机教材

图论及其应用

张清华 主编
陈六新 李永红 副主编

清华大学出版社

图论及其应用

张清华 主编
陈六新 李永红 副主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是根据作者多年从事图论教学的经验，综合国内外同类优秀教材的优势，并结合学科最新发展状况编写而成。本书较为系统地介绍了图论课程中的基本知识，注重理论与实践结合，突出算法思想，适合于工科教学需要。

全书分 6 章，第 1 章介绍图论的主要预备知识，第 2 章介绍图的基本概念，第 3 章介绍树与最短路径，第 4 章介绍网络流与 Petri 网，第 5 章介绍独立集与匹配，第 6 章介绍平面图与着色。各章之后配有适当难度的习题，便于学生课后练习。本书可以作为高等院校硕士研究生或高年级本科生的教材，也可以作为研究人员的参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

图论及其应用/张清华主编. --北京：清华大学出版社，2013
ISBN 978-7-302-32997-8

Ⅰ. ①图…　Ⅱ. ①张…　Ⅲ. ①图论－应用－教材　Ⅳ. ①O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 147754 号

责任编辑： 陈　明
封面设计： 常雪影
责任校对： 刘玉霞
责任印制： 王静怡

出版发行： 清华大学出版社
网　　址： http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址： 北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编：** 100084
社 总 机： 010-62770175　　**邮　　购：** 010-62786544
投稿与读者服务： 010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈： 010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者： 北京密云胶印厂
经　　销： 全国新华书店
开　　本： 185mm×230mm　**印　张：** 12　　**字　　数：** 259 千字
版　　次： 2013 年 8 月第 1 版　　**印　　次：** 2013 年 8 月第 1 次印刷
印　　数： 1～3000
定　　价： 23.00 元

产品编号：052529-01

前　言

图论(Graph Theory)是数学的一个分支,它以图为研究对象。图论中的图是由若干给定的点及连接两点的线所构成的图形,这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系,用点代表事物,用连接两点的线表示相应两个事物间具有这种关系。图论与数学的其他分支不同,不像群论、拓扑学等学科有一套相对完整的理论体系和解决问题的系统方法,图论所涉及的问题比较广泛,解决问题的方法也多种多样,常常是一种问题一种解法,而这些方法之间又缺乏必然联系。许多数学分支是由计算、运动、测量问题引起的,但促使图论产生和发展的却是一些数学游戏问题。

图论起源很早,远在 18 世纪就出现了图论问题,如著名的哥尼斯堡七桥问题就是当时很有名的图论问题。1736 年,欧拉发表了图论的首篇论文,他将哥尼斯堡七桥问题转化为图论问题,即把每块陆地用一点代替,将每座桥用连接相应两个点的一条线代替,从而得到一个点线图。欧拉证明了哥尼斯堡七桥问题无解,并且进一步推广了这个问题。在 19 世纪和 20 世纪的前半期,图论主要研究一些游戏问题,诸如迷宫问题、博弈问题和棋盘上马的行走路线等。1847 年,基尔霍夫应用图论的方法来分析电网络,奠定了现代网络理论的基础,这就是电工原理中的基尔霍夫电流定律和基尔霍夫电压定律,这是第一次将图论应用于工程技术领域。1857 年,凯莱在试算饱和碳化氢的同分异性体时,提出了树的概念。默比乌斯约于 1840 年提出了"四色猜想",指出至多用四种不同颜色给平面或球面上的地图着色,就可以使互相接壤的国家由不同的颜色来区分。哈密顿于 1859 年提出了周游世界问题。此后的近半个世纪研究图论的人不多,直到 1936 年哥尼格出版了第一本图论专著《有限与无限图理论》,总结了图论 200 多年的研究成果,是图论发展史上的一座里程碑,并标志着图论成为一门独立的数学分支。近年来,计算机科学与技术正在以惊人的速度发展,对人类社会的各个领域产生着日益广泛和深入的影响,图论对于计算机科学与技术的快速发展也起到了积极的作用。在信息科学与网络技术迅猛发展的时期,图论强有力的逻辑、漂亮的图形和深奥的数学技巧,越来越多地得到科研人员和教师的青睐。

本书是编者在十余年图论教学经验的基础上,参考了国内众多教材并借鉴国外教材的特点,结合多年的教学和科研成果编写而成的。在详细完备地介绍图论基础知识的前提下,全书结合历史上的经典问题和实际问题,简明扼要、通俗易懂地介绍相关内容,注重理论联系实际,融入启发式教学理念,着重培养学生的创新能力和自学能力,也使其今后在计算机有关学科的学习和研究时,可以以图论的基本知识作为工具。

本书具有以下特点:

- 内容深入浅出,结构安排合理,知识点脉络清晰,讲解通俗易懂。

- 增加了部分图论课程需要的预备知识如等价关系、函数等，易于学生入门。
- 基础理论与相关实际问题相结合，变抽象思维为形象思维，易于学生理解。
- 重点突出命题的证明思路，注重培养学生的数学思维能力和分析、解决问题的能力。
- 对经典算法加以解释，突出算法思想和流程图，便于学生理解和思考。
- 内容突出重点，便于学生在实际中应用。
- 注重理论分析的同时，也注重例子的补充讲解，便于学生自学。
- 每章配备适当的习题，便于学生巩固知识点。

全书共分为6章，其中第1章、第2章、第3章、第5章由张清华编写，第4章由李永红编写，第6章由陈六新编写。本书的出版得到重庆邮电大学研究生教育创新计划重点项目、重庆市研究生教育优质课程建设项目、重庆市研究生教育教学改革研究项目(No. yjg123103)等项目的资助，并获得重庆邮电大学信息与计算科学专业提升计划和数理学院教改项目的资助。全书的内容修改和出版还得到周平、李春、黄智宇、蒲兴成、刘勇等老师和沈文、王进、郭永龙、张冠升等研究生同学的支持和帮助。感谢所有为本书出版作出积极贡献和支持的同志们！

虽然本书主要内容在重庆邮电大学曾多次讲授，但由于水平所限，加之时间仓促，书中难免有不妥或错误之处，恳请广大读者批评指正。

作　者

2012年12月于重庆

目　录

第 1 章　图论预备知识

本章主要介绍图论中要用到的一些离散数学中的知识，作为铺垫，读者可以根据自己的情况选学。

1.1　集合的基本概念与运算

集合是数学中的一个最基本的概念。所谓集合，就是指具有共同性质的或适合一定条件的事物的全体，组成集合的这些个体称为元素。

集合常用大写字母表示，集合的元素常用小写字母表示。若 A 是集合，a 是 A 的元素，则称 a 属于 A，记作 $a\in A$；若 a 不是 A 的元素，则称 a 不属于 A，记作 $a\notin A$。若组成集合的元素个数是有限的，则称该集合为有限集，否则称为无限集。

常见集合专用字符的约定：$\mathbf{N}$ 表示自然数集合，$\mathbf{Z}$ 表示整数集合，$\mathbf{Q}$ 表示有理数集合，$\mathbf{R}$ 表示实数集合，$\mathbf{C}$ 表示复数集合。

以下是一些常用的表示集合间关系的符号：

$\subseteq$表示集合与集合的包含关系，如 $A\subseteq B$（等价于 $\forall x\in A\Rightarrow \forall x\in B$），读作 A 包含于 B，表示 A 是 B 的子集。

$\supseteq$表示与上述相反的含义。

$=$表示两个集合相等，如 $A=B$（等价于 $A\subseteq B\wedge B\subseteq A$），读作 A 等于 B。

$\subset$设 A,B 为集合，$A\subseteq B$，但 $A\neq B$，则 $A\subset B$，读作 A 真包含于 B，表示 A 是 B 的真子集。

$\supset$表示与上述相反的含义。

注：(1) $\notin$，$\nsubseteq$，$\neq$，$\not\subset$分别读作“不属于”，“不包含于”，“不等于”，“不真包含于”，表示与上述对应符号相反的意思；

(2) 不含任何元素的集合称作空集，用$\varnothing$表示，空集是一切集合的子集。

定义 1.1.1　对于每一个集合 A，由 A 的所有子集组成的集合，称为集合 A 的幂集，记为 $P(A)$，即 $P(A)=\{X\mid X\subseteq A\}$。

例如，设 $A=\{1,2,3\}$，则 $P(A)=\{\varnothing,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。

定理 1.1.1　如果有限集 A 有 n 个元素，则其幂集 $P(A)$ 有 2^n 个元素。

证明　A 的一元子集个数为 C_n^1，二元子集个数为 C_n^2，……，k 元子集个数为 C_n^k。因

$\varnothing \subseteq A$，故 $P(A)$ 的元素个数为 $1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k=2^n$。

定义 1.1.2 设 A,B 为集合，构造下列运算：

A 与 B 的并 $A\cup B=\{x \mid x\in A \vee x\in B\}$；

A 与 B 的交 $A\cap B=\{x \mid x\in A \wedge x\in B\}$；

A 与 B 的差 $A-B=\{x \mid x\in A \wedge x\notin B\}$；

A 与 B 的对称差 $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$。

说明 两个集合交或并可以推广成 n 个集合、无穷多个集合的交或并，即

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots = \{x \mid x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n \vee \cdots\}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \{x \mid x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n \wedge \cdots\}$$

以上集合可以简单记作 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$，$\bigcap_{i=1}^{n} A_i$，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$，$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$。

定义 1.1.3 设 E 为全集，$A\subseteq E$，则称 $\overline{A}$ 为 A 的补集，其中

$$\overline{A} = \{x \mid x \in E \wedge x \notin A\} \quad \text{或} \quad \overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$$

由对称差的定义容易推得如下性质：

(1) $A\oplus B=B\oplus A$；

(2) $A\oplus\varnothing=A$；

(3) $A\oplus A=\varnothing$；

(4) $A\oplus B=(A-B)\cup(B-A)$；

(5) $(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$。

定义 1.1.4 设 S 为非空集合，S 的元素的元素构成的集合称为 S 的广义并，记为 $\bigcup S$，即 $\bigcup S=\{x \mid \exists z(z\in S \wedge x\in z)\}$。

定义 1.1.5 设 S 为非空集合，S 的元素的公共元素构成的集合称为 S 的广义交，记为 $\bigcap S$，即 $\bigcap S=\{x \mid \forall z(z\in S \rightarrow x\in z)\}$。

说明 (1) 规定 $\bigcup\varnothing=\varnothing$，$\bigcap\varnothing$ 无意义；

(2) 若 $S=\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$，则由定义不难证明

$$\bigcup S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_n, \quad \bigcap S = S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n$$

1.2 二元关系的基本概念和性质

当康托的集合论在数学中占有重要地位以后，函数的定义得以通过集合概念进一步具体化。在上节集合知识的基础上，本节主要讨论了可以以集合形式表示的二元关系，并借助

矩阵和图两个重要工具，对关系的运算、性质、闭包以及两种重要的二元关系——等价关系和偏序关系作简单介绍；进一步，在二元关系的基础上建立函数概念，并讨论了函数的复合及逆运算。

定义 1.2.1(笛卡儿积)　设 A,B 为集合，以 A 中元素为第一元素，B 中元素为第二元素构成有序对，所有这样的有序对组成的集合称为 A 与 B 的笛卡儿积，记作 $A\times B$。笛卡儿积的符号化表示为 $A\times B=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in B\}$。

例如，$A=\{a,b\}$，$B=\{0,1,2\}$，则

$$A\times B=\{\langle a,0\rangle,\langle a,1\rangle,\langle a,2\rangle,\langle b,0\rangle,\langle b,1\rangle,\langle b,2\rangle\}$$

$$B\times A=\{\langle 0,a\rangle,\langle 0,b\rangle,\langle 1,a\rangle,\langle 1,b\rangle,\langle 2,a\rangle,\langle 2,b\rangle\}$$

说明　(1) A 与 B 的笛卡儿积的元素要考虑顺序，$\langle x,y\rangle$ 为有序对，通常称为序偶，即只有当 $x=y$ 时才有 $\langle x,y\rangle=\langle y,x\rangle$ 成立。

(2) 笛卡儿积具有如下性质：

① 对任意集合 A，有 $A\times\varnothing=\varnothing$，$\varnothing\times A=\varnothing$；

② 一般地，笛卡儿积运算不满足交换律，即 $A\times B\neq B\times A$；

③ 笛卡儿积运算不满足结合律，即 $(A\times B)\times C\neq A\times(B\times C)$；

④ 笛卡儿积运算对并和交运算满足分配律，即

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$

$$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$$

$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

$$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$$

证明　只证(2)中①，其余留给读者自己证明。对任意的 $\langle x,y\rangle$，有

$$\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle\in A\times(B\cup C)\\
\Leftrightarrow\ &x\in A\wedge y\in(B\cup C)\\
\Leftrightarrow\ &x\in A\wedge(y\in B\vee y\in C)\\
\Leftrightarrow\ &(x\in A\wedge y\in B)\vee(x\in A\wedge y\in C)\\
\Leftrightarrow\ &\langle x,y\rangle\in A\times B\vee\langle x,y\rangle\in A\times C\\
\Leftrightarrow\ &\langle x,y\rangle\in A\times B\cup A\times C
\end{aligned}$$

例 1.2.1　已知集合 $A=\{0,1\}$，求 $A\times P(A)$。

解　$A\times P(A)=\{\langle 0,\varnothing\rangle,\langle 0,\{0\}\rangle,\langle 0,\{1\}\rangle,\langle 0,\{0,1\}\rangle,\langle 1,\varnothing\rangle,\langle 1,\{0\}\rangle,\langle 1,\{1\}\rangle,\langle 1,\{0,1\}\rangle\}$。

如果 A 中有 m 个元素，B 中有 n 个元素，则 $A\times B$ 和 $B\times A$ 中都有 mn 个元素。若 $\langle x,y\rangle\in A\times B$，则有 $x\in A$ 且 $y\in B$。若 $\langle x,y\rangle\notin A\times B$，则有 $x\notin A$ 或者 $y\notin B$。

例 1.2.2　设 $A=\{1,2,3,4\}$，表示出下述 A 上元素之间的关系：

(1) y 整除 x；(2) $x\leqslant y$；(3) $x/y\in A$。

解 (1) $\{\langle x,y\rangle \mid y$ 整除 $x\}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$;

(2) $\{\langle x,y\rangle \mid x\leqslant y\}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,4\rangle\}$;

(3) $\{\langle x,y\rangle \mid x/y\in A\}=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 4,4\rangle\}$。

一般地,我们可以考虑集合 A,B 间元素的某种关系,类似于集合 A 上的关系,也可以以集合的形式表示,而且这些集合都是 $A\times B$ 的子集。

定义 1.2.2 设 A,B 为集合,$A\times B$ 的任何子集所定义的二元关系称作从 A 到 B 的二元关系,特别当 $A=B$ 时,称作 A 上的二元关系。

一般把关系记作 R,若 $\langle x,y\rangle\in R$,可记作 xRy,若 $\langle x,y\rangle\notin R$,则记作 $x\not R y$。

若 $|A|=n$,则 $|A\times A|=n^2$,那么 A 上共有 2^{n^2} 个不同的二元关系。

对于任何集合 A 都有 3 种特殊的关系,其中之一就是空集 $\varnothing$,称作空关系;另外两种就是全域关系 E_A 和恒等关系 I_A。这里

$$E_A=\{\langle x,y\rangle \mid x\in A\wedge y\in A\}=A\times A,\quad I_A=\{\langle x,x\rangle \mid x\in A\}$$

例如,$A=\{0,1,2\}$,则

$$E_A=\{\langle 0,0\rangle,\langle 0,1\rangle,\langle 0,2\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

$$I_A=\{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$$

关系除了以集合的形式表示外,还可以以关系矩阵和关系图来表示。

表示方法一(集合表示)

由于关系也是一种特殊的集合,所以集合的两种基本的表示法也可以用到关系的表示中,即可用列举法和描述法来表示关系。例如

$$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 3,1\rangle,\langle 4,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 4,4\rangle\}$$

$$R=\{\langle x,y\rangle \mid x \text{ 是 } y \text{ 的倍数}\}$$

表示方法二(矩阵表示)

给定集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,集合 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$,设 R 为从 A 到 B 的一个二元关系,构造一个 $n\times m$ 矩阵,用来表示关系 R。

用集合 A 的元素标注矩阵的行,用集合 B 的元素标注矩阵的列,对于 $a_i\in A,b_j\in B$,若 $\langle a_i,b_j\rangle\in R$,则在 i 行和 j 列交叉处的元素 m_{ij} 标 1,否则标 0。这样得到的矩阵称为 R 的关系矩阵,记做 $\boldsymbol{M}_R$,即 $\boldsymbol{M}_R=(m_{ij})_{n\times m}$,其中

$$m_{ij}=\begin{cases}1, & \langle a_i,b_j\rangle\in R\\ 0, & \langle a_i,b_j\rangle\notin R\end{cases}$$

当 R 为集合 A 上的二元关系时,$\boldsymbol{M}_R$ 为方阵。

表示方法三(关系图表示)

有限集的二元关系还可以用关系图来表示,设集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$,集合 $B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m\}$,R 为从 A 到 B 的一个二元关系,可以采用如下方法表示关系 R:

(1) 先在平面上作出 n 个点，分别代表 $a_1,a_2,\cdots,a_n$；又在平面上作出 m 个点，分别代表元素 $b_1,b_2,\cdots,b_m$。

(2) 如果 $a_i\in A,b_j\in B$ 且 $\langle a_i,b_j\rangle\in R$，则自结点 a_i 到结点 b_j 作出一条有向弧，其箭头指向 b_j。如果 $\langle a_i,b_j\rangle\notin R$，则结点 a_i 和结点 b_j 之间没有有向线段联结。

若 R 是集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 上的二元关系，则在平面上作出 n 个点，分别代表 $a_1,a_2,\cdots,a_n$。如果 $\langle a_i,a_j\rangle\in R$，则自结点 a_i 到结点 a_j 作出一条有向弧，其箭头指向 a_j。如果 $\langle a_i,a_j\rangle\notin R$，则结点 a_i 与 a_j 之间没有有向线段联结。

用这种方法得到的图称为 R 的关系图，记作 G_R。

对于集合 A 上的关系 R，G_R 可以仅以 A 的元素为结点作图，具体作法如例 1.2.3 和例 1.2.4 所示。

例 1.2.3 设集合 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{a,b,c\}$，R 是 A 到 B 上的关系，$R=\{\langle 1,a\rangle,\langle 2,b\rangle,\langle 3,a\rangle\}$，试以关系矩阵和关系图来表示关系 R。

解 (1) 关系矩阵为

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(2) 关系图如图 1.2.1 所示。

例 1.2.4 设集合 $A=\{a,b,c,d\}$，R 是 A 上的关系 $R=\{\langle a,a\rangle,\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,c\rangle,\langle d,c\rangle,\langle d,d\rangle\}$，试以关系矩阵和关系图来表示关系 R。

解 (1) 关系矩阵为

$$\boldsymbol{G}_R=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

(2) 关系图如图 1.2.2 所示。

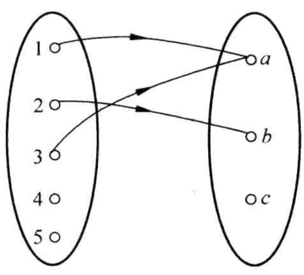

图 1.2.1

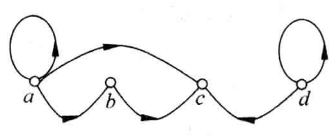

图 1.2.2

定义 1.2.3 设 R 是二元关系，

(1) R 中所有有序对的第一个元素构成的集合称为 R 的定义域，记作 $\mathrm{dom}(R)$，$\mathrm{dom}(R)=\{x\mid \exists y(\langle x,y\rangle\in R)\}$；

(2) R 中所有有序对的第二个元素构成的集合称为 R 的值域，记作 $\mathrm{ran}(R)$，$\mathrm{ran}(R)=\{y\mid \exists x(\langle x,y\rangle\in R)\}$；

(3) R 的定义域和值域的并集称为 R 的域，记作 $\mathrm{fld}(R)$，$\mathrm{fld}(R)=\mathrm{dom}(R)\cup\mathrm{ran}(R)$。

例 1.2.5 下列关系都是整数集 $\mathbf{Z}$ 上的关系，分别求出它们的定义域和值域。

(1) $R_1=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in\mathbf{Z}\wedge x\leqslant y\}$；

(2) $R_2=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in\mathbf{Z}\wedge x^2+y^2=1\}$；

(3) $R_3=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in\mathbf{Z}\wedge y=2x\}$；

(4) $R_4=\{\langle x,y\rangle\mid x,y\in\mathbf{Z}\wedge |x|=|y|=3\}$。

解 (1) $\mathrm{dom}(R_1)=\mathrm{ran}(R_1)=\mathbf{Z}$；

(2) $R_2=\{\langle 0,1\rangle,\langle 0,-1\rangle,\langle 1,0\rangle,\langle -1,0\rangle\}$，$\mathrm{dom}(R_2)=\mathrm{ran}(R_2)=\{0,1,-1\}$；

(3) $\mathrm{dom}(R_3)=\mathbf{Z}$，$\mathrm{ran}(R_3)=\{2z\mid z\in\mathbf{Z}\}$，即偶数集；

(4) $\mathrm{dom}(R_4)=\mathrm{ran}(R_4)=\{-3,3\}$。

定义 1.2.4 设 R 为二元关系，A 是集合，

(1) R 在 A 上的限制，记作 $R\upharpoonright A$，其中 $R\upharpoonright A=\{\langle x,y\rangle\mid xRy\wedge x\in A\}$；

(2) A 在 R 下的像，记作 $R[A]$，其中 $R[A]=\mathrm{ran}(R\upharpoonright A)$。

从定义容易得出 $R\upharpoonright A\subseteq R$，$R[A]\subseteq\mathrm{ran}(R)$。

例 1.2.6 设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，R 是 A 上的关系，$R=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 3,2\rangle,\langle 3,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$，集合 $B=\{1,2,4\}$，试求 $R\upharpoonright B$ 及 $R[B]$。

解 $R\upharpoonright B=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,3\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,1\rangle\}$；$R[B]=\{1,3,4\}$。

定义 1.2.5 设 R 为二元关系，称 $R^{-1}=\{\langle x,y\rangle\mid\langle y,x\rangle\in R\}$ 为 R 的逆关系。

逆关系具有如下基本性质。

定理 1.2.1 设 F 是任意关系，则

(1) $(F^{-1})^{-1}=F$；

(2) $\mathrm{dom}(F^{-1})=\mathrm{ran}(F)$，$\mathrm{ran}(F^{-1})=\mathrm{dom}(F)$。

证明 (1) 对任意的 $\langle x,y\rangle$，有

$$\langle x,y\rangle\in(F^{-1})^{-1}\Leftrightarrow\langle y,x\rangle\in F^{-1}\Leftrightarrow\langle x,y\rangle\in F$$

(2) 对任意的 y，有

$$y\in\mathrm{dom}(F^{-1})\Leftrightarrow\exists x(\langle y,x\rangle\in F^{-1})\Leftrightarrow\exists x(\langle x,y\rangle\in F)\Leftrightarrow y\in\mathrm{ran}(F)$$

对任意的 x，有

$$x \in \mathrm{ran}(F^{-1}) \Leftrightarrow \exists y(\langle y,x\rangle \in F^{-1}) \Leftrightarrow \exists y(\langle x,y\rangle \in F) \Leftrightarrow x \in \mathrm{dom}(F)$$

定义 1.2.6 设 F,G 为二元关系，G 对 F 的右复合记作 $F\circ G$，即

$$F \circ G = \{\langle x,y\rangle \mid \exists t(\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in G)\}$$

例 1.2.7 设 $F=\{\langle 3,3\rangle,\langle 6,2\rangle\}$，$G=\{\langle 2,3\rangle\}$，求 $F\circ F$，$G\circ G$，$F\circ G$ 和 $G\circ F$。

解 $F\circ F=\{\langle 3,3\rangle\}$，$G\circ G=\varnothing$，$F\circ G=\{\langle 6,3\rangle\}$，$G\circ F=\{\langle 2,3\rangle\}$

定理 1.2.2 设 F,G,H 是任意的关系，则

(1) $(F\circ G)\circ H=F\circ(G\circ H)$；

(2) $(F\circ G)^{-1}=G^{-1}\circ F^{-1}$。

证明 (1) 对任意的 $\langle x,y\rangle$，有

$$\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle \in (F\circ G)\circ H \\
&\quad\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in F\circ G \wedge \langle t,y\rangle \in H) \\
&\quad\Leftrightarrow \exists t(\exists s(\langle x,s\rangle \in F \wedge \langle s,t\rangle \in G) \wedge \langle t,y\rangle \in H) \\
&\quad\Leftrightarrow \exists t \exists s((\langle x,s\rangle \in F \wedge \langle s,t\rangle \in G) \wedge \langle t,y\rangle \in H) \\
&\quad\Leftrightarrow \exists t \exists s(\langle x,s\rangle \in F \wedge (\langle s,t\rangle \in G \wedge \langle t,y\rangle \in H)) \\
&\quad\Leftrightarrow \exists s(\langle x,s\rangle \in F \wedge \exists t(\langle s,t\rangle \in G \wedge \langle t,y\rangle \in H)) \\
&\quad\Leftrightarrow \exists s(\langle x,s\rangle \in F \wedge \langle s,y\rangle \in G\circ H) \\
&\quad\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F\circ(G\circ H)
\end{aligned}$$

(2) 对任意的 $\langle x,y\rangle$，有

$$\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle \in (F\circ G)^{-1} \\
&\quad\Leftrightarrow \langle y,x\rangle \in (F\circ G) \\
&\quad\Leftrightarrow \exists t(\langle y,t\rangle \in F \wedge \langle t,x\rangle \in G) \\
&\quad\Leftrightarrow \exists t(\langle t,y\rangle \in F^{-1} \wedge \langle x,t\rangle \in G^{-1}) \\
&\quad\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in G^{-1}\circ F^{-1}
\end{aligned}$$

定理 1.2.3 设 R 是 A 上的关系，则 $R\circ I_A=I_A\circ R=R$。

证明 只证明 $R\circ I_A=R$，$I_A\circ R=R$ 留给读者自己完成。对任意的 $\langle x,y\rangle$，有

$$\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle \in R\circ I_A \\
&\quad\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in R \wedge \langle t,y\rangle \in I_A) \\
&\quad\Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in R \wedge t=y) \\
&\quad\Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in R
\end{aligned}$$

定理 1.2.4 设 F,G,H 是任意的关系，则

(1) $F\circ(G\cup H)=F\circ G\cup F\circ H$；

(2) $(G \cup H) \circ F = G \circ F \cup H \circ F$;

(3) $F \circ (G \cap H) \subseteq F \circ G \cap F \circ H$;

(4) $(G \cap H) \circ F \subseteq G \circ F \cap H \circ F$。

证明 这里证明(1)和(3),其余留给读者自己证明。

(1) 对任意的$\langle x,y \rangle$,有

$$\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle \in F \circ (G \cup H) \\
&\quad \Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in G \cup H) \\
&\quad \Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in F \wedge (\langle t,y\rangle \in G \vee \langle t,y\rangle \in H)) \\
&\quad \Leftrightarrow \exists t((\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in G) \vee (\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in H)) \\
&\quad \Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in G) \vee \exists t(\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in H) \\
&\quad \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F \circ G \vee \langle x,y\rangle \in F \circ H \\
&\quad \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F \circ G \cup F \circ H
\end{aligned}$$

(3) 对任意的$\langle x,y \rangle$,有

$$\begin{aligned}
&\langle x,y\rangle \in F \circ (G \cap H) \\
&\quad \Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in G \cap H) \\
&\quad \Leftrightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in F \wedge (\langle t,y\rangle \in G \wedge \langle t,y\rangle \in H)) \\
&\quad \Leftrightarrow \exists t((\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in G) \wedge (\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in H)) \\
&\quad \Rightarrow \exists t(\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in G) \wedge \exists t(\langle x,t\rangle \in F \wedge \langle t,y\rangle \in H) \\
&\quad \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F \circ G \wedge \langle x,y\rangle \in F \circ H \\
&\quad \Leftrightarrow \langle x,y\rangle \in F \circ G \cap F \circ H
\end{aligned}$$

定义 1.2.7 设 R 为 A 上的关系,n 为自然数,则 R 的 n 次幂定义为

(1) $R^0 = \{\langle x,x\rangle \mid x \in A\} = I_A$;

(2) $R^{n+1} = R^n \circ R$ 。

关系矩阵法 给出 R 的矩阵形式 $\boldsymbol{M}$,其中的元素由 0 和 1 表示,在其元素之间建立以下逻辑加法运算:

$$1+1=1,\quad 1+0=1,\quad 0+1=1,\quad 0+0=0$$

如果 R 的矩阵形式为 $\boldsymbol{M}$,则 R^n 的矩阵形式为 $\boldsymbol{M}^n$,即 n 个矩阵的 $\boldsymbol{M}$ 之积,这里的乘法与普通矩阵乘法规则一致,只是其中的元素之和采用以上的逻辑加法。关系矩阵法是求复合运算较为有效的方法。

例 1.2.8 已知集合 $A=\{a,b,c,d\}$,A 上的关系 $R=\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,d\rangle\}$,求 R^2,R^3。

解 关系 R 矩阵为

$$M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

则

$$M^2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

$$M^3=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

另外，R 的关系图如图 1.2.3 所示。

R^2 的关系图如图 1.2.4 所示。

R^3 的关系图如图 1.2.5 所示。

图 1.2.3

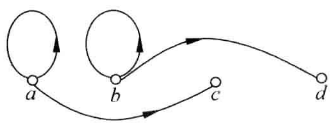

图 1.2.4

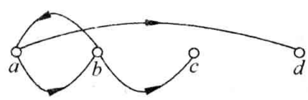

图 1.2.5

关于幂运算的性质，我们给出如下定理。

定理 1.2.5 设 A 为 n 元集，R 为 A 上的二元关系，则存在自然数 s 和 t，使得 $R^s=R^t$。

证明 因为 A 为 n 元集，所以集合 A 上不同的关系是有限的，即 $N=2^{n^2}$ 个，而关系序列 $R^0,R^1,R^2,\cdots,R^N,R^{N+1},\cdots$ 给出无限多个关系形式，故必然存在自然数 s 和 t，使得 $R^s=R^t$。

定理 1.2.6 设 R 为 A 上的二元关系，$m,n\in\mathbf{N}$，则

(1) $R^m\circ R^n=R^{m+n}$；

(2) $(R^m)^n=R^{mn}$。

证明 (1) 对任意 $m\in\mathbf{N}$，对 n 采用数学归纳法证明。

① 当 $n=0$ 时，$R^m\circ R^0=R^m\circ I_A=R^m$，故成立。

② 若 $n=k$ 时，$R^m\circ R^k=R^{m+k}$ 成立，则 $n=k+1$ 时，有 $R^m\circ R^{k+1}=(R^m\circ R^k)\circ R^1=R^{m+k}\circ R^1=R^{m+k+1}$，故成立。

综合①，②，则对任意 $m,n\in\mathbf{N}$，有 $R^m\circ R^n=R^{m+n}$ 成立。

(2) 证明类似(1)。

定理 1.2.7　设 R 为 A 上的二元关系，若存在自然数 $s,t(s<t)$，使得 $R^s=R^t$，则

(1) 对任何 $k\in\mathbf{N}$，有 $R^{s+k}=R^{t+k}$；

(2) 对任何 $k,i\in\mathbf{N}$，有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中 $p=t-s$；

(3) 令 $S=\{R^0,R^1,\cdots,R^{t-1}\}$，则对于任意的 $q\in\mathbf{N}$，有 $R^q\in S$。

证明　(1) 对任何 $k\in\mathbf{N}$，$R^{s+k}=R^s\circ R^k=R^t\circ R^k=R^{t+k}$。

(2) 对 k 采用数学归纳法证明。

① 当 $k=0$ 时，结论显然成立。

② 若 $k=n$ 时，对任何 $i\in\mathbf{N}$，有 $R^{s+np+i}=R^{s+i}$ 成立。那么 $k=n+1$ 时，$R^{s+(n+1)p+i}=R^{s+np+i}\circ R^p=R^{s+i}\circ R^p=R^{s+p+i}=R^{s+t-s+i}=R^{t+i}=R^{s+i}$，故成立。

综合①，②，则对任意的 $k,i\in\mathbf{N}$，有 $R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，其中 $p=t-s$。

(3) ① 当 $q<t$ 时，结论成立。

② 若 $q>t$ 时，不妨设 $q=s+kp+i$，其中 $k,i\in\mathbf{N}$，且 $p=t-s$，$0\leqslant i\leqslant p-1$，则 $R^q=R^{s+kp+i}=R^{s+i}$，又 $s+i\leqslant s+p-1=s+t-s-1=t-1$，所以结论成立。

给定集合 A 上的二元关系 R，主要考虑以下性质：自反性、反自反性、对称性、反对称性和传递性。依赖这些性质可以定义很多不同的关系。

定义 1.2.8　设 R 为 A 上的二元关系，

(1) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow\langle x,x\rangle\in R)$，则称 R 在 A 上是自反的；

(2) 若 $\forall x(x\in A\rightarrow\langle x,x\rangle\notin R)$，则称 R 在 A 上是反自反的。

例 1.2.9　设 $A=\{1,2,3\}$，R_1，R_2 和 R_3 分别是 A 上的二元关系，其中 $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle,\langle 3,3\rangle,\langle 1,2\rangle\}$，$R_3=\{\langle 1,3\rangle\}$，说明 R_1，R_2 和 R_3 是否为 A 上的自反关系和反自反关系。

解　其中 $\langle 3,3\rangle\notin R_1$，故 R_1 不是自反关系，又因为 $\langle 1,1\rangle\in R_1$，故 R_1 不是反自反关系。同理，由定义 1.2.8 可知，R_2 是自反关系，但不是反自反关系；R_3 是反自反关系但不是自反关系。

定义 1.2.9　设 R 为 A 上的二元关系，

(1) 若 $\forall x\forall y(x,y\in A\land\langle x,y\rangle\in R\rightarrow\langle y,x\rangle\in R)$，则称 R 为 A 上的对称关系；

(2) 若 $\forall x\forall y(x,y\in A\land\langle x,y\rangle\in R\land\langle y,x\rangle\in R\rightarrow x=y)$，则称 R 为 A 上反对称关系。

例 1.2.10　设 $A=\{1,2,3\}$，R_1，R_2，R_3 和 R_4 分别是 A 上的二元关系，其中 $R_1=\{\langle 1,1\rangle,\langle 2,2\rangle\}$，$R_2=\{\langle 1,1\rangle,\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle\}$，$R_3=\{\langle 1,2\rangle,\langle 1,3\rangle\}$，$R_4=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,1\rangle,\langle 1,3\rangle\}$。试说明 R_1，R_2，R_3 和 R_4 分别是否为 A 上的对称和反对称关系。

解　由定义 1.2.9 可知，其中 R_1 既是对称关系，也是反对称关系；R_2 是对称关系但不是反对称关系；R_3 是反对称关系但不是对称关系；R_4 既不是对称关系，也不是反对称关系。