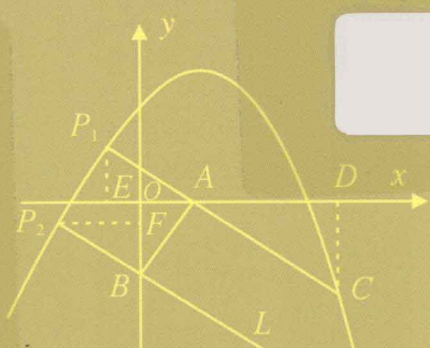
中考数学解题

思路·策略·方法

刘会金◎著

本书为曾任广东省中考命题组组长的命题专家刘会金同志总结十余年命题经验所著的一本教师析考、学生备考的参考资料

- 权威命题专家为你剖析 **中考** 命题思路
- 运用解题理论全面分析 **中考** 答题策略
- 精析 **中考** 训练方法



深圳出版发行集团
海天出版社

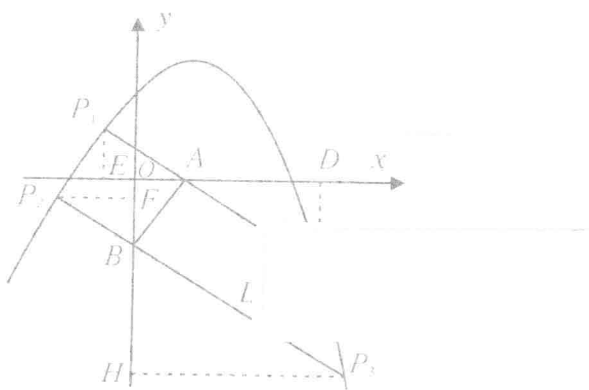
中考数学解题

思路·策略·方法

本书为曾任广东省中考命题组组长的命题专家刘会金同志总结十余年命题经验所著的一本教师析考、学生备考的参考资料

- 权威命题专家为你剖析**中考**命题思路
- 运用解题理论全面分析**中考**答题策略
- 遵循课堂教学规律精析**中考**训练方法

刘会金◎著



深圳出版发行集团
海天出版社

图书在版编目（CIP）数据

中考数学解题：思路·策略·方法 / 刘会金编著. —
深圳 : 海天出版社，2013.7

ISBN 978-7-5507-0621-7

Ⅰ. ①中… Ⅱ. ①刘… Ⅲ. ①中学数学课—初中—题
解—升学参考资料 Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第297652号

中考数学解题：思路·策略·方法

ZHONGKAO SHUXUE JIETI SILU CELUE FANGFA

出 品 人　尹昌龙
出版策划　毛世屏
责任编辑　侯天伦
责任技编　蔡梅琴
装帧设计　线艺设计 电话 83460339

出版发行　海天出版社
地　　址　深圳市彩田南路海天综合大厦7-8层（518033）
网　　址　http://www.htph.com.cn
订购电话　0755-83460293（批发） 83460397（邮购）
设计制作　深圳市线艺形象设计有限公司　Tel：0755-83460339
印　　刷　深圳市希望印务有限公司
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　20.75
字　　数　400千字
版　　次　2013年7月第1版
印　　次　2013年7月第1次
定　　价　38.00元

内容简介

本书主要回答中考中至关重要的三个问题：一是中考数学命题应该遵循怎样的思路？二是怎样解答中考数学试题？三是中考数学复习中应该怎样进行科学的解题训练？即命题思路、解题策略、训练方法。

本书分五章分别阐述了上述三个问题。第一章“中考数学试题解题指南”，向读者介绍了中考数学解题的一些通法；第二章“中考数学试题题型分析”，从题型上去研究中考数学试题，了解中考数学试题的常用题型；第三章“中考数学命题分析”，对中考数学试题，尤其对中考数学试题的创新题型和原创题型的命题过程，揭示数学试题命制的内在规律，更好地应用数学解题方法处理中考数学试题；第四章“中考数学应试技巧”，针对考生在中考数学应试中常见的几个问题，给出有效的对策；第五章“中考数学训练分析”，深刻阐明中考数学复习过程中的科学训练方法，有效克服训练过程中只知道“做题、做题、再做题”的怪圈，从而达到事半功倍的效果。

序

我曾经读过许多中、高考数学复习指导类的书籍，但后来却越读越没劲，甚至感到厌烦，因为，这些参考书籍几乎都是清一色的解题罗列，千家一面，你抄我，我抄你，真可谓“你中有我，我中有你”。也因此，有好几年了，我是不看市面上那些五颜六色的中、高考参考资料了。因此，当深圳市首批教科研专家工作室主持人刘会金老师要我给他刚脱稿的专著《中考数学解题：思路·策略·方法》（由海天出版社出版）写序时，一时确实感到为难，但当作者将其书稿给我看时，还是仔细阅读了一遍，确实给我以久违的感觉；再看看他的写作时间，我想至少耗时十年以上，因为书中有很多命题思路都是他年复一年积累下来的，是作者心血的结晶，十年磨一剑，可真不容易！

据我了解，本书作者数年来都参加了广东省中考数学命题工作，并六次出任组长，从2009年起不再从事中考数学命题工作，所以将这数年来的中考命题的经验以及心得体会记录下来，精心加以整理，锤铸而成本书，这种用“心”写出来的书读起来令人感到特别舒心。再看看全书章节，分类清晰有序，安排科学合理。首先介绍中考数学试题的结构与题型，以便于我们开展解题研究，有利于我们认真分析中考数学试题的结构、内容和相关的数学思想，有利于我们能深刻地理解试题，顺利地进行试题解答；其次，将一些中考数学试题的命制过程进行解剖，进行细致的分解，从试题的原型题入手，一步一步地分解试题的每一个分枝，找到试题的变式原理与支撑变式的数学思想与数学方法，从纵横两个方面以及内涵与外延两个纬度进行科学分析，

有理有据，让我们可以更好地理解中考数学试题编制的基本原理与方法，从而能更好地掌握中考数学解题方法与策略；其三，将平时所有的老师都在运用的中考数学复习和训练方法进一步总结升华，有力地说明，在教学中，不能只进行盲目无效的数学试题训练，而应该懂得如何选择好、运用好训练方法来提高训练效率。在书中，作者将科学训练分成了几个重要阶段，明确在什么样的阶段做什么样的训练，哪一类学生要训练哪一类题目，更好地体现了差异分析与分层训练的原则，从而更有效地提高复习效率。

书不可不读，但不可能全读，关键在于精读，能为我所用。中高考复习资料多如牛毛，依我看，选准、选精一两本就足矣。我希望刘老师的这本书能起到这个作用。

全国初等数学研究会会长　杨学枝

2012年5月8日于深圳

目 录

第一章　中考数学解题指南

本章着重研究怎样解答中考数学试题，从分析中考数学试题的特征出发，分析相关中考题的解题思路。其次分析中考数学试题的相关结构，以利于寻求解答中考数学试题的方法与策略。

1.1 中考数学试题特征分析

中考备考的过程中，我们首先要了解中考考什么，怎样考。其次要分析中考的重点，以及构成中考试题的核心概念部分，要做到知己知彼。本节我们来介绍中考数学试题的特点和中考数学试卷的结构。

1.1.1 中考数学试题的特点

近年来，在新课程标准颁布以后，各省、市的中考命题已经出现了立意创新、题型创新的繁荣局面，很多省市的中考命题都基于原来的方向，稳中有变，百花齐放，各有新招。由于各省市中考命题的组织形式与命题人员的素质差别，命题的质量存在着一定差异，水平也参差不齐。但主要的命题方向与思路还是能够体现一定的共同特点和发展趋势。各地中考数学试题的共同特征主要表现在六个方面：

- 依纲靠本。
- 体现人文关怀，落实“情感与态度”的目标。
- 注重考察数学的核心内容与基本能力。
- 重视考察学生的应用数学意识。
- 突出数学思想方法的理解与简单应用。
- 关注学生获取数学信息、认识数学对象的过程和方法。

1. 依纲靠本

中考命题的依纲就是以“课标”为大纲，通常情况下组织考试命题的部门还会出版一本考试大纲，以便使用试题范围的师生们有据可依。靠本就是以教材为命题依据，目前各地使用的教材是不同的，相关地区还是以本地区

所使用的教材为蓝本，这是一个方向性的特点。

（1）依纲。“考纲”的精神是中考命题指导思想上的纲，《全国义务教育数学课程标准》（简称《课标》）是数学中考命题具体目标和具体内容的纲。《课标》中的课程目标包括 4 个方面（新的义务教育课程标准修订版将原来的数学“双基”变为“四基”——即基础知识、基本技能、基本数学活动经验、基本数学思想方法，与这里提出的三个方面相吻合）。

· 知识与技能（基础知识、基本技能）。

· 数学思考（基本数学思想方法）。

· 解决问题（基本数学活动经验）。

· 情感与态度。

中考命题的立意和设计是要体现这 4 个课程目标的。

初中阶段的内容标准包括 4 个领域：

· 数与代数（数与式、方程与不等式、函数）。

· 空间与图形（图形的认识、图形与变换、图形与坐标、图形与证明）。

· 统计与概率（统计、概率）。

· 实践与综合应用（课题学习）。

中考试题的内容是由这几个领域来呈现的，并且每一道题的内容和形式都要反映“了解、理解、掌握、灵活运用”及“经历、体验、探索”的目标层次。

（2）靠本。教材是《课标》的载体，是课程目标和课程内容的具体化，所以，依纲与靠本是一致的。并且，学生与命题专家、与教师不一样，他们经常接触到、能够直接理解的是教材（而非《课标》），因此，中考命题以《课标》为纲必然具体落实到以教材为依据、为根本。一般说来，教材讲到的知识内容都属于中考的命题范围，教材达到的能力水平都属于中考命题的能力要求，这应该是我们对中考命题范围和能力要求的一个基本把握。但是，由于中考的时间限制和选拔性质，它不能把学过的内容全都考到，也会在高档题上向学生的灵活性与综合性提出高要求，因而，我们对依纲与靠本的关系要有一个辩证的把握，善于抓住课程体系的重点和中考的热点。

当前，按同一《课标》编写的教材有好几套，中考命题会逐步走向依据《课标》，参考多种课本之路（依标靠多本，以教材为依据又不拘泥于教材），但目前各地命题基本上还是以当地使用的教材为主要依据的，这里有一个现

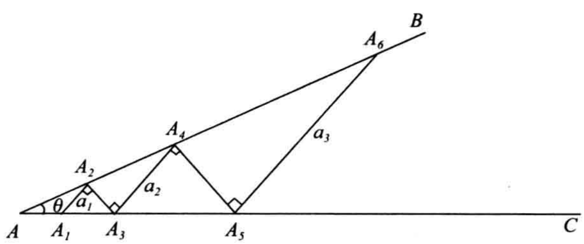
实性与公平性的考虑。我们在编写本书时，已尽可能广泛提供各种课本背景下的最新中考题。

中考命题过程中体现创新精神与贴近生活的问题不断进入，成为命题者常常思考的问题，反映在试题中会出现不同的面貌，但其本质都是各类课本中出现的基本原理、基本定理和基本问题。特别是近几年的中考数学试题中，思维的高层次性引起了命题者的重视。如数形结合思想的考查、函数思想的考查、自定义问题，以及一些需要学生借助自定义运用高层手段与方法来解决的问题也出现在了中考数学试题中。

例 1-1（2011 江西）某数学兴趣小组开展了一次活动，过程如下：

设$\angle BAC=\theta$（$0°<\theta<90°$）。现把小棒依次摆放在两射线 AB、AC 之间，并使小棒两端分别落在两射线上。

活动一：如【图 1-1-1】所示，从点 A_1 开始，依次向右摆放小棒，使小棒与小棒在两端点处互相垂直，A_1A_2 为第 1 根小棒。



【图 1-1-1】

【数学思考】

（1）小棒能无限摆下去吗？答：__________。（填“能”或“不能”）

（2）设 $AA_1=A_1A_2=A_2A_3=1$。

①θ=____________度；

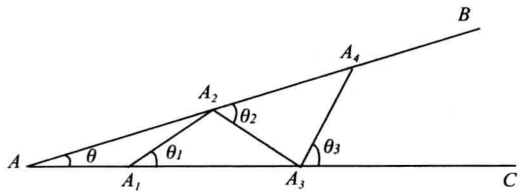
②若记小棒 $A_{2n-1}A_{2n}$ 的长度为 a_n（n 为正整数，如 $A_1A_2=a_1$，$A_3A_4=a_2$），求此时 a_2，a_3 的值，并直接写出 a_n（用含 n 的式子表示）。

活动二：如【图 1-1-2】所示，从点 A_1 开始，用等长的小棒依次向右摆放，其中 A_1A_2 为第 1 根小棒，且 $A_1A_2=AA_1$。

【数学思考】

（3）若已经向右摆放了 3 根小棒，则 θ_1=_________，θ_2=__________，

$\theta_3=$__________；（用含 θ 的式子表示）



【图 1−1−2】

（4）若只能摆放 4 根小棒，求 θ 的范围。

【分析】本题用两个活动设计了一个对数学活动过程的四个方面的考察。这种摆小棒的游戏在小学里同学们就已经接触很多，但将其设计成中考试题就需要考生能够科学地进行思考，同时还要运用数形结合的思想去分析问题，从而达到解决问题的目的。

题干突出的是**问题提出：用小棒按要求摆放，“是”或“否”在活动一和活动二的整个设计过程中体现问题解决的内涵。活动二更是将问题进行拓广，从具体的问题拓广到一般情形下，同时用思考一般情形的思想返回来解决具体问题。**

活动一：【图 1-1-1】中的问题体现了三个思维层次。

思维层次一：试题操作的原始状态：“用小棒摆放，只要两根小棒垂直，小棒的长度没有进行限制。”也就是问题（1）。问题是能不能一直摆下去？如果你将小棒看成是一条折线，马上可以得到结果：能！

思维层次二：如果有两根长度相等的小棒，题目相对于【图 1-1-1】中的问题能否成立？如果能够成立，需要的原始锐角是否可求？如果能求，需要考生求得结果。

思维层次三：在每一根小棒要摆成垂直的前提下，将思维的广度加大，由原来的 1，2，3 具体可操作线段向 n 推广，再返回求具体的代数式和指定的线段长度。

活动二：【图 1-1-2】中的问题体现了更高的思维层次。这里可以看到命题者的思路，其一是要考查考生对小棒长度的数量感知水平，其二是要考查考生对角度一定的时候，等长小棒摆放问题的存在性是否能够进行完整的思考。

本题设计的很有意思，难度也不是很大，但考察的知识点和操作规程及操作常识是非常丰富的。解决本问题的角度有很多，所以方法也就不唯一。

【简解】（1）能

（2）①22.5°

②方法一：

$\because AA_1=A_1A_2=A_2A_3=1$，$A_1A_2\perp A_2A_3$，

$\therefore A_1A_3=\sqrt{2}$，$AA_3=1+\sqrt{2}$。

又$\because A_2A_3\perp A_3A_4$，$\therefore A_1A_2/\!/A_3A_4$。

同理：$A_3A_4/\!/A_5A_6$，$\therefore \angle A=\angle AA_2A_1=\angle AA_4A_3=\angle AA_6A_5$，

$\therefore AA_3=A_3A_4$，$AA_5=A_5A_6$，

$\therefore a_2=A_3A_4=AA_3=1+\sqrt{2}$，$a_3=AA_3+A_3A_5=a_2+A_3A_5$。

$\because A_3A_5=\sqrt{2}a_2$，

$\therefore a_3=A_5A_6=AA_5=a_2+\sqrt{2}a_2=(\sqrt{2}+1)^2$。

方法二：

$\because AA_1=A_1A_2=A_2A_3=1$，$A_1A_2\perp A_2A_3$，$\therefore A_1A_3=\sqrt{2}$，$AA_3=1+\sqrt{2}$。

又$\because A_2A_3\perp A_3A_4$，$\therefore A_1A_2/\!/A_3A_4$。

同理：$A_3A_4/\!/A_5A_6$，

$\therefore \angle A=\angle AA_2A_1=\angle AA_4A_3=\angle AA_6A_5$，

$\therefore a_2=A_3A_4=AA_3=1+\sqrt{2}$，

又$\because \angle A_2A_3A_4=\angle A_4A_5A_6=90°$，$\angle A_2A_4A_3=\angle A_4A_6A_5$，

$\therefore \triangle A_2A_3A_4\backsim\triangle A_4A_5A_6$，

$\therefore \dfrac{1}{a_2}=\dfrac{a_2}{a_3}$，$\therefore a_3=\dfrac{a_2^2}{1}=(\sqrt{2}+1)^2$。

$a_n=(\sqrt{2}+1)^{n-1}$。

（3）$\theta_1=2\theta,\ \theta_2=3\theta,\ \theta_3=4\theta$

（4）由题意得$\begin{cases}5\theta\leqslant 90°\\6\theta>90°\end{cases}$，$\therefore 15°<\theta\leqslant 18°$。

【评注】例 1-1 用一个儿时玩耍的小例子，将几何图形与代数运算有机地结合起来，在体现中考中的发散思维与创新思维上创造了非常灵活的形式。这是中考命题贴近课程改革的一种新体现，也是体现“与时俱进的开展数学

双基教育”精神的一种真实的载体。同时在体现课程标准修订版提出的四基（基础知识、基本技能、基本数学活动经验、基本数学思想方法）要求中也非常有效。

“问题”成为例 1-1 主要的表现形式，而且呈现给学生的在我们看来是一种科学研究的格式：**问题提出、问题解决和问题拓广。以此来培养学生更深入地学习数学。**

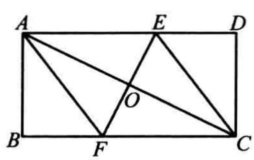
问题的解答过程可以是很多种不同的结果，但只要学生的思维方式是正确的，这道题都能获得正确的答案。本题的可贵之处还在于通过问题解决考察考生对存在性问题的解决是否能够完备。这样考察学生在解决创新问题的过程中进行科学的思考，同时又不失完备性，解决存在性问题，已经成为了一种科学研究的能力。这样的试题在各地数学中考题中常会看到。

例 1-2（2011 **福州**）已知，矩形 $ABCD$ 中，AB=4cm，BC=8cm，AC 的垂直平分线 EF 分别交 AD、BC 于点 E、F，垂足为 O。

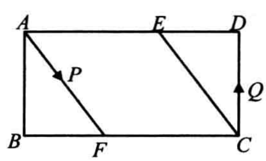
（1）如【图 1-1-3】，连接 AF、CE。求证四边形 $AFCE$ 为菱形，并求 AF 的长；

（2）如【图 1-1-4】，动点 P、Q 分别从 A、C 两点同时出发，沿△AFB 和△CDE 各边匀速运动一周。即点 P 自 $A \to F \to B \to A$ 停止，点 Q 自 $C \to D \to E \to C$ 停止。在运动过程中，

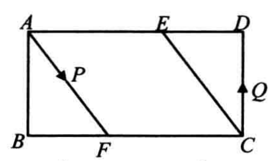
① 已知点 P 的速度为每秒 5cm，点 Q 的速度为每秒 4cm，运动时间为 t 秒，当以 A、C、P、Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时，求 t 的值。



【图 1-1-3】



【图 1-1-4】



【图 1-1-5】

② 若点 P、Q 的运动路程分别为 a、b（单位：cm，$ab \neq 0$），已知以 A、C、P、Q 四点为顶点的四边形是平行四边形，求 a 与 b 满足的数量关系式。

【分析】问题（1）是常规的证明题，考察的目的是考生能够运用全等三角形证明线段相等，然后用勾股定理即可求得 AF 的长度。

问题（2）考察形式改变为运动观点下的线段数量关系。命题设计者在思考的过程中基于二个考察的目标，其一，在题设主干的前提下，两个不同的

点以不同的速度进行运动时，A、C、P、Q 组成的图形与运动时间之间的函数关系。其二，两个不同的点所经过的路程改变时，A、C、P、Q 组成的图形与路程之间的函数关系。

问题的设计具有分明的层次性，同时对两个点进行运动时，图形特征和不同的运动变量之间的关系都进行了考查，对考查考生的数学思维能力具有更具体的作用，同时也能够培养考生对同样的问题背景进行不同的思考，进而提出不同的问题。我们还可以运用相同的题干创造不同问题的考查形式。这道中考题实际上隐含了对修订后的新课程标准中的基本活动经验和基本思想方法的考查。

【简解】（1）证明：① ∵四边形 $ABCD$ 是矩形，

∴$AD // BC$，∴ $\angle CAD = \angle ACB$ ， $\angle AEF = \angle CFE$

∵ EF 垂直平分 AC ，垂足为 O

∴ $OA = OC$ ，∴$\triangle AOE \cong \triangle COF$,

∴ $OE = OF$ ，

∴四边形 $AFCE$ 为平行四边形。

又∵ $EF \perp AC$ ，

∴四边形 $AFCE$ 为菱形。

② 设菱形的边长 $AF=CF=x$cm，则 $BF=(8-x)$ cm

在 Rt$\triangle ABF$ 中，$AB=4$cm

由勾股定理得 $4^2 + (8-x)^2 = x^2$ ，解得 $x = 5$

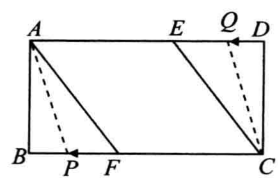
∴$AF=5$cm

（2）① 显然当 P 点在 AF 上时， Q 点在 CD 上，此时 A、C、P、Q 四点不可能构成平行四边形；同理 P 点在 AB 上时，Q 点在 DE 或 CE 上，也不能构成平行四边形。因此只有当 P 点在 BF 上、Q 点在 ED 上时，才能构成平行四边形。

当以 A 、C 、P 、Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时， $PC = QA$ 。

∵点 P 的速度为每秒 5cm，点 Q 的速度为每秒 4cm，运动时间为 t 秒，

∴$PC=5t$，$QA=12-4t$



【图 1-1-6】

$\therefore 5t=12-4t$，解得 $t=\dfrac{4}{3}$

$\therefore$ 以 A、C、P、Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时，$t=\dfrac{4}{3}$ 秒。

② 由题意得，以 A、C、P、Q 四点为顶点的四边形是平行四边形时，点 P、Q 在互相平行的对应边上。

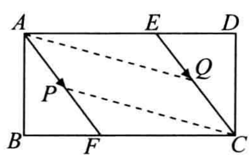
分三种情况：

（Ⅰ）如【图 1-1-7】，当 P 点在 AF 上、Q 点在 CE 上时，$AP=CQ$，即 $a=12-b$，得 $a+b=12$

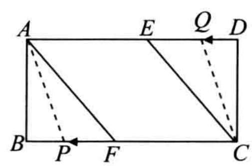
（Ⅱ）如【图 1-1-8】，当 P 点在 BF 上、Q 点在 DE 上时，$AQ=CP$，即 $12-b=a$，得 $a+b=12$

（Ⅲ）如【图 1-1-9】，当 P 点在 AB 上、Q 点在 CD 上时，$AP=CQ$，即 $12-a=b$，得 $a+b=12$

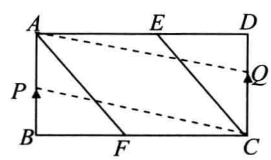
综上所述，a 与 b 满足的数量关系式是 $a+b=12$（$ab\neq 0$）



【图 1-1-7】



【图 1-1-8】



【图 1-1-9】

【评注】本题用自定义的方法告诉初中生让线段带上方向，变成向量，其实就是一种创新问题的手法。用正方形拼接图案，用向量表示线段，用函数表示法来表示结果，整个题目就是一个大信息量的创新思想的考察，对学生来说就是一种挑战。

如果我们在平时的教学中重视了从图形、数据等获取数学信息的能力。“数的意识”、“符号意识”、“图形意识”等都能够有所涉及，学生在遇到此类问题的时候就不会感觉害怕，如果能够试着去解答，答案就在手边。

2. 体现人文关怀，落实“情感与态度”的目标

推行《课标》以来的中考，各地命题专家普遍树立了以人为本的思想，也在想方设法落实“情感与态度”的课程目标。这是一个体现课程理念上的特点。主要表现有：

（1）在整体设计上，注重起点适当、题量适中、坡度适宜、难易适度、

技术规范，试题形式也尽量适应学生的生活经验与思维方式，让学生得到比较充分的发挥，获得良好的情感体验。

（2）在卷首或题目当中，安排了一些舒缓心理压力或考试艺术方面的文字，使考生能正常发挥，心态自然地完成考试，考出真实水平。

（3）体现数学文化。

例 2-1 2010 年重庆市潼南县中考试题，在第 22 题第二问设计了一个问题："（2）你认为这个方法公平吗？若公平，请说明理由；若不公平，请设计一个公平的方法。"体现了命题者将考生放在了一个平等的位置来考虑。

例 2-2 2011 年广东茂名中考数学试题的六个大题的标题都是用人文关怀的语言表达。一、精心选一选；二、细心填一填；三、用心做一做；四、沉着冷静，缜密思考；五、满怀信心，再接再厉；六、灵动智慧，超越自我

例 2-3 2008 年湖北省恩施自治州中考数学试题

温馨提示：

亲爱的同学，你好！今天是展示你才能的时候了，只要你仔细审题、认真答题，把平常的水平发挥出来，就一定会有出色的表现，放松一点，相信自己的实力！

例 2-4 2011 年浙江舟山卷第 17 题中，友情提示：做解答题，别忘了写出必要的过程；作图（包括添加辅助线）最后必须用黑色字迹的签字笔或钢笔将线条描黑。

例 2-5 2009 年湖南省邵阳市中考试题，在第一大题前有友情提示："放松心情，仔细选择"，在第二大题前有友情提示："深入观察，静心思考"，在第三大题前有友情提示："计算准确，推理严谨"，在第四大题前有友情提示："学以致用，大胆实践"，在第五大题前有友情提示："积极探索，勇于创新"，在第六大题前有友情提示："再接再厉，勇攀高峰"，在题目的最后还有一个友情提示："再仔细检查一下，别忘了把答案写在答题卡上！"

【评注】这些寥寥数语，却有浓浓亲情。

例 3（2011 广东）如图 1-1-10（1），将一个正六边形各边延长，构成一个正六角星形 $AFBDCE$，它的面积为 1，取$\triangle ABC$ 和$\triangle DEF$ 各边中点，连接成正六角星形 $A_1F_1B_1D_1C_1E_1$，如图 1-1-10（2）中阴影部分，取$\triangle A_1B_1C_1$ 和$\triangle D_1E_1F_1$ 各边中点，连接成正六角星形 $A_2F_2B_2D_2C_2E_2$，如图 1-1-10（3）中阴影部分，如此下去，则正六角星形 $A_4F_4B_4D_4C_4E_4$ 的面积为$\frac{1}{256}$。