高中数学

三合一

★ 新课标解读 ★
★ 研究性学习 ★
★ 奥赛起跑线 ★

师大附中专题

三角函数

◆学科主编→王树国
◆本册主编→罗培基

湖南师范大学出版社

SHIDA FUZHONG ZHUANTI

师大附中专题

三角函数

学科主编◇王树国
本册主编◇罗培基
本册副主编◇刘建华

湖南师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

三角函数 / 罗培基主编 .—长沙:湖南师范大学出版社,2003.4

(师大附中专题)

ISBN 7-81081-243-2/G·161

Ⅰ.三... Ⅱ.罗... Ⅲ.三角函数—中学—教学参考资料 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 106582 号

三角函数

罗培基　主编

◇全程策划:李　阳　黄道见

◇组稿编辑:李　阳　黄道见

◇学科主编:王树国

◇本册主编:罗培基

◇责任编辑:刘琼琳

◇责任校对:刘　琳

◇出版发行:湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山　邮编/410081

电话/0731.8853867　8872751　传真/0731.8872636

◇经销:湖南省新华书店

◇印刷:望城湘江印刷厂印刷

◇开本:890×1240　1/32

◇印张:5.5

◇字数:222 千字

◇版次:2003 年 4 月第 1 版　2004 年 4 月第 2 次印刷

◇印数:10001—20000 册

◇书号:ISBN 7-81081-243-2/G·161

◇定价:7.50 元

选择《师大附中专题》的理由

一、师大附中名师打造

全国各师范大学附中，多为国家示范重点学校. 集各师大附中名师，呈现先进的教育理念，科学的教学方法，名师伴读，事半功倍.

师大附中专题，示范中学实力.

二、三位一体知识呈现

师大附中专题在“知识呈现”上独具特色：

①重知识归纳（重点、基点、难点三点归纳）

②重方法导引（精讲、精导、精练三精导学）

③重高考点拨（专题知识高考考点与考向）

三、新课标理念闪亮抢滩

新课程标准将综合实践活动列为中学必修课程，可以预见，在高考及竞赛活动中都将得以体现. 专辟“综合应用与研究性学习”一篇，可谓一大亮点，重点探讨研究性学习与高考的关系，并精选各师大附中典型研究性学习案例，能充分满足教学与备考需要.

四、竞赛高考紧密连线

归纳专题竞赛热点，剖析典型赛题，点拨解题方法，精选示范赛题. 引导学生深化课堂知识结构，熟悉奥赛基本规则，从容应付高考提高题，也为尖子生的脱颖而出提供了“土壤”，可谓深化专题内容又一大特色.

《师大附中专题》丛书策划组

目录

上篇 基础部分

中篇 思维拓展与研究性学习

下篇 竞赛点津

上篇　基础部分

专题知识框架

- 三角函数
  - 任意角的三角函数
    - 角的推广、弧度制
    - 任意角的三角函数
    - 同角三角关系
    - 诱导公式
    - 已知三角函数值求角
  - 三角函数的图象和性质
    - 三角函数的图象和性质
    - 函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象
  - 两角和与差的三角函数
    - 两角和与差的三角函数
    - 倍角与半角的三角函数
    - 正弦定理、余弦定理

高考考点与要求

1. 掌握任意角的正弦、余弦、正切的定义，掌握同角三角函数的基本关系及诱导公式.

2. 掌握两角和与差的正弦、余弦、正切公式及二倍角公式，通过公式的推导，了解它们的内在联系，从而培养逻辑推理能力.

3. 能正确运用三角公式，进行简单三角函数式的化简、求值和恒等证明.

4. 掌握正弦、余弦、正切函数图象的性质，会用“五点法”作图.

5. 掌握正弦定理、余弦定理，并能运用它们解斜三角形.

本专题高考考向

综观近几年的高考试题，对三角函数考查频率最高的是任意角的三角函数，三角函数的图象和性质，三角函数的求值问题. 两角和与差的三角函数是过去的 10 年高考必考的内容之一，试题的形式是“选择、填空、解答”俱全；试题考查的知识点较多，而且通过一个题目考查多个知识点的题目呈上升趋势，试题的综合性有所加强. 高考中三角所占分数为 13% 左右，大多都是容易题和中档题. 因此我们要立足课本，紧扣考纲，狠抓基础.

第一讲

角的概念的推广、弧度制

三点归纳

◆基点　角的概念.

◆重点　象限角、角度与弧度的转换.

◆难点　角的集合表示.

三精导学

◆精讲

1. 任意角的形成

在平面几何中,角是由一点引出的两条射线所组成的图形,其值为 $0°\sim360°$,为了研究问题的需要,我们把角的概念加以推广,推广的方法是把角看成旋转的量,大小是任意的.一个角可以看成由一条射线绕着它的端点旋转而成的.如图 1-1 所示,平面上一条射线 OA 绕它的端点 O 旋转到 OB 处便形成了角 α,旋转开始时的射线

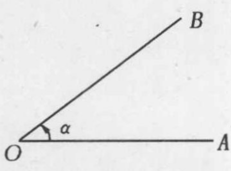

图 1-1

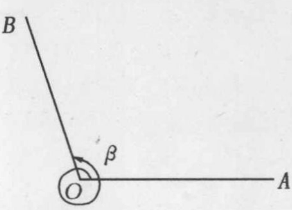

图 1-2

OA 叫做角 α 的始边,在始边逆时针旋转第一圈的过程中形成了 $0°\sim360°$的所有的角,在继续旋转第二圈的过程中,形成了 $360°\sim720°$的所有的角(如图 1-2 所示),继续旋转下去可以形成任意大的角.

2. 正角、负角和零角

按逆时针方向旋转形成的角叫正角，按顺时针方向旋转形成的角叫负角，当射线没有任何旋转时，形成的角叫零角.

3. 象限角

角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的正半轴重合，角的终边落在第几象限，就把这个角称为第几象限的角，角的终边落在坐标轴上，就认为这个角不属于任何象限.

第一象限的角的集合：$\{x|k\cdot360^\circ<x<k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

第二象限的角的集合：$\{x|k\cdot360^\circ+90^\circ<x<k\cdot360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

第三象限的角的集合：$\{x|k\cdot360^\circ+180^\circ<x<k\cdot360^\circ+270^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

第四象限的角的集合：$\{x|k\cdot360^\circ-90^\circ<x<k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

右半平面角的集合：$\{x|k\cdot360^\circ-90^\circ<x<k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

4. 轴线角

角的终边在坐标轴上的角称为轴线角.

终边落在坐标轴上的角的集合：$\{x|k=k\cdot90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边落在 x 轴上的角的集合：$\{x|x=k\cdot180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边落在 x 轴正半轴上的角的集合：$\{x|x=k\cdot360^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边落在 x 轴负半轴上的角的集合：$\{x|x=k\cdot360^\circ+180^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边落在 y 轴上的角的集合：$\{x|x=k\cdot180^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边落在 y 轴正半轴上的角的集合：$\{x|x=k\cdot360^\circ+90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$；

终边落在 y 轴负半轴上的角的集合：$\{x|x=k\cdot360^\circ-90^\circ,k\in\mathbf{Z}\}$.

5. 终边相同的角

所有与 α 角终边相同的角，连同 α 角在内，可以用式子 $k\cdot360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}$ 来表示，与 α 角终边相同的角的集合可记作 $\{\beta|\beta=k\cdot360^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

6. 终边在同一直线上的角

与 α 终边在同一直线上的角：$\{x|x=k\cdot180^\circ+\alpha,k\in\mathbf{Z}\}$.

7. 弧度

$$\begin{cases}\text{正角}\leftrightarrow\text{正数}.\\ \text{负角}\leftrightarrow\text{负数}.\\ \text{零角}\leftrightarrow 0.\end{cases}$$

$|\alpha|=\dfrac{l}{r}$（其中 r 表示圆的半径，l 表示弧长，α 表示这段弧所对圆心角的弧度数）.

8. 度和弧度的换算

$360^\circ=2\pi$ 弧度.

$180^\circ=\pi$ 弧度.

$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ 弧度.

1 弧度$=(\frac{180}{\pi})^{\circ}\approx 57.30^{\circ}$.

◆精导

题型1 角的概念问题

例1 若角α、β的终边相同，则$\alpha-\beta$的终边在( )上.

A. x轴的正半轴　　B. y轴的正半轴

C. x轴的负半轴　　D. y轴的负半轴

分析 根据终边相同的角的形式，先写出α与β的关系式，然后就关系式进行讨论.

解 ∵ 角α,β的终边相同，∴ $\alpha=2k\pi+\beta(k\in\mathbf{Z})$.

∴ $\alpha-\beta=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$,

∴ $\alpha-\beta$的终边在x轴的正半轴上. 故本题应选A.

例2 已知角α为第一象限的角，确定角$\frac{\alpha}{2}$所在的象限，并画出其变化区域.

解 首先写出角α的一般形式：$2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，两边同时除以2，得$k\pi<\frac{\alpha}{2}<k\pi+\frac{\pi}{4}(k\in\mathbf{Z})$.

(1)当k为奇数时，设$k=2m+1(m\in\mathbf{Z})$，则

$(2m+1)\pi<\frac{\alpha}{2}<(2m+1)\pi+\frac{\pi}{4}(m\in\mathbf{Z})$,

此时角$\frac{\alpha}{2}$是第三象限的角.

(2)当k为偶数时，设$k=2m(m\in\mathbf{Z})$，则

$2m\pi<\frac{\alpha}{2}<2m\pi+\frac{\pi}{4}(m\in\mathbf{Z})$,

此时角$\frac{\alpha}{2}$是第一象限的角.

综上，角$\frac{\alpha}{2}$是第一象限或第三象限的角.

其变化区域如图1-3中阴影部分，这样的区域称为Ⅰ、Ⅲ象限的前半区域.

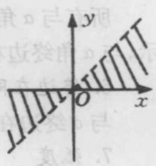

图1-3

点评 (1)本题结论有记忆价值. 类似地：①当α为第二象限的角时，$\frac{\alpha}{2}$在Ⅰ、Ⅲ象限后半区域；②当α为第三象限的角时，$\frac{\alpha}{2}$在Ⅰ、Ⅳ象限的前半区域；③当α为第四象限的角时，$\frac{\alpha}{2}$在Ⅰ、Ⅳ象限的后半区域. (2)已知α角是第一象限的角(或其他象限的角)，问$\frac{\alpha}{3}$的终边的位置，应就式子$\frac{2k\pi}{3}<\frac{\alpha}{3}<\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$讨论$k$的取值，确

定$\frac{\alpha}{3}$终边的位置，其他情况类似.

例 3　终边与坐标轴重合的角θ的集合是(　　).

A. $\{\theta|\theta=2k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{\theta|\theta=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\theta|\theta=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\{\theta|\theta=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

分析　A、B、D依次是终边在x轴的正半轴上、x轴上、y轴上的角的集合. 对$\theta=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$分类讨论如下：

当k是偶数时，设$k=2m(m\in\mathbf{Z})$，则$\theta=m\pi$；

当k是奇数时，设$k=2m+1(m\in\mathbf{Z})$，则$\theta=m\pi+\frac{\pi}{2}$.

综上，C是B与D的并集.

解　终边与x轴重合的角θ的集合是$\{\theta|\theta=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$，终边与$y$轴重合的角$\theta$的集合是$\{\theta|\theta=k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$，从而终边与坐标轴重合的角$\theta$的集合是$\{\theta|\theta=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$. 故本题应选C.

题型2　找出终边位于指定区间的一切角

例 4　若β的终边与60°角的终边相同，在[0°，360°)内，终边与$\frac{\beta}{3}$角的终边相同的角为________.

分析　用终边相同的角表示β，然后求$\frac{\beta}{3}$，同时考虑到角的范围和k为整数的限制条件.

解　$\because$　$\beta=k\cdot 360°+60°(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore$　$\frac{\beta}{3}=k\cdot 120°+20°(k\in\mathbf{Z})$.

又$\frac{\beta}{3}\in[0°,360°)$，$\therefore$　$0°\leqslant k\cdot 120°+20°<360°(k\in\mathbf{Z})$，

$\therefore$　$-\frac{1}{6}\leqslant k<\frac{17}{6}$，$\therefore$　$k=0,1,2$.

此时分别得$\frac{\beta}{3}$为20°，140°，260°. 故与$\frac{\beta}{3}$终边相同的角为20°，140°，260°.

题型3　公式$|\alpha|=\frac{l}{r}$的应用问题

例 5　已知扇形的周长为20 cm，问扇形的圆心角α为何值时扇形的面积S最大，并求出S的最大值.

分析　本题运用扇形面积公式$S=\frac{1}{2}lR$及l与R的关系式，写出S用R表示的

式子，然后就式子讨论 S 的最大值以及这时的 α 值.

解 设扇形的半径为 R cm，依题意，有

$l=20-2R, S=\frac{1}{2}lR$,

由上面两个式子，得 $S=\frac{1}{2}(20-2R)R$,

即 $S=-(R-5)^2+25$.

由上式知，当 $R=5$ cm 时，S 有最大值 25 cm^2，此时 $l=10$ cm，$|\alpha|=\frac{l}{R}=\frac{10}{5}=2$，

$\alpha=\pm 2$（负值舍去）.

综上，当 $\alpha=2$ 时，扇形的面积 S 最大，且最大值为 25 cm^2.

例 6 一个扇形$\overset{\frown}{OAB}$的面积是 1 cm^2，它的周长是 4 cm，求圆心角的弧度数和弦长$|AB|$.

解 设扇形的半径为 r，圆心角为 α，则

由已知条件，得 $\begin{cases}\frac{1}{2}\alpha r^2=1,\\ 2r+\alpha r=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\alpha=2,\\ r=1.\end{cases}$

$\therefore$ $|AB|=2\sin 1$(cm).

$\therefore$ 圆心角的弧度数为 2，弦长$|AB|$为 $2\sin 1$cm.

◆精练

双基训练

一、选择题

1. 若集合 $M=\{$第一象限角$\}$，$N=\{$小于 180°的角$\}$，则 $M\cap N=$(A).

A. M　　B. N　　C. {锐角}　　D. 以上都不对

2. 下列角中终边与 330°相同的角是(　　).

A. $-630°$　　B. $-1830°$　　C. 30°　　D. 990°

3. 以原点为角的顶点，x 轴的正方向为角的始边，终边在坐标轴上的角等于(D).

A. 0°，90°或 270°　　B. $k\cdot 360°, k\in \mathbf{Z}$　　C. $k\cdot 180°, k\in \mathbf{Z}$　　D. $k\cdot 90°, k\in \mathbf{Z}$

4. 若 α 是第四象限角，则 $180°-\alpha$ 所在象限是(1).

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

5. 角 α 与 β 的终边互相垂直，则 α 与 β 的关系是(　　).

A. $\beta=\alpha+90°$　　B. $\beta=\alpha\pm 90°$

C. $\beta=k\cdot 360°+\alpha+90°, k\in \mathbf{Z}$　　D. $\beta=k\cdot 360°+\alpha\pm 90°, k\in \mathbf{Z}$

6. $\alpha=-3$，则 α 的终边在(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

7. 终边在 y 轴上的角的集合是(　　).

A. $\{\alpha|\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$　　B. $\{\alpha|\alpha=k\pi,k\in\mathbf{Z}\}$

C. $\{\alpha|\alpha=\frac{k\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$　　D. $\{\alpha|\alpha=k\pi-\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$

8. 将分针拨慢 10 分钟，则分针转过的弧度数是(　　).

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $-\frac{\pi}{3}$　　C. $\frac{\pi}{6}$　　D. $-\frac{\pi}{6}$

9. 把$-1485°$化成$2k\pi+\alpha(0\leqslant\alpha<2\pi,k\in\mathbf{Z})$的正确形式是(　　).

A. $-8\pi+\frac{\pi}{4}$　　B. $-8\pi-\frac{7}{4}\pi$　　C. $-10\pi-\frac{\pi}{4}$　　D. $-10\pi+\frac{7}{4}\pi$

10. 若 2 rad 的圆心角所对的弧长为 4 cm，则这个圆心角所夹扇形的面积是(　　).

A. 4 cm^2　　B. 2 cm^2　　C. 4π cm^2　　D. 2π cm^2

11. 一弓形的弧所对圆心角是$\frac{\pi}{3}$，弓形的弦长为 2 cm，则弓形的面积为(　　).

A. $\frac{2\pi}{3}-\sqrt{3}$　　B. $\frac{4\pi}{3}-\sqrt{3}$　　C. $\frac{2\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$

12. 在以原点为圆心，半径为 1 的单位圆中，一条弦 AB 的长度为$\sqrt{3}$，AB 所对的圆心角为α，则α的弧度数是(　　).

A. $\alpha=\sqrt{3}$　　B. $\alpha=\frac{2\pi}{3}$　　C. $|\alpha|=\frac{2\pi}{3}$　　D. $|\alpha|=\sqrt{3}$

二、填空题

13. $-2002°$是第________象限的角.

14. 已知角α的终边落在直线$y=x$上，那么α可以表示成为__________.

15. 圆的半径变为原来的$\frac{1}{2}$，而弧长不变，该弧所对的圆心角是原来的______倍.

16. 半径为 4 cm 的扇形，若它的周长等于弧所在半圆周的长，则这个扇形的面积是__________.

三、解答题

17. 已知四边形的四个内角之比为 1∶3∶5∶6，分别用角度和弧度将这些内角的大小表示出来.

18. 半径为 1 的圆的圆心位于坐标原点，点 P 从点 $A(1,0)$ 出发，依逆时针方向等速沿单位圆周旋转，已知 P 点在 1 秒钟内转过的角度为$\theta(0<\theta<\pi)$，经过 2 秒钟到达第三象限，经过 14 秒钟又回到出发点 A 处，则θ的值为多少？

19. 若角θ的终边与 168°角的终边相同，求在[0°,360°)内终边与$\frac{\theta}{3}$角的终边相同的角.

20. 自行车大链轮有 48 齿，小链轮有 20 齿，当大链轮转过一周时，求小链轮转过的角度.

21. 扇形的周长为定值 l，该扇形具有怎样的中心角时面积最大？

22. 单位圆上有两个动点 M,N,同时从 $P(1,0)$出发沿圆周运动,M 点按逆时针方向转$\frac{\pi}{6}$ rad/s,N 点按顺时针方向向转$\frac{\pi}{3}$ rad/s,试求它们出发后第三次相遇时的位置及各自走过的弧长.

答案与提示

一、1. D　2. B　3. D　4. C　5. D　6. C　7. D　8. A　9. D　10. A　11. A　12. C

二、13. 一　14. $180°k+45°, k\in \mathbf{Z}$　15. 2　16. $8\pi-16$

三、17. 设四个角分别为 $\alpha,3\alpha,5\alpha,6\alpha$,则 $\alpha+3\alpha+5\alpha+6\alpha=360°$,$\alpha=24°$.

四个内角分别为 24°,72°,120°,144°,其弧度分别为$\frac{2}{15}\pi,\frac{2}{5}\pi,\frac{2}{3}\pi,\frac{4}{5}\pi$.

18. ∵　$0<\theta<\pi$,且 $2k\pi+\pi<2\theta<2k\pi+\frac{3\pi}{2}(k\in \mathbf{Z})$,

∴　$k=0$,且$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3}{4}\pi$.

又 $14\theta=2n\pi(n\in \mathbf{Z})$,∴　$\theta=\frac{n\pi}{7}$.

∵　$\frac{\pi}{2}<\frac{n\pi}{7}<\frac{3\pi}{4}$,∴　$\frac{7}{2}<n<\frac{21}{4}$,

∴　$n=4$ 或 5,

故 $\theta=\frac{4\pi}{7}$或$\frac{5\pi}{7}$.

19. ∵　$\theta=k\cdot 360°+168°(k\in \mathbf{Z})$,∴　$\frac{\theta}{3}=k\cdot 120°+56°(k\in \mathbf{Z})$.

依题意,$0°\leqslant k\cdot 120°+56°<360°$,∴　$k=0,1,2$,即在$[0°,360°)$,$\frac{\theta}{3}$为 56°,176°,296°.

20. 当大链轮转过一周时,转过了 48 个齿,小链轮同时也转过了 48 个齿,∴　$\frac{48}{20}=2.4$ 周,∴　小链轮转过的角度是 $360°\times 2.4=864°$.

21. 设扇形的半径为 R,则弧长为 $l-2R$,扇形面积 $S=\frac{1}{2}(l-2R)\cdot R=-R^2+\frac{1}{2}lR$,

∴　当 $R=\frac{1}{4}l$ 时,扇形的面积最大,此时 $\theta=2$,即中心角为 2 弧度.

22. M、N 两点每相遇一次时,走过的弧长的和是一个圆周长 2π,因此,当它们第三次相遇时,共走过弧长 6π. 设 M,N 两点走过的弧长分别为 l_1 和 l_2,从出发到第三次相遇经过了 t s,则 $l_1=\frac{\pi}{6}t, l_2=\frac{\pi}{3}t$,∴　$\frac{\pi}{6}t+\frac{\pi}{3}t=6\pi$,∴　$t=12(\mathrm{s})$,∴　$l_1=2\pi, l_2=4\pi$.

由此可知,第三次相遇在点 P 处,M,N 两点各自走过的弧长分别为 2π 和 4π.