SHUXUE WULI FANGCHENG

数学物理方程

刘 婧 主编
郑斯宁 主审

大连海事大学出版社

数学物理方程

刘　婧　主编

郑斯宁　主审

大连海事大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学物理方程 / 刘婧主编 —大连：大连海事大学出版社，2012 8
ISBN 978-7-5632-2761-7

I. ①数… II ①刘… III ①数学物理方程—高等学校—教材 IV. ①O175 24

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 205403 号

大连海事大学出版社出版

地址：大连市凌海路 1 号　邮编：116026　电话：0411-84728394　传真：0411-84727996

http //www dmupress com　E-mail cbs@dmupress com

大连力佳印务有限公司印装　大连海事大学出版社发行

2012 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 1 次印刷

幅面尺寸：185 mm×260 mm　印数：1～500 册

字数：281 千　印张：11 75

责任编辑：苏炳魁　杨　淼　版式设计：卫　娑

封面设计：王　艳　责任校对：刘牧园

ISBN 978-7-5632-2761-7　定价：27.00 元

前 言

数学物理方程的兴起已有两百多年的历史，讨论的问题主要来源于物理、力学、电磁学和工程技术中的一些实际问题。“数学物理方程”作为理工科大学多个专业最重要的一门核心课程，具有以下几个主要特色：

1. 涉及的学科范围广。数学物理方程已经成为自然科学、工程技术甚至经济管理科学等领域的研究基础。一些理工科和综合性大学都会根据自己的需要开设“数学物理方程(法)”课程。

2. 起点低，终点高。所谓起点低，是指在学习本课程之前，学生只需具备如高等数学、线性代数和常微分方程的一些基础知识。说它终点高，是指在偏微分方程现代理论的内容介绍中要用到泛函分析的入门知识。

3. 具有很强的应用性。数学物理方程来源于对实际问题的研究，与所考察的物理模型有紧密地联系。它直接联系着众多自然现象和实际问题，并且随着社会和科学的不断进步要不断地提出或产生解决问题的新课题和新方法。偏微分方程方法除了应用于物理、几何及工程领域，还可用于图像处理、生物工程、金融工程理论和高级经济理论的研究。

根据本门课程的特点，学习这门课程必须坚持理论联系实际。重点不仅在于知识的掌握，更应着眼于处理实际问题能力的培养与提高。数学物理方程是以研究物理问题为目标的数学理论和数学方法。它探讨各种物理现象的数学模型，即寻求物理现象的数学描述，并对模型所描述的物理问题研究其数学解法，然后根据解答来诠释和预见物理现象，或根据物理事实来修正原有的模型。把数学理论、解题方法与物理实际有机紧密地结合到一起，正是本课程有别于其他课程的鲜明特点。

本书是在大连海事大学自编讲义《数学物理方程》的基础上，对内容和结构做了改动后修订而成的。多年的教学实践表明，本书的取材深度、主要内容以及结构安排还是合适的。全书共包含七章，第1章包括偏微分方程的基本概念、定解问题的导出。第2章是二阶线性偏微分方程的分类。第3至第6章详细介绍了三类典型二阶线性偏微分方程定解问题的解法。第7章是偏微分方程现代理论部分，将变分法与二阶线性偏微分方程的定解问题联系起来。本书适用于数学、物理等专业本科生及工科硕士生。

本书的第2章由于东编写，王利东编写本书的第3章、第6章，其余章节由刘婧编写并最后整理定稿，本书由郑斯宁主审。在此，作者向为本书写作做出有益工作的王悦同学、高飞同学，以及为本书出版付出辛勤劳动的编辑，致以深切的谢意。

由于作者学识水平的限制，书中错误和不妥之处在所难免，望读者不吝赐教。所有关于本书的批评和建议，请寄往作者的电子邮箱：lj650720@sina.com。

作者

2012年1月

目 录

第1章 绪 论

§1.1 引 言

数学物理方程也叫偏微分方程，它是以多元函数微积分为基础的现代数学的一个重要分支。它以建立数学模型、对模型进行理论分析、解释客观现象并进而解决实际问题为内容，是数学联系实际的一个重要桥梁。它的研究起源于18世纪欧拉、达朗贝尔、拉格朗日和拉普拉斯的工作，到19世纪中叶，随着黎曼等人对一些偏微分方程系统、深入地研究，逐渐形成了偏微分方程的基本理论。现今偏微分方程已成为其他数学分支的重要工具，并且与其他数学分支相互影响、相互交叉，例如位势理论、微分几何、实分析与泛函分析、拓扑、随机过程、数值计算等都与偏微分方程有着重要的联系。

偏微分方程讨论的问题来源于物理、力学、生物、几何、化学等学科的古典问题。因此，偏微分方程的理论、方法及应用一直备受关注。传统的数学物理方程含有三种典型二阶线性偏微分方程——波动方程、热传导方程和调和方程，它们反映了三类不同的自然现象，有典型的物理意义。上述三类典型方程定解问题的提出和求解在处理方法上具有很强的代表性。理解掌握这三种典型二阶线性偏微分方程及其解的基本性质与求解方法是学好本课程的关键。

数学物理方程的解有古典解（经典解）、数值解和广义解。我们主要研究的是古典解，指在求解区域中具有方程中所出现的连续偏导数，并按通常意义满足方程与定解条件，即将它代入方程及定解条件后可使其化为恒等式。古典解的概念是最容易理解的，应用起来也最方便。但在实际求解偏微分方程的定解问题时，除了在一些特殊的情况下可以方便地求得其精确解外，一般情况下，当方程或定解条件具有比较复杂的形式或求解区域具有比较复杂的形状时，往往求不到或不易求得其精确解，此时我们一方面考虑寻求偏微分方程定解问题的近似解，另一方面考虑拓宽解的概念。求解偏微分方程的数值解（近似解）的方法多种多样，如有限差分法和有限元法，它们本身已形成了一个独立的研究方向，其要点是对偏微分方程定解问题进行离散化。至于拓宽解的概念，就是考察非经典意义下的解。一个常用的技巧是先寻求一个正则性较低的函数，它按较弱的意义满足方程和定解条件，然后再进一步证明这个函数实际上就是原来问题的古典解。这种按较弱的意义满足定解问题的函数，就是广义解。广义解的定义是多种多样的。一种常用的广义解是通过逼近过程来定义的，称为强解；另一种最常用的广义解是通过分部积分的方法来定义的，称为弱解。

近几十年来，由于科学技术的不断发展，相继出现了大量偏微分方程的新问题，需要寻找解决问题的新理论和新方法。最为引人注目的是广义函数、索伯列夫空间等新思想和新方法的引入。这些新思想和新方法的引入使人们不再拘泥于直接寻求古典解，而是经常采用“迂回战术”，先求广义解，然后再讨论广义解的正则性（光滑性）；人们也不再满足于一个个具

体方程的求解，而往往是把特殊问题放到更为一般的抽象框架中去考察，这样就有可能使用现代数学的语言表述问题，充分利用有关数学领域的最新成果解决问题。因此，数学物理方程是迅速发展的一门学科。目前对该领域的研究，特别是对非线性偏微分方程的研究正在蓬勃发展。

§1.2 基本概念

1.2.1 基本概念

一个含有未知函数的导数或微分的等式称为微分方程。如果微分方程中的未知函数是一元函数，则称其为常微分方程。如果微分方程中的未知函数是多元函数，且其中出现的导数是偏导数，则称其为偏微分方程。一般说来，它可以写成包含几个自变量$x, y, \ldots$和这些变量的未知函数u及其偏导数$u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots$的方程的形式

$$f(x, y, \ldots, u, u_x, u_y, \ldots, u_{xx}, u_{xy}, \ldots) = 0 \tag{1.2-1}$$

这里，方程（1.2-1）是在自变量$x, y, \ldots$的n维空间$\mathbf{R}^n$中的一个适当的区域D内进行考察的。我们要求能找出在D内恒满足方程（1.2-1）的那些函数。如果这种函数存在，那么称它们为方程（1.2-1）的解。从这些可能的解中，我们要选出一个满足某些指定的附加条件的特解。例如

$$u_t - 4u_{xx} = 5x$$

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 5f(x,t)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

都是偏微分方程。容易验证下列两个函数

$$u(x, y) = (x + y)^3$$

$$u(x, y) = \sin(x - y)$$

都是最后一个方程的解。

偏微分方程中出现未知函数偏导数的最高阶数称为方程的阶。例如方程

$$u_{tt} - 4u_{xx} = 5f(x,t)$$

$$u_{xxy}+xu_{yy}-4u=5f(x,t)$$

的阶数分别是二阶和三阶。

如果一个偏微分方程对于未知函数及它的所有偏导数都是线性的，即若偏微分方程关于未知函数及其各阶导数都是一次幂，且方程中的系数都仅依赖于自变量，则称其为线性偏微分方程，否则称其为非线性偏微分方程。如果一个非线性偏微分方程对于未知函数的最高阶导数来说是线性的，那么就称其为拟线性偏微分方程。例如

$$u_{tt}-4u_{xx}=5f(x,t)$$

是二阶线性偏微分方程，而

$$u_x u_{tt}-4xu_{xx}=f(x,t)$$

是二阶非线性偏微分方程，方程

$$u_{xxt}+u^2u_{xx}=5f(x,t)$$

是三阶拟线性偏微分方程。

本书中，我们将主要研究二阶线性偏微分方程。最一般的含一个未知函数n个自变量的二阶线性偏微分方程的形式为

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}u_{x_i x_j}+\sum_{i=1}^{n}B_i u_{x_i}+Fu=G$$

其不失一般性，我们假设$A_{ij}=A_{ji}$且A_{ij},B_i,F和G都是n个自变量的定义在$\mathbf{R}^n$空间的某一区域内的实值函数。如果G恒等于零，称微分方程为齐次方程，否则称为非齐次方程。

1.2.2 偏微分方程与常微分方程一些比较

对于一个n阶常微分方程，它的解的全体（除去可能的一些奇异解外）依赖于n个任意常数。然而对偏微分方程而言，其可求解的情形很多，与常微分方程的解依赖于若干个任意常数相比，它的自由度往往会更大。例如，方程$u_{xy}=f(x,y)$的通解可表示为

$$u(x,y)=\int_a^x\int_b^y f(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta+\phi(x)+\psi(y)$$

其中，$\phi(x),\psi(y)$为两个任意二阶可微函数。

在对偏微分方程的研究中，人们感兴趣的是解。比如讨论其解的性质和结构以及求解的方法等，但求解偏微分方程往往是复杂的。与常微分方程相比，它的解一般来说很难用通解形式给出来，即使对于线性方程也是如此。所以对偏微分方程的求解往往更多的是研究其在一些特定条件下的解，并称这些用来帮助决定特解的条件为定解条件。

常微分方程同偏微分方程在解的存在性方面也有相当大的差别。对常微分方程而言，即在相当一般的条件（通常是连续和局部利普希茨条件）下可以证明其解是局部存在的。而对

偏微分方程来说，虽然对许多常见的偏微分方程在不考虑定解条件时，解有很大的自由度。但也有条件非常好的偏微分方程，即使是在非常小的局部范围内，解也是不存在的。这方面第一个无解方程的例子是汉斯·莱维在 1957 年给出的。这个例子曾被认为是 20 世纪 60 年代偏微分方程的一大里程碑，它的产生使人们认识到偏微分方程的研究同常微分方程相比有本质的不同。汉斯·莱维所构造的方程是一个具有多项式系数的一阶线性偏微分方程，即

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\mathrm{i}(x+\mathrm{i}y)\frac{\partial u}{\partial t}=f(x,y,t)$$

其中$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$, f 为某个在$\mathbf{R}^n$原点附近无穷次可微的光滑函数。汉斯·莱维证明了上述方程在原点的某个邻域内不存在解u。

由于偏微分方程的研究方法与常微分方程相比有很大的不同，从而形成了两个独立的数学分支。然而尽管有这些差别，常微分方程中的理论和方法对于偏微分方程的研究仍是相当重要的。

§1.3 三类典型二阶偏微分方程的导出

1.3.1 波动方程的导出

首先考虑弦的微小横振动问题。设有一根长为L均匀柔软富有弹性的细弦,平衡时沿直线拉紧。在受到初始小扰动下，作微小横振动。试确定该弦的运动方程。

先对几个物理术语给出解释。所谓细弦，就是与张力相比，弦的重量可以忽略不计。有弹性表示张力的大小可按胡克定律来计算。柔软是指弦可以弯曲，同时发生于弦中张力的方向总是沿着弦所在曲线的切线方向。横振动是指弦的运动只发生在一个平面内，且弦上各点的位移与弦的平衡位置垂直。微小横振动是指振动的幅度及弦在任意位置处切线的倾角都很小。

取定弦的运动平面坐标系是Oxu，弦的平衡位置为x轴，弦的长度为L，两端固定在O,L两点。用$u(x,t)$表示弦上横坐标为x点在时刻t的位移（图 1.3.1）。由于做微小横振动，故$u_x\approx 0$。 因此$\alpha\approx 0$, $\cos\alpha\approx 1$, $\sin\alpha\approx\tan\alpha=u_x\approx 0$, 其中$\alpha$表示在$x$处切线方向同$x$轴的夹角，见图 1.3.1 下面用微元方法建立$u$所满足的偏微分方程。

在弦上任取一段弧$\widehat{MM'}$，考虑作用在这段弧上的力。作用在这段弧上的力有张力和外力。可以证明，张力T是一个常数，即T与位置x和时间t的变化无关。事实上，因为弦振动微小，则弧段$\widehat{MM'}$的弧长$\Delta s=\int_x^{x+\Delta x}\sqrt{1+u_x^2}\,\mathrm{d}x\approx\Delta x$. 这说明该段弧在整个振动过程中始终未发生伸长变化。于是由胡克定律，张力T与时间t无关。下面还将看到，T与x也无关。

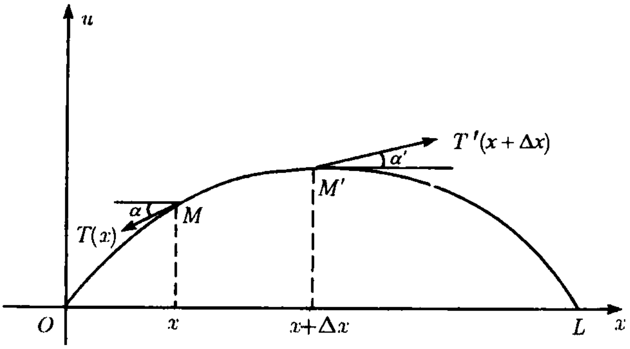

图 1.3.1

因为弦只作横振动，在 x 轴方向没有位移，故合力在 x 方向上的分量为零，即

$$T(x+\Delta x)\cos\alpha' - T(x)\cos\alpha = 0$$

由于 $\cos\alpha' \approx 1$，$\cos\alpha \approx 1$，所以 $T(x+\Delta x) = T(x)$，即张力 T 与 x 无关。于是，张力是一个与位置 x 和时间 t 无关的常数，仍记为 T。

作用于小弧段 $\widehat{MM'}$ 的张力沿 u 轴方向的分量为

$$T\sin\alpha' - T\sin\alpha \approx T\left[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right]$$

设作用在该段弧上的外力密度函数为 $F(x,t)$（不妨设为连续函数），那么弧段 $\widehat{MM'}$ 在时刻 t 所受沿 u 轴方向的外力近似地等于 $F(x,t)\Delta x$. 由牛顿第二运动定律得

$$T\left[u_x(x+\Delta x,t) - u_x(x,t)\right] + F(x,t)\Delta x = \rho\overline{u}_{tt}\Delta x$$

其中 ρ 是线密度。由于弦是均匀的，故 ρ 为常数。这里 $\overline{u}_{tt}$ 是加速度 u_{tt} 在弧段 $\widehat{MM'}$ 上的平均值。设 $u = u(x,t)$ 为二次连续可微函数，由微分中值定理得

$$Tu_{xx}(x+\theta\Delta x,t)\Delta x + F(x,t)\Delta x = \rho\overline{u}_{tt}\Delta x,\ 0<\theta<1$$

消去 Δx，并取极限 $\Delta x \to 0$ 得

$$Tu_{xx}(x,t) + F(x,t) = \rho u_{tt}$$

即

$$u_{tt} = a^2u_{xx} + f(x,t),\quad 0<x<L, t>0 \tag{1.3-1}$$

其中常数$a^2=T/\rho$，函数$f(x,t)=F(x,t)/\rho$表示在x处单位质量上所受的外力。

方程（1.3-1）表示在外力作用下弦的振动规律，称为弦的强迫横振动方程，又称一维非齐次波动方程。当外力作用为零时，即$f(x,t)=0$时，方程（1.3-1）称为弦的自由横振动方程。它是一维齐次波动方程。另外，在工程技术和物理中，还有其他的实际问题同样可以用方程（1.3-1）来描述。例如，杆的纵振动（即一均匀细杆在外力作用下沿杆长方向做微小振动），如果取杆长方向为x轴，$u(x,t)$表示x处的截面在t时刻沿着杆长方向的位移，那么由动量守恒定律和胡克定律可以推出$u(x,t)$满足方程（1.3-1），其中$a^2=E/\rho$，ρ是杆的密度，E是应力与相对伸长成正比的比例系数，称为细杆材料的弹性模量。

类似地，我们可以推出均匀薄膜的横振动满足二维波动方程

$$u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})+f(x,y,t),\ (x,y)\in\Omega,\ t>0 \qquad (1.3\text{-}2)$$

其中$u=u(x,y,t)$是薄膜在时刻t和(x,y)处的位移，$a^2=T/\rho$，T为张力，ρ为薄膜的面密度，$f(x,y,t)$表示t时刻、单位质量膜在(x,y)处所受垂直方向的外力，Ω是Oxy平面上的有界区域。

另外，根据电磁场理论中的麦克斯韦方程，可以推出电场E和磁场H满足的三维波动方程

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2}=a^2\nabla^2 E \qquad (1.3\text{-}3)$$

和

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}=c^2\nabla^2 H \qquad (1.3\text{-}4)$$

其中c是光速，而

$$\nabla^2=\nabla\cdot\nabla=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad (1.3\text{-}5)$$

1.3.2 热传导方程的导出

所谓热传导就是由于物体内部温度分布的不均匀，热量要从物体内温度较高的点处流向温度较低的点处。热传导问题归结为求物体内部温度分布规律。

设物体在Ω内无热源，在Ω中任取一闭曲面S(图 1.3.2)。以函数$u(x,y,z,t)$表示物体在t时刻，$M=M(x,y,z)$处的温度。根据傅立叶热传导定律，在无穷小时段$\mathrm{d}t$内流过物体的一个无穷小面积$\mathrm{d}S$的热量$\mathrm{d}Q$与时间$\mathrm{d}t$、曲面面积$\mathrm{d}S$以及物体温度u沿曲面$\mathrm{d}S$的外法线$\boldsymbol{n}$的方向导数$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}$三者成正比，即

$$\mathrm{d}Q=-k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

其中$k=k(x,y,z)$是物体在$M(x,y,z)$处的热传导系数，取正值。我们规定外法线方向$\boldsymbol{n}$所指的那一侧为dS的正侧。上式中负号的出现是由于热量由温度高的地方流向温度低的地方。故当$\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}>0$时，热量实际上是向$-\boldsymbol{n}$方向流去。

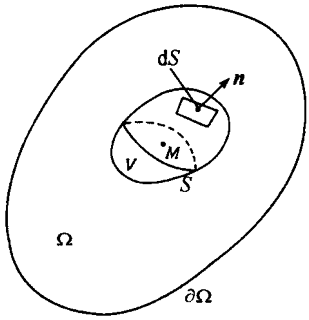

图 1.3.2

对于Ω内任一封闭曲面S，设其所包围的空间区域为V，那么从时刻t_1到时刻t_2经曲面S流出的热量为

$$Q_1=-\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

设物体的比热容为$c(x,y,z)$，密度为$\rho(x,y,z)$，则在区域V内，温度由$u(x,y,z,t_1)$到$u(x,y,z,t_2)$所需的热量为

$$Q_2=\iiint_V c\rho[u(x,y,z,t_1)-u(x,y,z,t_2)]\,\mathrm{d}v=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V c\rho\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}v\,\mathrm{d}t$$

根据热量守恒定律，有$Q_2=-Q_1$，

即

$$\iiint_V c\rho[u(x,y,z,t_1)-u(x,y,z,t_2)]\,\mathrm{d}v=\int_{t_1}^{t_2}\iint_S k\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

假设函数$u(x,y,z,t)$关于x,y,z具有二阶连续偏导数，关于t具有一阶连续偏导数，那么由高斯公式得

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_V\left[c\rho\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}v\mathrm{d}t=0$$

由于时间间隔$[t_1,t_2]$及区域V是任意的，且被积函数是连续的，因此在任何时刻t，在Ω内任意一点都有

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{1.3-6}$$

方程（1.3-6）称为非均匀的各向同性体的热传导方程。如果物体是均匀的，此时k、c及ρ均为常数。令$a^2=\dfrac{k}{c\rho}$，则方程（1.3-6）化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=a^2\Delta u \tag{1.3-7}$$

它称为三维热传导方程。

若考虑物体内有热源，其热源密度函数为$F(x,y,z,t)$，则有热源的热传导方程为

$$u_t=a^2\Delta u+f(x,y,z,t) \tag{1.3-8}$$

其中$f(x,y,z,t)=\dfrac{F(x,y,z,t)}{c\rho}$。

类似地，当考虑的问题是一根均匀细杆，如果它的侧面绝热且在同一截面上的温度分布相同，那么温度u只与x,t有关。方程（1.3-7）变成一维热传导方程

$$u_t=a^2u_{xx} \tag{1.3-9}$$

同样，如果考虑一块薄板的热传导，并且薄板的侧面绝热，则可得二维热传导方程

$$u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}) \tag{1.3-10}$$

当考虑气体的扩散、液体的渗透、半导体材料中杂质扩散等物理过程时，如果用u表示扩散物质的浓度，则u所满足方程的形式与热传导方程完全一样。由于它所描述的是物质的扩散现象，所以热传导方程又叫扩散方程。

1.3.3 拉普拉斯方程和泊松方程的导出

当研究物理中各种现象（如振动、热传导、物质扩散）的稳定过程时，由于表示该过程的物理量u不随时间t而变化，因此$u_t=0$。此时方程（1.3-7）变为三维拉普拉斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 \tag{1.3-11}$$

方程（1.3-11）通常表示成$\Delta u=0$或$\nabla^2 u=0$。

下面我们引进泊松方程。考虑电荷密度为$\rho(x,y,z)$、介电常数$\varepsilon=1$的静电场E。设点$M(x,y,z)$处的电位为$u=u(x,y,z)$。定义电场强度$E=-\nabla u$。记闭合曲面S所围成的区域为Ω，在其内任取一体积微元$\mathrm{d}v$。由静电学基本原理，穿过闭合曲面S向外的电通量等于闭合曲面S所围空间中的电通量的4π倍，即

$$\iint_S E\mathrm{d}S=4\pi\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}v$$

由曲面积分的高斯公式，得

$$\iiint_\Omega \mathrm{div}E\mathrm{d}v=\iint_S E\mathrm{d}S$$

即

$$\iiint_\Omega \mathrm{div}(\nabla u)\mathrm{d}v=-4\pi\iiint_\Omega \rho(x,y,z)\mathrm{d}v$$

由于Ω是任意的，所以$\mathrm{div}(\nabla u)=-4\pi\rho(x,y,z)$ 即

$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=-4\pi\rho(x,y,z) \tag{1.3-12}$$

这就是电位所满足的方程。该方程通常称为三维泊松方程。特别地，当$\rho(x,y,z)=0$（即自由电场的情况）时，电位满足三维拉普拉斯方程（1.3-11）。

拉普拉斯方程和泊松方程不仅出现在稳恒温度场中，它还描述许多物理现象，如静电场、引力势、流体力学中的势和弹性力学中的调和势等。概括地说，它所描写的自然现象是稳恒的、定常的，即与时间无关的。

§1.4 定解条件与定解问题

偏微分方程一般有无穷多个解，在求解具体问题时还需要一些定解条件。一个偏微分方程与定解条件一起构成对于具体问题的完整描述，称为定解问题。定解问题中的偏微分方程称为泛定方程。常见的定解条件可分为初始条件与边界条件。我们来介绍这些定解条件。

1.4.1 初始条件

研究随时间变化的问题，必须考虑某个所谓初始时间的状态，我们把用以说明初始状态的条件称为初始条件或称柯西初始条件。

下面具体说明初始条件的表达式。以弦振动问题为例，初始条件就是弦在开始时刻（假设为$t=0$时刻）的位移及速度，以$\phi(x)$, $\psi(x)$分别表示初始位移及速度，则初始条件可表示为

$$u(x,0)=\phi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x),\ 0\le x\le L \tag{1.4-1}$$

对于高维的波动方程也有类似的初始条件。

对热传导问题而言，初始条件是指在开始时刻物体温度的分布情况。以$\phi(M)$表示开始时刻Ω内任一点M处的温度，则它的初始条件为

$$u(M,0)=\phi(M),\ M\in\Omega \tag{1.4-2}$$

拉普拉斯方程及泊松方程都是描述稳恒状态的，与时间无关，所以不提初始条件。

需要说明的是，对于不同类型的方程，所给初始条件的个数是不一样的。一般地，关于时间t的m阶偏微分方程，要给出m个初始条件才能确定一个特解。所以对波动方程需要两个初始条件，对热传导方程仅需要一个初始条件。

1.4.2 边界条件

与初始条件相比，我们把用以说明边界上的约束情况的条件称为边界条件。

以弦振动问题为例。从物理学得知，其端点（以$x=L$表示其右端点为例）所受的约束情况通常有以下三种类型。

（1）固定端　假设弦在振动过程中端点$x=L$始终保持不变，那么边界条件表示为

$$u(L,t)=0,\ t\geq 0 \tag{1.4-3}$$

（2）自由端　如果弦在端点$x=L$不受位移方向的外力，那么在该端点处，弦在位移方向的张力为零。由 1.3.1 推导过程可知，此时对应的边界条件为

$$T\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=L}=0\ \text{或}\ u_x(L,t)=0,\ t\geq 0 \tag{1.4-4}$$

（3）弹性支撑端　假定弦在端点$x=L$被某个弹性体所支撑。设弹性支撑原来的位置$u=0$，则$u(L,t)$就表示弹性支撑的应变。由胡克定律可知，这时弦在$x=L$处沿位移方向的张力$Tu_x(L,t)$应等于$-ku(L,t)$。由此可得

$$(u_x+\sigma u)\Big|_{x=L}=0 \tag{1.4-5}$$

其中k为弹性系数，$\sigma=k/T$。

对于热传导问题来说，也有类似的边界条件（以$\partial\Omega$表示区域Ω的边界）。

（1）如果在热传导过程中，边界$\partial\Omega$上的温度分布为已知函数$f(x,y,z,t)$，此时边界条件为

$$u(x,y,z,t)=f(x,y,z,t),\ (x,y,z)\in\partial\Omega,\ t\geq 0 \tag{1.4-6}$$

（2）如果在热传导过程中物体与周围介质处于绝热状态，那么在$\partial\Omega$上的热量流速始终为 0，即

$$\frac{\partial u}{\partial n}=0,\ (x,y,z)\in\partial\Omega,\ t\geq 0 \tag{1.4-7}$$

（3）设物体周围介质的温度为 $u_1(x,y,z,t)$，物体与介质通过边界 $\partial\Omega$ 有热交换。根据牛顿热交换定律: 物体从一种介质流到另一种介质的热量和两种介质间的温度差成正比，于是有

$$\mathrm{d}Q=h(u-u_1)\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

其中 h 为两种介质间的热交换系数。上式表示在 $\mathrm{d}t$ 时段内从物体外部流入物体无穷小面积 $\mathrm{d}S$ 上的热量，该热量通过 $\mathrm{d}S$ 流入物体内部。由傅立叶定律，应有

$$\mathrm{d}Q=-k\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\mathrm{d}t$$

根据热量守恒定律，得

$$k\frac{\partial u}{\partial n}=h(u_1-u),\ (x,y,z)\in\partial\Omega$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial n}+\sigma u=\sigma u_1,\ (x,y,z)\in\partial\Omega \tag{1.4-8}$$

其中 $\sigma=h/k$ 。

概括起来，无论对弦振动问题，还是热传导问题，它们所对应的边界条件从数学的角度看有如下三种类型:

（1）在边界 $\partial\Omega$ 上直接给出未知函数 u 的值，即

$$u\big|_{\partial\Omega}=f(x,y,z) \tag{1.4-9}$$

式（1.4-9）称为第一类边界条件，又称狄利克雷边界条件。

（2）在边界 $\partial\Omega$ 上给出未知函数 u 沿边界 $\partial\Omega$ 的外法线方向的值，即

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{\partial\Omega}=f(x,y,z) \tag{1.4-10}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 的外法线方向。式（1.4-10）称为第二类边界条件，又称诺伊曼边界条件。

（3）在边界 $\partial\Omega$ 上给出未知函数 u 及其沿 $\partial\Omega$ 的外法线方向导数的某一线性组合的值，即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}+\sigma u\right)\Big|_{\partial\Omega}=f(x,y,z) \tag{1.4-11}$$

式（1.4-11）称为第三类边界条件，又称罗宾边界条件或称混合边界条件。需要注意的是上述各边界条件右端项 $f(x,y,z)$ 都是定义在边界 $\partial\Omega$ 上的已知函数。