

聚 焦 考 研

理工类

2005 版

主 | 陈文灯 / 黄先开
曹显兵

编 | 用正版书 **赠** 增值卡

基础加题型

——考研数学成功的保证

严格遵循考试大纲，精辟阐释解题思路，全面展现题型变换，将浩渺的习题浓缩于有限的“题型”之中，迅速拔高考生快速、准确、灵活的解题能力。

题型集粹与练习题集

www.kaoyan.tv 考研名师网络课堂

数 学
MATHS
NETEM

W 世界图书出版公司



有此防伪标志皆为正版



聚 焦 考 研

11/16

013-44/88-2:7

出计图界世：京北一：著编录显曹、开先黄、以文陈

44-C10 VI 图区：学学人-主交研-学数高：Ⅱ

号 300210 曹

理 工 类

2005 版

主 编 | 陈文灯/黄先开
曹显兵

编 用正版书 赠 增值卡

题型集粹与练习题集

数 学

MATHS



长春工大 B0257986

云 08.00. 价宝

ISBN 7-309-02512-0/O · 033



世界图书出版公司

北京·广州·上海·西安



FOCUS

聚 焦 图 书

藥考集

ISBN 7-5062-5212-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 015003 号

2002

我武獨利 以文利

天 天 天

未盡辭 () 年五用

开 本: 787 × 1092 毫米 1/16
印 张: 28.375
字 数: 539 千字
版 次: 2004 年 2 月第 7 版 2004 年 2 月第 1 次印刷

定价:39.80 元

安西·疏土·州門·京北

律师声明

敬启者：

我们，中华人民共和国执业律师，受当事人北京聚骄文化发展有限公司（以下简称为“我方当事人”）委托，全权处理我方当事人代理出版事务及发行聚焦考研 2005 版《数学题型集粹与练习题集（理工类）》一书工作中的著作权事宜。现依据中华人民共和国法律，专发此声明。

我方当事人是聚焦考研 2005 版《数学题型集粹与练习题集（理工类）》一书的出版事务代理者，该书作者已与我方当事人签署了著作权独家许可使用协议书，保证其对我方当事人是独家授权。依照我国著作权法的有关规定及我方当事人与作者的合同约定，我方当事人享有对该作品的独家使用权。同时作者保证独家授权我方当事人在聚焦考研 2005 版《数学题型集粹与练习题集（理工类）》一书上使用其名字，即其署名权也由我方当事人独家使用。

在此，我们代表我方当事人及其签约作者郑重声明：任何单位、个人未经我方当事人书面授权，擅自出版、发行我方当事人享有著作权的聚焦考研 2005 版《数学题型集粹与练习题集（理工类）》一书，或者未经我方当事人书面同意，擅自在其出版、发行的图书上使用与我方当事人有协议约定的作者姓名（无论是否经过作者授权），这些行为均违反《中华人民共和国著作权法》及其他相关法律，将严重侵犯我方当事人的合法权益。因此，侵权人应当公开向我方当事人和签约作者道歉，并赔偿由此给我方当事人造成的全部经济损失和商誉损失。

上述侵权行为一经发现，我们将代表我方当事人通过必要的法律途径、立即采取相关法律措施，追究侵权人的法律责任。

特此声明。

北京市浩天律师事务所

肖 群 律师

张景伟 律师

2004 年 1 月 30 日

作者声明

本人在数学研究生入学考试方面的著作权授予北京聚骄文化发展有限公司独家使用，其他出版单位不得以本人的名义署名或抄袭相关著作的内容。

特此声明。

陈文灯

2004 年 1 月 25 日

11.29
11.30.10.11.12

第七版最新修订说明

《数学题型集粹与练习题集》(理工类)作为《数学复习指南》(理工类)的续篇,自第一版问世已经第七个年头了。纵观七年,这两本书全面覆盖了考研数学理工类试题中的各类题型。2004年考研数学试题中的题型无一出其右者。读者在全面、系统地复习《指南》的基础上再看本书,将会进一步拓宽思路,掌握各类题型的解题方法和技巧,大大提高做题的准确性和速度。

◆ 2005版《数学题型集粹与练习题集》(理工类)主要改动如下:

- ① 根据新的考研数学中数学一和数学二的大纲要求,将数学二不作要求内容用“*”号进行重新标注,使考生复习时更加有的放矢。
- ② 根据新大纲要求,分别对模拟题中主客观题的比例进行了调整,选择题与填空题的比例由过去的30%增加到40%,解答题(包括证明题)的比例由过去的70%减少到60%。增加了两道选择题,减少了一个解答题。
- ③ 2004年考研结束后第一时间内在附录中增加了2004年数学一、二试题与参考答案。
- ④ 将文字和内容进行了逐字校对,追求无差错率出版。
- ⑤ 对版式进行了重新调整,层次感更强,更加有利于读者学习。
- ⑥ 赠送网络名师答疑,并在2004年11月赠送模拟冲刺题一套,具体内容详见封三。

◆ 本书主要特色如下:

- ① 重点突出。本书针对“考纲”要求重点掌握的概念、公式、定理,通过题型的形式予以强化,同时,指出解题的方法和技巧,尤其是读者感到比较难理解和掌握的问题,按本书所给的思路、方法去分析将会迎刃而解。
- ② 针对性强,覆盖面大。本书不搞题海战术,而是以题型为纲,通过分析综合性较强、难度较大、覆盖面较宽的例题,总结出易被读者理解和掌握的解题方法和规律。
- ③ 超前性与独创性。本书所总结的规律和方法是作者教学经验的结晶。书中很多综合题系作者多年的教学心得、呕心沥血之所成。读者通过做这些例题不仅可以各知识点串在一起,而且可以拓宽思路,遇到“从未见到”的题时,可以从容应对。

另外,本书编写的模拟试题,请读者复习完本书后,严格掌握在3小时内独立做完试卷,及时查缺补漏。

书后附录还给出2003年全国攻读硕士学位研究生入学考试的数学一、数学二试题及参考答案。

成书仓促,定有不当和错误之处,恳请广大读者、数学界同仁批评指正。

编者

目 录

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续 1

一、函数 1

1. 有关函数概念的题型 1

 题型 I 判别函数的等价性 1

 题型 II 利用函数表示法与用什么字母表示
 无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式 1

2. 函数的性质 2

 题型 I 函数奇偶性的判别 2

 题型 II 求解给定函数的周期或周期性证明 3

 题型 III 函数 $f(x)$ 在某区间 I 上单调性的
 判别 4

 题型 IV 函数有界性的判别 4

3. 复合函数 5

二、极限 7

1. 数列的极限 7

 题型 I 已知数列的前几项数值及通项的表
 达式,求数列的极限 7

 题型 II 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限 8

 题型 III 求 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项乘积的极限 10

 题型 IV 通项为积分形式的数列的极限 11

 题型 V 利用子序列的极限与函数的
 极限等值定理,求数列极限 12

2. 函数的极限 12

 题型 I $\frac{0}{0}$ 型未定式的定值法 12

 题型 II $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式的定值法 14

 题型 III $\infty - \infty$ 型未定式的定值法 15

 题型 IV $0 \cdot \infty$ 型未定式的定值法 16

 题型 V $1^\infty, 0^0, \infty^0$ 型未定式的定值法 17

3. 无穷小的阶及极限式中常数值的确定 18

 题型 I 确定无穷小的阶 18

 题型 II 极限式中常数值的确定 19

三、函数的连续性 21

 题型 I 函数连续性的讨论(重点) 21

 题型 II 确定函数的间断点及其类型 22

 题型 III 分段函数式中参数的确定(重点) 24

第二章 导数与微分 26

 题型 I 利用导数定义求极限 26

 题型 II 利用导数定义求函数在某点处的
 导数 27

 题型 III 利用导数定义求函数方程 29

 题型 IV 求复合函数的导数 30

 题型 V 求参数方程所确定的函数的导数 32

 题型 VI 由极坐标方程所确定的函数的导数 32

 题型 VII 隐函数微分法 33

 题型 VIII 分段函数的导数的求法(重点) 33

 题型 IX 高阶导数的求法 36

 题型 X 综合题 37

第三章 不定积分 39

 题型 I 第一换元积分法(凑微分法) 39

 题型 II 第二换元积分法 43

 题型 III 分部积分法 44

 题型 IV 分式有理函数的积分 47

 题型 V 简单无理函数的积分 49

 题型 VI 三角有理式的积分 49

 题型 VII 综合题 52

第四章 定积分 54

 题型 I 利用定积分定义和性质求解的题型 54

 题型 II 利用变上限积分的可微性求解的
 题型 57

 题型 III 被积函数含有绝对值符号的定积分
 的计算 60

 题型 IV 利用奇偶函数与周期函数的性质简
 化定积分计算 61

 题型 V 由三角有理式与其他初等函数通过
 四则运算或复合而成的被积函数的
 积分 62

 题型 VI 被积函数中含“变上限积分”的积分 63

 题型 VII 被积函数的分母为两项、而分子为
 分母中其中一项的积分 63

 题型 VIII 定积分等式的证明技巧 64

题型 IX	定积分不等式的证明技巧	68
题型 X	定积分的杂例	73
题型 XI	广义积分的计算	74
题型 XII	判别广义积分的敛散性	76
第五章	中值定理	80
题型 I	有关闭区间上连续函数的命题的证明	80
题型 II	欲证结论为 $f^{(n)}(\xi) = 0$ 的命题的证法	81
题型 III	欲证结论为 $f^{(n)}(\xi) = k$ ($k \neq 0$), 或由 $a, b, f(a), f(b), \xi, f(\xi), f'(\xi), \dots, f^{(n)}(\xi)$ 所构成的代数式的证法	82
题型 IV	欲证结论为 (a, b) 内 $\exists \xi, \eta$ 满足某种关系式的命题的证法	85
第六章	一元微积分的应用	87
	一、导数的应用	87
题型 I	利用导数判别函数单调增减性的方法证明不等式	87
题型 II	求函数的极值与最值	88
题型 III	关于方程根的研究	91
题型 IV	综合题	95
题型 V	函数图形在区间 I 上凹凸性的判别	96
题型 IV	渐近线类型: (1) 水平渐近线; (2) 铅直渐近线; (3) 斜渐近线	97
	二、定积分的应用	98
题型 I	微元法及其应用	98
题型 II	平面图形面积的求法	99
题型 III	求立体体积	101
第七章*	向量代数与空间解析几何	103
题型 I	向量的运算	103
题型 II	求平面方程	105
题型 III	求空间直线方程	106
题型 IV	平面与平面、平面与直线、直线与直线的关系	108
题型 V	点到平面、点到直线的距离, 两异面直线的距离	108
题型 VI	线性代数中线性相关性在解析几何中的应用	109
题型 VII	投影线方程	111
题型 VIII	旋转面方程	112
第八章	多元函数微分学	113

题型 I	判别 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y)$ 不存在的方法	113
题型 II	用全微分定义验证一个可导函数的可微性	113
题型 III	抽象的复合函数的偏导数的求法	115
题型 IV	隐函数方程组的微分法	117
题型 V	多元函数微分学在几何中的应用	118
题型 VI	多元微分学的有关证明题	119
题型 VII	多元函数的极值	121
题型 VIII	综合题	123
第九章	重积分	126
题型 I	关于二重积分概念及其性质的命题	126
题型 II	更换积分次序	127
题型 III	选择积分次序	128
题型 IV	选择坐标系	129
题型 V	分段函数的积分	130
题型 VI	涉及二次累次积分不等式的证明	132
题型 VII*	三重积分的计算	133
题型 VIII	综合题	135
第十章*	曲线曲面积分	138
题型 I	对弧长的曲线积分的计算	138
题型 II	对坐标的曲线积分计算(重点)	139
题型 III	对面积的曲面积分计算	145
题型 IV	对坐标系的曲面积分计算	146
题型 V	曲面面积的计算	151
题型 VI	场论初步	152
第十一章*	无穷级数	154
题型 I	有关级数概念及性质的命题	154
题型 II	正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ($u_n \geq 0$) 的判敛	155
题型 III	任意项级数的判敛	156
题型 IV	有关数项级数的命题的证明	158
题型 V	函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 求收敛域, 幂级数求收敛域、收敛半径 R	160
题型 VI	求函数的幂级数展开式	162
题型 VII	级数求和	164
题型 VIII	傅立叶级数	167
第十二章	常微分方程	169
题型 I	可求解的一阶微分方程	169
题型 II	可降阶的高阶微分方程的解法	174
题型 III	高阶常系数线性微分方程的解法	175

题型 IV *	欧拉方程的解法	179
题型 V	微分方程在几何和力学中的应用	180

第二篇 线性代数

第一章 行列式

题型 I	确定用行列式表示的多项式 $f(x)$ 中, 关于 x 的最高次数及 x 的各次幂前的系数	184
题型 II	涉及方阵、逆矩阵、伴随矩阵、向量等概念的 3~5 阶行列式的计算	186
题型 III	证明抽象行列式等于零的方法	188
题型 IV	n 阶行列式的计算法	189
题型 V	综合题	193

第二章 矩阵

题型 I	关于矩阵的基本性质及初等变换的命题	196
题型 II	有关 $\alpha^T \alpha$ 与 $\alpha \alpha^T$ 命题的求解与论证	199
题型 III	求 n 阶方阵 A 的 k 次幂 A^k 的方法	201
题型 IV	求满秩矩阵的逆矩阵	203
题型 V	求解矩阵方程	205
题型 VI	关于矩阵 A 存在逆矩阵的证明	206
题型 VII	与方阵 A 的伴随矩阵 A^* 有关的命题的计算与证明	207
题型 VIII	矩阵秩的求法及有关矩阵秩的等式与不等式的证明	210
题型 IX	综合题	212

第三章 向量

题型 I	有关向量的概念及其性质的命题	213
题型 II	有关线性组合的判别与证明的命题	215
题型 III	有关线性表出的命题的证法	216
题型 IV	向量线性相关性的证法	217
题型 V	求向量组的极大线性无关组及向量组秩的有关命题的证明	220
题型 VI *	求过渡矩阵与向量的坐标	222
题型 VII *	有关正交矩阵命题的证明	223

第四章 线性方程组

题型 I	有关线性方程解的概念及性质的命题	224
题型 II	含有参数的线性方程组解的讨论	227
题型 III	有关基础解系的命题的证法	229

题型 IV	涉及两个方程组解之间关系的命题的讨论	230
-------	--------------------	-----

题型 V	综合题	232
------	-----	-----

第五章 矩阵的特征值与特征向量

题型 I	有关特征值与特征向量概念及性质的命题	237
题型 II	特征值的求法与证法	239
题型 III	矩阵 $(kE - A)$ 是否可逆的特征值证法	242
题型 IV	两矩阵相似的证法	243
题型 V	$P^{-1}AP = \Lambda$ 中已知两者求第三者的方法	245

第六章 * 二次型

题型 I	有关概念及性质的命题	248
题型 II	将二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) =$	

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

	化为标准形 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ 的方法	251
题型 III	二次型与其标准形中参数的确定及正交变换	254
题型 IV	有关正定矩阵命题的证明	257

第三篇 * 概率论与数理统计初步

第一章 事件的概率

题型 I	利用古典概型与加法定理计算概率	260
题型 II	利用条件概率与乘法公式计算概率	261
题型 III	利用全概公式和逆概公式(贝叶斯公式)计算概率	264
题型 IV	单项选择题	266

第二章 随机变量及其分布

题型 I	一维随机变量的分布函数及分布密度	267
题型 II	二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及其密度	271
题型 III	一维随机变量函数 $Y = g(X)$ 分布律	

	(分布密度)的求法	274
题型 IV	二维随机变量 (X, Y) 函数 $g(X, Y)$ 的分布律(分布密度)的求法	276
第三章	随机变量的数字特征	279
题型 I	一维随机变量的数字特征	279
题型 II	一维随机变量函数的数字特征	282
题型 III	求二维随机变量的数字特征	284
题型 IV	二维随机变量 (X, Y) 函数 $Z = g(X, Y)$ 的数字特征	286
题型 V	多维随机变量数字特征的求解技巧 ((0-1)分布分解法简介)	287
题型 VI	有关证明题	289
第四章	大数定律和中心极限定理	291
题型 I	估算随机事件的概率	291
题型 II	试验次数 n 的确定	294
题型 III	证明题	295
第五章	数理统计初步	297
题型 I	样本容量 n , 样本均值 $\bar{X}$ 及样本方差 S^2 的数字特征和概率的求法	297
题型 II	求抽样分布	300
题型 III	统计量的点估计 $\left\{ \begin{array}{l} \text{矩估计法} \\ \text{最大似然估计法} \end{array} \right.$	301
题型 IV	正态总体均值与方差的区间估计	303
题型 V	估计量的评选标准	306

注:带*篇、章,数二考生不作要求。

题型 VI	一个正态总体均值的假设检验	308
题型 VII	一个正态总体方差 $D(X) = \sigma^2$ 的假设检验	309
题型 VIII	两个正态总体均值的检验	310

篇后篇 单项选择题的解题技巧 314

数学一	模拟试题(一)及参考答案	324
数学一	模拟试题(二)及参考答案	332
数学一	模拟试题(三)及参考答案	341
数学一	模拟试题(四)及参考答案	347
数学一	模拟试题(五)及参考答案	356
数学一	模拟试题(六)及参考答案	363
数学二	模拟试题(一)及参考答案	370
数学二	模拟试题(二)及参考答案	376
数学二	模拟试题(三)及参考答案	382
数学二	模拟试题(四)及参考答案	389
数学二	模拟试题(五)及参考答案	395
数学二	模拟试题(六)及参考答案	402

附录 1

2003 年硕士研究生入学考试数学试题	一、二及参考答案	409
---------------------	----------------	-----

附录 2

2004 年硕士研究生入学考试数学试题	一、二及参考答案	425
---------------------	----------------	-----

第一篇 高等数学

第一章 函数·极限·连续

一、函数

1. 有关函数概念的题型

题型 I 判别函数的等价性

解题提示 当且仅当两函数的定义域和对应关系完全相同时,才表示同一函数,否则为不同函数.

【例 1.1】设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在, 且 $f(x) = x^2 + 2x \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, 则与 $f(x)$ 等价的函数是.

$$(A) y = \int_0^x (x^2 - 2x) dx$$

$$(B) y = \int_0^1 (x^2 + 2x) dt$$

$$(C) y = \int f'(x) dx$$

$$(D) y = e^{\ln(x^2 - 2x)}$$

【解】设 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = l$, 则 $f(x) = x^2 + 2xl$,

两边取 $x \rightarrow 1$ 时的极限, 得 $l = 1 + 2l \Rightarrow l = -1 \Rightarrow f(x) = x^2 - 2x$.

(A) $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2$ 与 $f(x)$ 的对应关系不同.

$$(B) y = \int_0^1 (x^2 + 2x) dt = x^2 + 2x.$$

(C) $y = f(x) + C = x^2 - 2x + C$ 与 $f(x)$ 对应关系不同.

(D) $y = e^{\ln(x^2 - 2x)}$, 定义域 $x < 0$ 或 $x > 2$, 与 $f(x)$ 定义域不同.

故(B)入选, 实际做题时不必像以上那样处理, 求出 $f(x)$ 的表达式后一眼即可看出(B)入选.

题型 II 利用函数表示法与用什么字母表示无关的特性求解 $f(x)$ 的表达式

解题提示 一种是所谓“凑法”——将给出的表达式凑成对应符号 $f(\quad)$ 内的中间变量的表达形式, 然后用“无关特性”即可得出 $f(x)$ 的表达式. 另一种方法是先作变量替换再用“无关特性”, 然后通过联立方程得出 $f(x)$ 的表达式. 多元函数也可以用这两种方法处理.

【例 1.2】求解以下各小题中的 $f(x)$ 表达式:

$$(1) f\left(x + \frac{1}{x}\right) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2} + 1} + \sin\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 2, \quad |x| > 1.$$

$$(2) f(\sin^2 x) = \cos 2x + \tan^2 x, \quad 0 < x < 1.$$

【解】 (1) $f(x + \frac{1}{x}) = \sqrt{(x + \frac{1}{x})^2 - 1} + \sin[(x + \frac{1}{x})^2 - 2] + 2,$

故 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sin(x^2 - 2) + 2 \mid x \mid > 2.$

(2) $f(\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = 1 - 2\sin^2 x + \frac{1}{1 - \sin^2 x} - 1,$

故 $f(x) = -2x + \frac{1}{1 - x}, \quad 0 < x < \sin^2 1.$

【例 1.3】 设 $f(x)$ 满足方程: $af(x) + bf(-\frac{1}{x}) = \sin x$, 其中 $|a| \neq |b|$, 求 $f(x)$.

【解】 令 $t = -\frac{1}{x}$, 则 $x = -\frac{1}{t}$, 于是原方程变为 $bf(t) + af(-\frac{1}{t}) = -\sin \frac{1}{t},$

由“无关特性”得 $bf(x) + af(-\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x}.$

解联立方程组
$$\begin{cases} af(x) + bf(-\frac{1}{x}) = \sin x \\ bf(x) + af(-\frac{1}{x}) = -\sin \frac{1}{x} \end{cases},$$

得 $f(x) = \frac{1}{a^2 - b^2} (a \sin x + b \sin \frac{1}{x}).$

【例 1.4】 设 $f(x+y, \frac{y}{x}) = x^2 - y^2 + \cos(xy)$, 求 $f(x, y)$.

【解】 令 $u = x+y, v = \frac{y}{x} \Rightarrow x = \frac{u}{1+v}, y = \frac{uv}{1+v}$, 则

$$\begin{aligned} f(u, v) &= (\frac{u}{1+v})^2 - (\frac{uv}{1+v})^2 + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2} \\ &= \frac{u^2(1-v)}{1+v} + \cos \frac{u^2 v}{(1+v)^2} \end{aligned}$$

故 $f(x, y) = \frac{x^2(1-y)}{1+y} + \cos \frac{x^2 y}{(1+y)^2} \quad (y \neq -1).$

2. 函数的性质

题型 I 函数奇偶性的判别

解题提示

判别函数奇偶性的方法:

(1) 主要依据奇偶性的定义. 有时也用其运算性质 (奇函数的代数和仍为奇函数; 偶函数的代数和仍为偶函数; 偶函数之积为偶函数; 偶数个奇函数之积为偶函数; 一个奇函数与一个偶函数之积为奇函数).

(2) $f(x) + f(-x) = 0$ 是判别 $f(x)$ 为奇函数的有效方法.

(3) 函数的奇偶性是相对于对称区间而言的, 若函数的定义域关于原点不对称, 则函数就无奇偶性可言.

【例 1.5】 判别下列函数的奇偶性:

(1) $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, 其中 $f(x)$ 为连续的偶函数.

(2) $F(x) = f(x) + \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt \right] du$, 其中 $f(x)$ 是连续的奇函数.

(3) $F(x) = \left(\frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} \right) f(x)$, 其中 $a > 0, a \neq 1, f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 且对任何 x, y 恒有 $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

【解】(1) $F(-x) = \int_0^{-x} f(t) dt \xrightarrow{\text{令 } t = -u} \int_0^x f(-u) (-du) \xrightarrow{\substack{f(x) \text{ 为} \\ \text{偶函数}}} - \int_0^x f(u) du,$

$$\therefore F(x) + F(-x) = \int_0^x f(t) dt - \int_0^x f(t) dt = 0,$$

$\therefore F(x)$ 为奇函数.

$$(2) F(x) = f(x) + \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt \right] du, \quad ①$$

$$F(-x) = f(-x) + \int_0^{-x} \left[\int_0^u f(t) dt \right] du, \quad ②$$

$$\therefore f(x) \text{ 为奇函数} \quad \therefore f(x) + f(-x) = 0, \quad ③$$

$$\text{又} \because \int_0^{-x} \left[\int_0^u f(t) dt \right] du \xrightarrow{\text{令 } u = -v} \int_0^x \left[\int_0^{-v} f(t) dt \right] (-dv) = - \int_0^x \left[\int_0^{-u} f(t) dt \right] du, \quad ④$$

由 ①, ②, ③, ④ 得

$$F(x) + F(-x) = \int_0^x \left[\int_0^u f(t) dt - \int_0^{-u} f(t) dt \right] du = \int_0^x \left[\int_{-u}^u f(t) dt \right] du = 0,$$

故 $F(x)$ 为奇函数.

$$(3) \text{ 令 } g(x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2},$$

$$\therefore g(x) + g(-x) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{a^{-x} - 1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{a^x - 1} + \frac{1}{2} - \frac{a^x}{a^x - 1} + \frac{1}{2} = 0,$$

$\therefore g(x)$ 为奇函数.

又 $\because f(x+y) = f(x) + f(y)$, 令 $y = 0$, 得 $f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$,

又显然有 $0 = f(0) = f[x + (-x)] = f(x) + f(-x)$,

$\therefore f(x)$ 为奇函数.

故 $F(x) = g(x)f(x)$ 为偶函数.

题型 II 求解给定函数的周期或周期性证明

解题提示 利用周期函数的定义及周期函数的运算性质求解或证明.

【例 1.6】设 $f(x)$ 是以 $T > 0$ 为周期的函数, 证明 $f(ax) (a > 0)$ 是以 $\frac{T}{a}$ 为周期的函数.

【证】令 $F(x) = f(ax)$, 由于

$$F\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left[a\left(x + \frac{T}{a}\right)\right] = f(ax + T) \xrightarrow{\substack{T \text{ 是} \\ f(x) \text{ 的周期}}} f(ax) = F(x),$$

故 $\frac{T}{a}$ 是 $f(ax)$ 的周期.

【例 1.7】设函数 $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的图形关于 $x = a, x = b$ 均对称 ($a \neq b$), 求证: $y = f(x)$ 是周期函数, 并求其周期.

【证】由题设有 $f(a+x) = f(a-x)$, $f(b+x) = f(b-x)$,
于是 $f(x) = f[a + (x-a)] = f[a - (x-a)] = f(2a-x) = f[b + (2a-x-b)]$
 $= f[b - (2a-x-b)] = f[x + 2(b-a)]$,
故 $f(x)$ 是周期函数, 其周期 $T = 2(b-a)$.

题型 III 函数 $f(x)$ 在某区间 I 上单调性的判别

解题提示 若没有言明函数 $f(x)$ 可导, 则用单调性定义判别; 若言明函数 $f(x)$ 可导, 则利用函数的一阶导数判别.

【例 1.8】设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x)$ 单调增加, 证明 $F(x) = \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t) dt$ 在 (a, b) 内单调增加.

【证】 $F'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t) dt + \frac{f(x)}{x-a} = -\int_a^x \frac{f(t)}{(x-a)^2} dt + \int_a^x \frac{f(x)}{(x-a)^2} dt$
 $= \int_a^x \frac{f(x) - f(t)}{(x-a)^2} dt$,

$\because (x-a)^2 > 0$ 且 $f(x)$ 单调增加, 当 $x > t$ 时, $f(x) - f(t) \geq 0$,

$\therefore F'(x) \geq 0$, 故 $F(x)$ 在 (a, b) 内单调增加.

题型 IV 函数有界性的判别

解题提示 证明或判别函数有界性的思路:

(1) 利用有界性定义.

(2) 闭区间上连续函数的有界性.

(3) 有极限数列必有界.

(4) $x \rightarrow x_0$ 时有极限的函数 $f(x)$ 在 x_0 的充分小邻域中必有界.

【例 1.9】设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续, 且 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (l 为有限数), 试证: $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

【证】 $\because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$, $\therefore$ 对于取 $\varepsilon = \frac{|l|}{2}$, $\exists X > a$,

当 $x > X$ 时, 恒有 $|f(x) - l| < \frac{|l|}{2}$,

又 $|f(x) - l| > |f(x)| - |l|$, 所以 $|f(x)| - |l| < \frac{|l|}{2}$,

即 $|f(x)| < \frac{3}{2}|l|$.

$\because f(x)$ 在 $[a, X]$ 上连续, 由闭区间上连续函数有界性, 可知 $\exists S$, 使 $|f(x)| < S, x \in [a, X]$.

取 $M = \max\{S, \frac{3}{2}|l|\}$, 则对 $\forall x \in [a, +\infty)$ 恒有 $|f(x)| \leq M$,

即 函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上有界.

函数的有界性:

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 数集 $X \subset D$. 若存在数 K_1

使 $f(x) \leq K_1$

对任 $-x \in X$ 都成立, 则称

函数 $f(x)$ 在 X 上有上界. K_1 称为 $f(x)$ 在 X 上的上确界.

【例 1.10】试证 $f(x) = e^{-x^2} \int_0^x te^{t^2} dt$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

【证】令 $g(x) = \int_0^x te^{t^2} dt$,

$$\because g(-x) = \int_0^{-x} te^{t^2} dt \stackrel{\text{令 } u=-t}{=} \int_0^x -ue^{(-u)^2}(-du) = \int_0^x ue^{u^2} du,$$

$\therefore g(x)$ 为偶函数. 因此 $f(x) = e^{-x^2}g(x)$ 也为偶函数, 所以只需证明 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上有界即可.

$$\because \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x te^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{x^2}}{2xe^{x^2}} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, $\exists X > 0$, 当 $x \in [X, +\infty)$ 时, 有

$$\left| f(x) - \frac{1}{2} \right| < \frac{1}{2}, \quad \text{即 } 0 < f(x) < 1.$$

又 $f(x)$ 在 $[0, X]$ 上连续, 于是, $\exists l > 0$, 使对 $\forall x \in [0, X]$, 恒有 $0 \leq f(x) \leq l$, 取 $M = \max\{1, l\}$, 则对 $\forall x \in [0, +\infty)$, 有 $0 \leq f(x) \leq M$. 因 $f(x)$ 为偶函数, 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有界.

3. 复合函数

解题提示

将两个或两个以上函数进行复合, 通常有三种方法: 代入法 (适用于初等函数的复合), 分析法 (适用于初等函数与分段函数的复合, 或两个分段函数的复合), 图示法 (适用于两个分段函数的复合)

【例 1.11】设 $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, 求 $f[f(x)]$, $f\left[\frac{1}{f(x)}\right]$.

$$\text{【解】 } f[f(x)] = \frac{1}{1-f^2(x)} = \frac{1}{1-\frac{1}{(1-x^2)^2}} = \frac{(1-x^2)^2}{x^2(x^2-2)},$$

$$f\left[\frac{1}{f(x)}\right] = \frac{1}{1-\left(\frac{1}{f(x)}\right)^2} = \frac{f^2(x)}{f^2(x)-1} = \frac{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^2-1} = \frac{1}{x^2(2-x^2)}.$$

【例 1.12】设 $f_n(x) = \underbrace{f(f(\cdots f(x)\cdots))}_{n \text{ 次}}$, 若 $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)]$.

$$\text{【解】 } f_2(x) = f[f(x)] = \frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+2x^2}},$$

$$f_3(x) = f[f_2(x)] = \frac{f_2(x)}{\sqrt{1+f_2^2(x)}} = \frac{x}{\sqrt{1+3x^2}},$$

比较以上两式可知 $f_n(x) = \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$ (由数学归纳法可证.)

$$\text{于是 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin[f_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \sin \frac{x}{\sqrt{1+nx^2}} = \frac{x}{|x|} \quad (x \neq 0).$$

【例 1.13】设 $f(x) = \begin{cases} e^x & x < 1 \\ x & x \geq 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \begin{cases} x+2 & x < 0 \\ x^2-1 & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】用分析法求解. 所谓分析法就是抓住最外层函数定义域的各区间段, 结合中间变量的表达式及中间变量的定义域进行分析, 从而得出复合函数的方法.

$$f[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{\varphi(x)} & \varphi(x) < 1 \\ \varphi(x) & \varphi(x) \geq 1 \end{cases}$$

① 当 $\varphi(x) < 1$ 时,

$$x < 0, \varphi(x) = x+2 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x < -1 \end{cases} \Rightarrow x < -1,$$

$$x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 < 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x < \sqrt{2};$$

② 当 $\varphi(x) \geq 1$ 时,

$$x < 0, \varphi(x) = x+2 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x < 0 \\ x \geq -1 \end{cases} \Rightarrow -1 \leq x < 0,$$

$$x \geq 0, \varphi(x) = x^2 - 1 \geq 1, \text{ 即 } \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 \geq 2 \end{cases} \Rightarrow x \geq \sqrt{2};$$

综上所述 有 $[\varphi(x)] = \begin{cases} e^{x+2} & x < -1 \\ x+2 & -1 \leq x < 0 \\ e^{x^2-1} & 0 \leq x < \sqrt{2} \\ x^2-1 & x \geq \sqrt{2} \end{cases}$.

【例 1.14】设 $f(x) = \frac{1}{2}(x + |x|)$, $\varphi(x) = \begin{cases} x & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$, 求 $f[\varphi(x)]$.

【解】图示法的解题程序: 1° 画出中间变量 $u = \varphi(x)$ 的图形; 2° 将 $y = f(u)$ 的分界点在 xOu 坐标面上画出 (这是若干条平行于 x 轴的直线); 3° 写出 u 在不同区间上 x 所对应的变化区间; 4° 将 3° 所得结果代入 $y = f(u)$ 中便得复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 的表达式及相应 x 的变化区间.

$$f[\varphi(x)] = \frac{1}{2}[\varphi(x) + |\varphi(x)|], \quad (*)$$

作出 $u = \varphi(x)$ 的图形, 图 1.1 所示, 以及 $f(u) = \frac{1}{2}(u + |u|)$ 的

分界点 $u = 0$ (xOu 平面上的 x 轴)

当 $x < 0$ 时, $u = x, (u < 0)$

当 $x \geq 0$ 时, $u = x^2, (u \geq 0)$

将以上所得结果代入 (*) 式, 得 $f[\varphi(x)] = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$

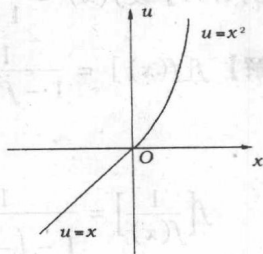


图 1.1

二、极限

1. 数列的极限

题型 I 已知数列的前几项数值及通项的表达式, 求数列的极限

解题提示

或者利用单调有界数列必有极限定理求解(求解程序: ① 判断极限的存在性 { 单调性, 方法可用数学归纳法或不等式的放缩法; ② 先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后通过解关于 l 的方程, 求得 l 的值, 从而得极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$). 或者利用数列极限的定义求解(先令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 然后在通项的两边取极限得出 l 的数值, 再证 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 的存在性. 此步通常是利用 $|x_n - l|$ 的逐步放大而得出其小于一个无穷小量).

【例 1.15】设 $x_1 = 2, x_2 = 2 + \frac{1}{x_1}, \dots, x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限

$$\Rightarrow l = 2 + \frac{1}{l} \Rightarrow l^2 - 2l - 1 = 0 \Rightarrow l = 1 \pm \sqrt{2},$$

$$\because \text{由题设可知 } x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n} > 2 \therefore l = 1 + \sqrt{2}$$

以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在:

$$|x_n - l| = \left| \left(2 + \frac{1}{x_{n-1}} \right) - \left(2 + \frac{1}{l} \right) \right| = \left| \frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{l} \right| = \frac{|x_{n-1} - l|}{l x_{n-1}} \quad (\because x_{n-1} = 2 + \frac{1}{x_{n-2}} > 2,$$

$$l = 2 + \frac{1}{l} > 2) < \frac{|x_{n-1} - l|}{4} < \frac{|x_{n-2} - l|}{4} / 4 = \frac{|x_{n-2} - l|}{4^2} < \frac{|x_{n-3} - l|}{4^3} < \dots < \frac{|x_1 - l|}{4^{n-1}}$$

$$= \frac{|2 - (1 + \sqrt{2})|}{4^{n-1}} = \frac{|1 - \sqrt{2}|}{4^{n-1}} = \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}},$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2} - 1}{4^{n-1}} = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0,$$

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2} + 1.$$

【例 1.16】设 $x_1 = 1, x_2 = 1 + \frac{x_1}{1+x_1}, \dots, x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【解】令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 在 $x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$ 的两边取 $n \rightarrow \infty$ 时的极限,

$$\Rightarrow l = 1 + \frac{l}{1+l} \Rightarrow l^2 - l - 1 = 0 \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{由题设可知 } l = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

以下证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在:

$$|x_n - l| = \left| \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} \right) - \left(1 + \frac{l}{1+l} \right) \right|$$

$$= \frac{|x_{n-1} - l|}{|(1+x_{n-1})(1+l)|} < \frac{|x_{n-1} - l|}{2(1+l)} < \cdots < \frac{|x_1 - l|}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{\frac{l}{1+l}}{2^{n-1}(1+l)} = \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2}$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{l}{2^{n-1}(1+l)^2} = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - l) = 0,$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

【另解】由题设可知 $x_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$),

$$x_2 - x_1 = \left(1 + \frac{x_1}{1+x_1}\right) - 1 = \frac{x_1}{1+x_1} > 0. \quad \text{于是 } x_2 > x_1.$$

设 $x_n > x_{n-1}$,

$$\begin{aligned} \text{则 } x_{n+1} - x_n &= \left(1 + \frac{x_n}{x_n+1}\right) - \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right) = \frac{x_n}{1+x_n} - \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} \\ &= \frac{x_n - x_{n-1}}{(1+x_n)(1+x_{n-1})} > 0, \end{aligned}$$

故 $\{x_n\}$ 单调增加.

$$\because x_n = 1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}} (\because x_{n-1} > 0) < 2 \quad \therefore \{x_n\} \text{ 有上界.}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在. 设其为 l , 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}\right), \text{ 即 } l = 1 + \frac{l}{1+l} \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ 由题设可知 } l \text{ 非负.}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$

【例 1.17】设 $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$, 其中 $a > 0, x_0 > 0$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

【证】 $\because x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n}) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}, \therefore \{x_n\}$ 有下界.

$$\text{又 } \because \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2}\right) = 1, \therefore \{x_n\} \text{ 单减,}$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 令 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = l$, 则由

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \text{ 可得 } l = \frac{1}{2}\left(l + \frac{a}{l}\right) \Rightarrow l = \sqrt{a},$$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$

【注】单调数列的极限既可用极限定义法, 又可用单调有界数列必有极限的定理去求解. 若数列不单调则只能用极限的定义法.

题型 II 求解 $n \rightarrow \infty$ 时, n 项和的极限

解题提示 方法有:

- (1) 特殊级数求和法.
- (2) 利用幂级数求和法.