中学 奥林匹克 全国竞赛 丛书

高中数学
奥林匹克　全国竞赛
基础教程及应试指导

顾问　苏步青
主编　刘鸿坤

光明日报出版社

中学数学奥林匹克全国竞赛基础教程及应试指导

（高中分册）

顾　问　苏步青

主　编　刘鸿坤

编　著　（即编委　以姓氏笔划为序）

叶声扬　冯志刚

刘鸿坤　李大元

李家生　乔　理

余应龙　顾鸿达

康士凯　熊　斌

(京)新登字 101 号

中学数学奥林匹克全国竞赛基础教程及应试指导

高中分册

☆

光明日报出版社出版发行
(北京永安路 106 号)
邮政编码:100050
电话:3017733—225
新华书店北京发行所经销
北京市平谷玉福印刷厂印刷
*
787×1092　1/32　印张 17.25　字数 380 千字
1993 年 12 月第 1 版　1993 年 12 月第 1 次印刷
印数:1—10,050 册
ISBN 7—80091—297—3/G·604
定价:9.20 元

前　　言

自 1894 年匈牙利首次举行中学生数学竞赛以来，已将近一百年了。国际数学奥林匹克(IMO)迄今为止也已举办了 33 届，而且规模正在不断扩大，每年都有五、六十个国家和地区的选手参加，几乎所有的发达国家都参与了这项活动。

数学竞赛之所以在各国都受到了普遍的重视，是由于数学竞赛是选拔和培养人材的一种有效途径，它活跃了学校的课外活动，促进了初等数学的研究，为数学教育改革提供了一块试验田。在我国，随着中国选手在 IMO 中多次荣获世界第一，极大地鼓舞了全国广大师生，数学竞赛活动必将在我国深入持久地开展下去。

本书是作者们在多年从事数学竞赛的命题和培训工作的基础上，结合现行高中数学教学大纲和数学竞赛大纲编写而成的。全书分代数、几何、数论、组合、常用解题方法与技巧五个部分 41 讲，系统地介绍了高中数学竞赛所要用到的知识、方法和技能。书中的例、习题大部分选自最新的国内外数学竞赛，也有一些是作者们自拟的，希望本书能对数学爱好者有所帮助和启迪。

参加本书编写的是全体编委成员：叶声扬、冯志刚、刘鸿坤、李大元、李家生、乔理、余应龙、顾鸿达、康士凯、熊斌，最后由刘鸿坤修改审定。

在编写过程中，尽管全体编写人员作了很大的努力，力求使本书完美，然而错误是难免的，恳请读者不吝赐教。

编著

一九九三年七月

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

目　录

代数

几何

数论

组合

常用解题方法与技巧

第1讲 集合

集合是数学中最基本的概念，它是一个原始概念，即不能定义，只能描述，所谓集合，就是具有共同性质的一些事物的总体。组成集合的事物称为该集合的元素，本讲我们将介绍有关集合的概念、运算及集合的划分。

1. 集合的基本概念

设A是一个集合，a是集合A中的元素，将这一事实记作$a \in A$，读做a属于A；如果a不是集合A中的元素，那么记作$a \notin A$，读做a不属于A。

有限个元素a_1、a_2、…a_n做成的集合，称为有限集，记作$\{a_1、a_2、\cdots a_n\}$；无限个元素做成的集合，称为无限集。

特别地，不含元素的集合称为空集，记作$\varnothing$，一个元素a做成的集合，记作$\{a\}$。

根据上面的介绍，描述一个集合全体成员的方法之一是把该集合的所有元素列成一表，在许多情况下，当集合中的元素具有一些共同的性质时，我们可以用这个集合中元素的性质来描述集合的全体成员。例如，设$S=\{2,4,6,8,10\}$，可用S是不大于10的所有正偶数的集合来说明S中的元素，用记号$S=\{x \mid x$ 是不大于10的正偶数$\}$来表示。

一般地，用记号$\{x \mid x$ 具有某些性质$\}$表示具有某些性质的对象的集合。

例如，全体偶数所成集合M，可以写成

$$M=\{x \in Z \mid x=2n, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}$$

其中Z表示整数集。

又如，给定 n，令 $A(n)=\{a\in Z^+ \mid a$ 是质数，且 a 整除 $n\}$

显然，我们有 $A(1)=\varnothing$，$A(2)=\{2\}$，$A(6)=\{2,3\}$，…。如果 p 是质数，那么 $A(p)=\{p\}$。

必须指出，以集合作为另一个集合的元素是完全可以的。例如，集合 $\{\{a,b,c\},d\}$ 包含两个元素 $\{a,b,c\}$ 和 d；$\{a,\{a\},\{\{a\}\}\}$ 是三个不同元素 a，$\{a\}$，$\{\{a\}\}$ 所组成的集合。同样地，集合 $\{\varnothing\}$ 包含一个元素——空集；集合 $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$ 包含两个元素——一个空集和一个仅以空集作为其唯一元素的集合。

给定两个集合 A 和 B，如果 A 的每一个元素也是 B 的一个元素，那么我们说 A 是 B 的**子集**，记作 $A\subseteq B$。

例如，集合 $\{a,b\}$ 是集合 $\{y,x,b,c,a\}$ 的子集，但不是集合 $\{a,c,d,e\}$ 的子集。

对任何集合 A，A 是 A 的子集。

空集是任何集合的子集。

当我们所讨论的集合都是某一集合的子集时，这一集合就称为**全集**，记作 E。

如果两个集合 A 和 B 包含相同的元素，那么称这两个集合是**相等**的，记作 $A=B$。

例如，两个集合

$A=\{x \mid x$ 是不大于 10 的正偶数$\}$

$B=\{x \mid x=y+z$，这里 $y\in\{1,3,5\}$，$z\in\{1,3,5\}\}$ 是相等的，一般地，我们可以推得：

对于任意两个集合 A，B，$A=B$ 的充分必要条件是

$A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$

设 A 是 B 的子集，如果 A 与 B 不相等，即在 B 中至少有一个元素不属于 A，那么称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$。

例如，集合 $\{a,b\}$ 是集合 $\{y,x,b,c,a\}$ 的真子集。

如果给定集合 A，由集合 A 的所有子集为元素组成的集合，~~那么~~称为集合 A 的幂集，记作$\varnothing(A)$。

例如，设 $A=\{a,b,c\}$，那么

$\varnothing(A)=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{c\},\{a,b\},\{b,c\},\{c,a\},\{a,b,c\}\}$。

一般地，如果有限集合 A 有 n 个元素，那么其幂集$\varnothing(A)$有 2^n 个元素。

这是因为 A 的所有由 k 个元素组成的子集数为从 n 个元素中取 k 个的组合数，即

$$C_n^k=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

另外，因$\varnothing\subseteq A$，所以$\varnothing(A)$的总数 N 可表示为

$$N=1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k$$

但又因 $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k y^{n-k}$

令 $x=y=1$，$2^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k$

因此$\varnothing(A)$的元素个数是 2^n

〔**例 1**〕 对$\{1,2,\cdots,n\}$及其每一非空子集，定义一个唯一确定的“交替和”如下：按照递减的次序重新排列该子集，然后从最大的数开始交替地减或加后继的数，（例如，$\{1,2,4,6,9\}$的“交替和”是 $9-6+4-2+1=6$，$\{5\}$的“交替和”就是 5），对 $n=7$，求所有这种“交替和”的总和。

〔**解**〕 把$\{1,2,3\cdots,n\}$的所有子集（包括本身及空集）分成甲、乙两类，凡子集中含有元素 n 的归甲类，而不含 n 的归乙类，这样，如果甲类中有集合$\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}$，那么乙类中就有集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_k\}$反之亦然，即

$$\{n,a_1,a_2,\cdots,a_k\}\leftrightarrow\{a_1,a_2,\cdots a_k\},$$

而该两集合的“交替和”之和为 n，因此所有“交替和”的总和，就是甲类中集合的幂集的元素个数乘以 n，即

$$n\cdot(C_{n-1}^{0}+C_{n-1}^{1}+\cdots+C_{n-1}^{n-1})=n\cdot 2^{n-1}$$

当 n＝7 时，得所有这种“交替和”的总和是 448。

2. 集合的运算

(1)集合的交 设任意两个集合 A 和 B，由集合 A 和 B 的所有共同元素组成的集合，称为 A 和 B 的交集，记作 $A\cap B$。

例如，设 $A=\{0,2,4,6,8,10\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6\}$，那么 $A\cap B=\{2,4,6\}$

又如，设 A 是所有被 K 除尽的整数的集合，B 是所有被 L 除尽的整数的集合，那么 $A\cap B$ 是被 K 与 L 最小公倍数除得尽的整数的集合。

〔**例** 2〕 设 $A\subseteq B$，求证 $A\cap C\subseteq B\cap C$

〔**证明**〕 如果 $X\in A$，那 $X\in B$，对任一 $X\in A\cap C$，那么

$X\in A$ 且 $X\in C$，即 $X\in B$ 且 $X\in C$

所以 $X\in B\cap C$

因此 $A\cap C\subseteq B\cap C$

集合的交运算具有以下性质：

$A\cap A=A$

$A\cap\varnothing=\varnothing$

$A\cap E=A$

$A\cap B=B\cap A$

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

此外，从交的定义还可以得到

$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$

如果集合 A，B 没有共同的元素，那么可写为 $A\cap B=\varnothing$，

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

此时称 A 与 B 不相交。

〔**例** 3〕 已知 A、B、M、N 为非空集，$A\cap B=\varnothing$，

$M=\{A$ 的真子集$\}$，$N=\{B$ 的真子集$\}$，求 $M\cap N$。

〔**解**〕 因为 $A\cap B=\varnothing$，所以 A 的非空真子集必不是 B 的子集，反之亦然；只有 $\varnothing$ 既是 A 的真子集又是 B 的真子集。

因此 $$M\cap N=\{\varnothing\}$$

因为集合交的运算满足结合律，所以 n 个集合 $A_1,A_2,\cdots,An$ 的交可记作

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\bigcap_{i=1}^{n}A_i。$$

例如，$A_1=\{1,2,8\}$，$A_2=\{2,8\}$，$A_3=\{4,8\}$，那么

$$\bigcap_{i=1}^{3}A_i=\{8\}$$

〔**例** 4〕 已知集合 $S\{0,1,2\cdots,9\}$，设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是集合 S 的非空子集，且其中任意两个子集的交至多含有两个元素，说出 k 可取的最大值，并证明你的结论。

〔**解**〕 设 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是所求的 k 个子集，不妨假定其中每一 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 至多只含 3 个元素，这是因为如果某一 A_i 含有 4 个以上元素，那么它的任一个三元子集必不在 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 之中，于是可以用任意一个三元素子集代替它。

这样，所有含有一个元素，二个元素，三个元素的子集的全体即为所求。

因此 $$R_{max}=C_{10}^1+C_{10}^2+C_{10}^3=175$$

(2)集合的并 设任意两个集合 A 和 B，所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合，称为 A 和 B 的并集，记作 $A\cup B$。

例如，设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{2,4,5\}$，那么

$$A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$$

集合并的运算具有以下性质：

$$A\cup A=A$$

$$A\cup E=E$$

$$A\cup\varnothing=A$$

$$A\cup B=B\cup A$$

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$$

此外，从并的定义还可以得到

$$A\subseteq A\cup B, B\subseteq A\cup B$$

〔**例** 5〕 设 $A\subseteq B, C\subseteq D$，那么 $A\cup C\subseteq B\cup D$

〔**证明**〕 对任意 $x\in A\cup C$，那么有 $x\in A$ 或 $x\in C$。

如果 $x\in A$，由 $A\subseteq B$，那么 $x\in B$，

因此 $x\in B\cup D$

如果 $x\in C$，由 $C\subseteq D$，那么 $x\in D$

因此 $x\in B\cup D$

所以 $A\cup C\subseteq B\cup D$

同理可证 $A\subseteq B\Rightarrow A\cup C\subseteq B\cup C$。

〔**例** 6〕 设 $M=\{(x,y)\mid |xy|=1, x>0\}$，

$N=\{(x,y)\mid \operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\pi\}$。

求 $M\cup N$。

〔**解**〕 $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}y=\pi$ ①

即 $\operatorname{arctg}x=\pi-\operatorname{arcctg}y$，

所以 $\operatorname{tg}\operatorname{arctg}x=\operatorname{tg}(\pi-\operatorname{arcctg}y)$，

因此 $x=-\dfrac{1}{y}$ ②

如果②成立，当 $x>0, y<0$ 时，有

$\operatorname{arctg}x\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\pi-\operatorname{arcctg}y\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，可知①式不成立。

所以 $N=\{(x,y)\mid xy=-1, x>0\}$

而 $M=\{(x,y)\mid xy=-1 或 1, x>0\}$

所以 $N\subset M$

因此 $M\cup N=M$

因为集合的并运算满足结合律，所以对于 n 个集合 A_1，A_2，…，A_n 的并可记作

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$$

例如，设 $A_1=\{1,2,3\}$，$A_2=\{3,8\}$，$A_3=\{2,6\}$，那么

$$\bigcup_{i=1}^{3}A_i=\{1,2,3,6,8\}$$

设 A、B、C 为三个集合，那么下列分配律成立：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C) \quad ①$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C) \quad ②$$

〔**证明**〕 ①设 $S=A\cap(B\cup C)$，$T=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

如果 $x\in S$，那么 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$，即 $x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in A$ 且 $x\in C$，$x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，即 $x\in T$。

所以 $S\subseteq T$。

反之，如果 $x\in T$，那么 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，$x\in A$ 且 $x\in B$ 或 $x\in A$ 且 $x\in C$，即 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$，于是 $x\in S$，所以 $T\subseteq S$。

因此 $T=S$

②的证明完全与①类似。

设 A，B 为任意两个集合，那么下列关系式成立；

$$A\cup(A\cap B)=A \quad ③$$

$$A\cap(A\cup B)=A \quad ④$$

这就是著名的吸收律。

(3)集合的差集 设 A、B 为任意两个集合，所有属于 A 而不属于 B 的一切元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**，记

作 $A-B$。

〔**例** 7〕 设 $A=\{2,5,6\}$，$B=\{1,2,4,7,9\}$，求 $A-B$

〔**解**〕 $$A-B=\{5,6\}$$

〔**例** 8〕 设 A 是质数集合，B 是奇数集合，求 $A-B$。

〔**解**〕 $$A-B=\{2\}。$$

(4)集合的余集　设 E 为全集，对任一集合 A 关于 E 的差集 $E-A$，称为集合 A 的余集，记作 $\overline{A}$。

例如，令 $E=\{a,b,c,d,e\}$，$A=\{a,b\}$，于是 $\overline{A}=\{c,d,e\}$，由余集的定义可知：

$(A)=A$，$\overline{E}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=E$，

$A\cup\overline{A}=E$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$

设 A、B 为任意两个集合，那么下列关系式成立：

$$(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B} \qquad ⑤$$

$$(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cup\overline{B} \qquad ⑥$$

〔**证明**〕 ⑤ $(\overline{A\cup B})=\{x\mid x\in(\overline{A\cup B})\}$

$$=\{x\mid x\notin A\cup B\}$$

$$=\{x\mid(x\notin A)或(x\notin B)\}$$

$$=\{x\mid(x\in\overline{A})或(x\in\overline{B})\}$$

$$=\overline{A}\cap\overline{B}$$

⑥的证明与⑤类似

(5)集合的对称差 设 A、B 为任意两个集合，A 和 B 的对称差，记作 $A\oplus B$，它是包含所有属于 A 或属于 B，但是不同时属于两者的元素的集合，即

$$A\oplus B=(A\cup B)-(A\cap B)$$

由对称差的定义可知：

$A\oplus B=B\oplus A$，$A\oplus\varnothing=A$

$A\oplus A=\varnothing$，　$A\oplus B=(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap B)$

$$(A\oplus B)\oplus C=A\oplus(B\oplus C)$$

例如，在一门课程中，一个学生如果两次测验都好的得A，如果两次中一次测验好的得B，如果两次测验都差的得C。设P是第一次测验得好的学生集合，设Q是第二次测验得好的学生集合，那么$P\cap Q$就是取得A的学生的集合。$P\oplus Q$就是取得B的学生的集合，$S-(P\cup Q)$就是取得C的学生的集合，这里S是指学这门课程的全体学生。

3. 集合的划分

我们知道，整数可以划分为偶数和奇数两类；三角形可划分为锐解三角形、直角三角形和钝角三角形三类，在这些划分中，事物的每一个成员都无一遗漏地划归其中的一个属类，既不重复又不遗漏。

一般地，设$A_1,A_2,\cdots,A_n$是集合A的子集，如果

(1)$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=A$；

(2)$A_1\cap A_2=\varnothing,A_1\cap A_3=\varnothing,\cdots,A_{n-1}\cap A_n=\varnothing$。

那么称$(A_1,A_2,\cdots,A_n)$是集合A的一个划分。

例如，$(\{1,2\},\{3\},\{4\})$，$(\{1\},\{2,3\},\{4\}$和$(\{1\},\{2\},\{3,4\})$都是集合$\{1,2,3,4\}$的一个划分。

对于有限集A的任何一个划分$A_1,A_2,\cdots,A_n$，都有

$$|A|=|A_1|+|A_2|+\cdots+|A_n|。$$

其中$|A|$、$|A_i|$分别表示有限集A、$A_i(i=1,2,\cdots,n)$中的元素个数。

〔**例** 9〕 设a为整数，求证：$5|(a^5-a)$

〔**证明**〕 因$a^5-a=a(a^2-1)(a^2+1)$，我们将a被5除所得的余数划分为五类：$a=5k,5k+1,5k+2,5k+3,5k+4$(k为整数)。

当$a=5k$时，显然$5|(a^5-a)$。

当 $a=5k+1$ 时，$a^2-1=(a-1)(a+1)=5k\cdot(5k+2)$ 被 5 整除。

显然，当 $a=5k+4$ 时，也有 $5|(a^2-1)$

于是，对 $a=5k+1, 5k+4$ 时，$5|(a^5-a)$。

当 $a=5k+2$ 时，$a^2+1=(5k+2)^2+1=5(5k^2+4k+1)$ 被 5 整除，当 $a=5k+3$ 时，同样有 $5|(a^2+1)$

于是，对 $a=5k+2, 5k+3$ 时，$5|(a^5-a)$

综上所述，$5|(a^5-a)$

〔**例** 10〕 以〔x〕 表示不超过实数 x 的最大整数，求方程 $x^2-[x]^2=(x-[x])^2$ 在区间 $1\leqslant x\leqslant n$ 中根的个数。

〔**解**〕 显然 $x=n$ 是方程的一个根。我们将区间 $1\leqslant x\leqslant n$ 划分成 $n-1$ 个小区间：$1\leqslant x<2, 2\leqslant x<3, \cdots, n-1\leqslant x<n$，且这些小区间中根的集合分别记作：$A_1, A_2, \cdots, A_{n-1}$，

由于在 $k\leqslant x<k+1$ 中，有 $[x]=k$，如果记 $p=x-[x]$，那么有 $0\leqslant p<1$，

于是，原来的方程可写成

$$(k+p)^2-[(k+p)^2]=p^2,$$

即 $$k^2+2kp=[k^2+2kp+p^2]。$$

由 $[k^2+2kp+p^2]=k^2+[2kp+p^2]$，得

$$2kp=[2kp+p^2]\quad。$$

由此可见，$2kp$ 是整数。

因为 k 为整数，$0\leqslant p<1$，

所以仅当 $p=0, \dfrac{1}{2k}, \dfrac{2}{2k}, \cdots, \dfrac{2k-1}{2k}$ 时，等式才有可能成立。

从而可知，原方程在此小区间中恰有 $2k$ 个根，即 $|A_k|=2k$。

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook