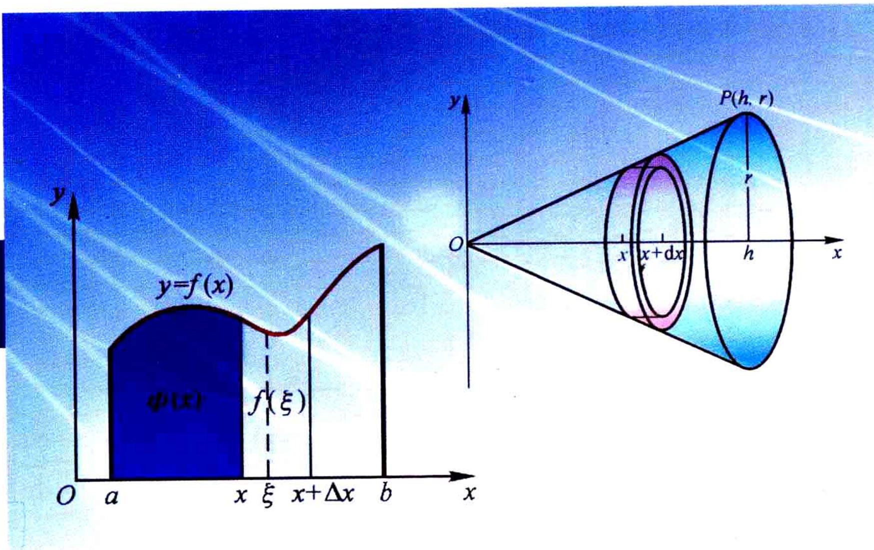
普通高等学校"十一五"精品规划教材

线性代数

XIANXING DAISHU

◎主编 周 勇 朱 砾



復旦大學出版社
www.fudanpress.com.cn

XIANXING DAISHU

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/周勇,朱砾主编. —上海:复旦大学出版社,2009. 8
ISBN 978-7-309-06809-2

Ⅰ. 线…　Ⅱ. ①周…②朱…　Ⅲ. 线性代数　Ⅳ. 0151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2009)第 128204 号

线性代数
周　勇　朱　砾　主编

出版发行　复旦大学 **出版社**　上海市国权路 579 号　邮编 200433
86-21-65642857(门市零售)
86-21-65100562(团体订购)　86-21-65109143(外埠邮购)
fupnet@ fudanpress. com　http://www. fudanpress. com

责任编辑　张志军
出 品 人　贺圣遂

印　　刷　浙江省临安市曙光印务有限公司
开　　本　787 × 960　1/16
印　　张　13. 5
字　　数　249 千
版　　次　2009 年 8 月第一版第一次印刷

书　　号　ISBN 978-7-309-06809-2/O · 432
定　　价　26. 00 元

内 容 简 介

本教材是在 2007 年出版的《工程数学》(第二版)的基础上,按照《线性代数课程教学基本要求》而编写的.

全书共七章,即行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵对角化、二次型、线性空间与线性变换简介. 每章均配有典型例题和习题,书后附有习题参考答案.

本教材适合高等院校理工科非数学类各专业本科学生使用,也可供科技工作者参考.

前　言

数学是一门重要而应用广泛的学科，被誉为锻炼思维的体操和人类智慧之冠上最明亮的宝石. 不仅如此，数学还是各类科学技术的基础，它的应用几乎涉及所有的学科领域. 近年来，随着我国经济建设与科学技术的迅速发展，高等教育进入了一个飞速发展时期，已经突破了以前的精英式教育模式，发展成为一种在终身学习的大背景下极具创造和再创性的基础学科教育. 高等学校教育教学观念不断更新，教学改革不断深入，办学规模不断扩大，数学课程开设的专业覆盖面也不断增大. 为了适应这一发展需要，本教材的编者经过多次研究讨论，编写了一套高质量的高等学校非数学类专业的数学系列教材.

本教材是在 2007 年复旦大学出版社出版的《工程数学》(第二版)的基础上，按照《线性代数课程教学基本要求》重新编写而成的. 全书共七章，即行列式、矩阵、向量组的线性相关性、线性方程组、矩阵对角化、二次型、线性空间与线性变换简介. 每章均配有典型例题和习题，书后附有习题参考答案.

本教材内容经典，体系完备，结构合理，重点难点叙述详尽，通俗易懂，特别是在例题和习题选择配置方面，更是循序渐进，层次分明，集启发性、实用性和新颖性于一体，从而增强了该书的适用性。本书可用作大学理工类、经济类等各个层次和专业的教材，也是一本有实用价值的参考书.

本教材由周勇教授、朱砾教授、谢清明副教授编写。借此机会，感谢复旦大学出版社的编辑们为本书出版付出的辛勤努力。书中有不妥之处，恳请同行和读者批评指正.

编　者

2009 年 7 月

目　　录

第一章　行　列　式

第一节　二阶与三阶行列式

一、二元线性方程组与二阶行列式

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

使用加减消元法，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，方程组(1.1) 有解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\ x_2 = \frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

(1.2) 式中的分子、分母都是 4 个数分两对相乘再相减而得. 其中分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$是由方程组(1.1)的 4 个系数确定的，把这 4 个数按它们在方程组(1.1)中的位置，排成两行两列(横排称行、竖排称列)的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \tag{1.3}$$

表达式 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为数表(1.3)所确定的行列式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \tag{1.4}$$

数 a_{ij}($i=1,2$; $j=1,2$)称为行列式(1.4)的元素. 元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 称为列标，表明该元素位于第 j 列.

上述二阶行列式的定义可用对角线法则记忆. 如图 1－1 所示，即实线连接的两个元素(主对角线)的乘积减去虚线连接的两个元素(次对角线)的乘积.

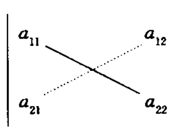


图 1－1

例 1　$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\times 1-(-2)\times 2=7.$

二、三阶行列式

定义 1.1 设有 9 个数排成 3 行 3 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1.5}$$

用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

上式称为数表(1.5)所确定的三阶行列式,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}. \tag{1.6}$$

三阶行列式表示的代数和,也可以由下面的对角线法则来记忆,如图 1－2 所示,其中各实线连接的 3 个元素的乘积是代数和中的正项,各虚线连接的 3 个元素的乘积是代数和中的负项.

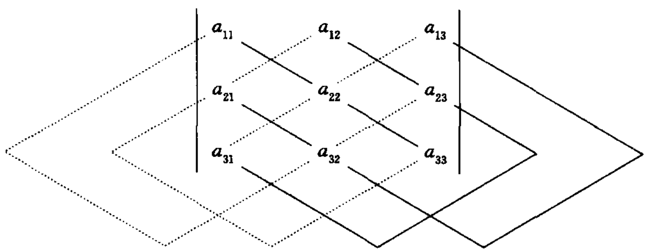


图 1－2

例 2 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 4 & -5 \end{vmatrix}.$$

解 由对角线法则

$$D=1\times(-2)\times(-5)+2\times(-1)\times(-3)+3\times4\times2-$$

$$3\times(-2)\times(-3)-2\times2\times(-5)-1\times4\times(-1)=46.$$

例 3 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么?

解 由对角线法则

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-1.$$

$a^2-1>0$ 当且仅当 $|a|>1$,因此可得:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix}>0$$

的充分必要条件是 $|a|>1$.

第二节 n 阶行列式的定义

一、全排列及其逆序数

把 n 个不同元素按某种次序排成一列,称为 n 个元素的全排列. n 个元素的全排列的总个数,一般用 P_n 表示,且

$$P_n=n!.$$

对于 n 个不同元素,先规定各元素间有一个标准次序(如 n 个不同的自然数,可规定由小到大为标准次序),于是在这 n 个元素的任一排列中,当某两个元素的先后次序与标准次序不同时,就说它们构成了一个逆序. 一个排列中所有逆序的总和,称为该排列的逆序数,排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数记作 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

例如,对排列 32514 而言,4 与 5 就构成了一个逆序,1 与 3,2,5 也分别构成一个逆序,3 与 2 也构成一个逆序,所以 $\tau(32514)=5$.

逆序数的计算法:不失一般性,不妨设 n 个元素为 1 至 n 这 n 个自然数,并规定由小到大为标准次序,设 $i_1i_2\cdots i_n$ 为这 n 个自然数的一个排列. 自右至左先计算排在最后一位数字 i_n 的逆序数,等于排在 i_n 前面且比 i_n 大的数字的个数,再计算 $i_{n-1}\cdots i_2$ 的逆序数,然后把所有数字的逆序数加起来,就是该排列的逆序数.

例 1 计算 $\tau[1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n)]$.

解 从排列 $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n)$ 看,前 n 个数 $1\ 3\ 5\cdots(2n-1)$ 之间没有逆序,后 n 个数 $2\ 4\cdots(2n)$ 之间也没有逆序,只有前后 n 个数之间才构成逆序.

$2n$ 最大且排在最后，逆序数为 0，

$2n-2$ 的前面有 $2n-1$ 比它大，故逆序数为 1，

$2n-4$ 的前面有 $2n-1,2n-3$ 比它大，故逆序数为 2，

……………

2 前面有 $n-1$ 个数比它大，故逆序数为 $n-1$，因此有

$$\tau[1\ 3\ 5\cdots(2n-1)2\ 4\ 6\cdots(2n)] = 0+1+\cdots+(n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

逆序数为奇数的排列叫做奇排列，逆序数为偶数的排列叫做偶排列.

二、对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素保持不动，这种作出新排列的方法叫做对换. 将相邻两个元素对换，叫做相邻对换.

定理 2.1 一个排列中的任意两个元素对换，排列改变奇偶性.

证 先证相邻对换的情形.

$$\text{设排列为 } a_1a_2\cdots a_mabb_1b_2\cdots b_n,$$

对换 a 与 b，变为 $a_1a_2\cdots a_mbab_1b_2\cdots b_n$，显然这时排列中除 a,b 两数的顺序改变外，其他任意两数和任意一个数与 a 或 b 之间的顺序都没有变. 当 $a>b$ 时，经对换后，a 的逆序数不变，b 的逆序数减少 1；当 $a<b$ 时，对换后，a 的逆序数增加 1，b 的逆序数不变，所以新排列与原排列奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

设排列为 $a_1a_2\cdots a_mab_1b_2\cdots b_nbc_1c_2\cdots c_p$，对换 a 与 b，变为 $a_1a_2\cdots a_mbb_1b_2\cdots b_nac_1c_2\cdots c_p$. 可以把它看作将原排列作 n 次相邻对换变成 $a_1a_2\cdots a_mb_1\cdots b_nabc_1\cdots c_p$，再作 $n+1$ 次相邻对换变成 $a_1a_2\cdots a_mbb_1b_2\cdots b_nac_1c_2\cdots c_p$. 因此经过 $2n+1$ 次相邻对换，排列 $a_1a_2\cdots a_mab_1b_2\cdots b_nbc_1c_2\cdots c_p$ 变为 $a_1a_2\cdots a_mbb_1b_2\cdots b_nac_1c_2\cdots c_p$. 所以这两个排列的奇偶性不同.

三、n 阶行列式的定义

为了给出 n 阶行列式的定义，我们先研究三阶行列式的定义，三阶行列式的定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}- a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}.$$

由定义可看出：

(1) 上式右边的每一项都是 3 个元素的乘积，这 3 个元素位于不同的行、不

同的列；且每一项3个元素的第1个下标（行标）依次为123，排成了标准次序，第2个下标（列标）排成了 $p_1p_2p_3$，它是1,2,3这3个数的某一个排列，对应上式右端的6项，恰好等于这3个数排列的种数. 因此除了正负号外，右端的每一项都可以写成下列形式：

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $p_1p_2p_3$ 是1,2,3的某一个排列，其项数等于 $P_3=3!$.

（2）各项的正、负号与列标排列的逆序数有关. 易验证上式右端带正号的项的列下标的排列都是偶排列，带负号的项的列下标的排列都是奇排列. 因此各项所带符号由该项列下标的排列的奇偶性所决定，从而各项可表示为

$$(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}.$$

综合(1)、(2)得：三阶行列式可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中 $\tau(p_1p_2p_3)$ 为排列 $p_1p_2p_3$ 的逆序数. $\sum$ 表示对1,2,3这3个数的所有全排列 $p_1p_2p_3$ 求和.

由此，我们引入 n 阶行列式的定义.

定义 2.1 设有 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个数的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，并冠以符号 $(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}$，即得

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \tag{2.1}$$

的项，由于 $p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，这样的排列共有 $n!$ 个，因而形如(2.1)式的项共有 $n!$ 项，所有这 $n!$ 项的代数和

$$\sum (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$$

称为 n 阶行列式，记为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

简记为 $\det(a_{ij})$，其中数 a_{ij} 称为行列式 $\det(a_{ij})$ 的元素，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}. \tag{2.2}$$

按此定义的二阶、三阶行列式，与用对角线法则定义的二阶、三阶行列式是一致的. 特别当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a|=a$，注意与绝对值记号的区别.

例 2 按行列式的定义计算下三角形行列式：

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中未写出的元素全为零(以后均如此).

解 由定义，n 阶行列式中共有 $n!$ 项，其一般项为

$$(-1)^{\tau} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中 $\tau=\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$. 现第 1 行除 a_{11} 外其余元素全为零，故只有一个元素 a_{11}，在第 2 行中除了 a_{21}，a_{22} 外全是零，故应在 a_{21}，a_{22} 中取一个，且只能取一个，因为 a_{11} 是第 1 行第 1 列的元素，$p_1=1$，故 $p_2,\cdots,p_n$ 不能再取 1，所以 $p_2=2$，即第 2 行取 a_{22}，依此类推，第 n 行只能取 $p_n=n$，即取元素 a_{nn}，从而有

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn},$$

即 D 等于主对角线上元素的乘积.

同理可得上三角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

另外，作为三角形式特例的对角行列式(除对角线上的元素外，其他元素都为 0，在行列式中未写出来)，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

例 3 证明

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

证 由行列式的定义

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & ⋰ & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1},$$

其中 $\tau=\tau[n(n-1)\cdots 1]$为排列 $n(n-1)\cdots 1$ 的逆序数，又

$$\tau[n(n-1)\cdots 1] = (n-1)+(n-2)+\cdots+1 = \frac{(n-1)n}{2},$$

结论得以证明.

四、n 阶行列式定义的其他形式

利用定理 2.1，我们来讨论行列式定义的其他表示法.

对于行列式的任一项

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n},$$

其中 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 为自然排列，对换 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 成

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n},$$

这时，这一项的值不变，而行标排列与列标排列同时作了一次相应的对换. 设新的行标排列 $1\cdots j\cdots i\cdots n$ 的逆序数为 τ_1，则 τ_1 为奇数；设新的列标排列 $p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$ 的逆序数为 τ_2，则

$$(-1)^{\tau_2} = -(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}，故 (-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} = (-1)^{\tau_1+\tau_2},$$

于是

$$(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau_1+\tau_2} a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}.$$

这就说明，对换乘积中两元素的次序，从而行标排列与列标排列同时作了一次对换，因此行标排列与列标排列的逆序数之和并不改变奇偶性. 经过一次对换如此，经过多次对换亦如此. 于是经过若干次对换，使列标排列 $p_1p_2\cdots p_n$[逆序数 $\tau=\tau(p_1p_2\cdots p_n)$]变为自然排列(逆序数为 0)；行标排列则相应地从自然排列

变为某个新的排列，设此新排列为 $q_1 q_2 \cdots q_n$，则有

$$(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}.$$

又若 $p_i = j$，则 $q_j = i$（即 $a_{ip_i} = a_{ij} = a_{q_j j}$），可见排列 $q_1 q_2 \cdots q_n$ 由排列 $p_1 p_2 \cdots p_n$ 所唯一确定.

由此可得 n 阶行列式的定义如下：

定理 2.2 n 阶行列式也可定义为

$$D = \sum (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}. \tag{2.3}$$

证 按行列式定义有

$$D = \sum (-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

记
$$D_1 = \sum (-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n},$$

按上面的讨论可知：对于 D 中任一项 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n}$，总有 D_1 中唯一的一项 $(-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$ 与之对应并相等；反之，对于 D_1 中的任一项 $(-1)^{\tau(q_1 q_2 \cdots q_n)} a_{q_1 1} a_{q_2 2} \cdots a_{q_n n}$，同理总有 D 中唯一一项 $(-1)^{\tau(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}$ 与之对应并相等，所以 $D = D_1$.

更一般的有 n 阶行列式的定义如下：

定理 2.3 n 阶行列式可定义为

$$D = \sum (-1)^{\tau_1 + \tau_2} a_{p_1 q_1} a_{p_2 q_2} \cdots a_{p_n q_n}, \tag{2.4}$$

其中 $\tau_1 = \tau(p_1 p_2 \cdots p_n)$，$\tau_2 = \tau(q_1 q_2 \cdots q_n)$.

第三节 行列式的性质

记
$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

将其中的行与列互换，即把行列式中的各行换成相应的列，得到行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

上式称为行列式 D 的转置行列式，记作 D^{T}（或记为 D'）.

性质 1 $D = D^{\mathrm{T}}$.

证　记 $D=\det(a_{ij})$ 的转置行列式

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$，按行列式的定义

$$D^{\mathrm{T}}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}.$$

由定理 2.2 知 $D^{\mathrm{T}}=D$.

此性质表明，在行列式中行与列有相同的地位，凡是有关行的性质对列同样成立，反之亦然.

性质 2　交换行列式的两行(或两列)，行列式改变符号.

证　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式 $D=\det(a_{ij})$ 交换第 i 和第 j 两行得到的，当 $k\neq i,j$ 时，$b_{kp}=a_{kp}$；当 $k=i$ 或 j 时，$b_{ip}=a_{jp}$，$b_{jp}=a_{ip}$. 于是

$$\begin{aligned} D_1 &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots b_{jp_j}\cdots b_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{np_n} \\ &= \sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n} \\ &= -\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_j}\cdots a_{jp_i}\cdots a_{np_n}=-D. \end{aligned}$$

推论 1　如果行列式有两行(或两列)完全相同，则此行列式等于零.

证　把这两行互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 3　行列式中某一行(或列)的各元素有公因子，则可提到行列式符号的外面，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

推论 2　行列式的某一行(或列)所有元素都乘以同一个数 k，等于用数 k 乘

此行列式.

推论 3 行列式的某一行(或列)的元素全为零时,行列式的值等于零.

性质 4 若行列式中有两行(列)的元素对应成比例,则此行列式等于零.

性质 5 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,如

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+a_{1i}') & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+a_{2i}') & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+a_{ni}') & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 D 等于下列两个行列式之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}' & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}' & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}' & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证 在行列式的定义中,各项都有第 i 列的一个元素$(a_{ki}+a_{ki}')$,从而每一项均可拆成两项之和.

性质 6 把行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数 k 后加到另一行(列)对应的元素上去,行列式的值不变.

例如把行列式的第 j 列乘以常数 k 后加到第 i 列的对应元素上,有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & (a_{1i}+ka_{1j}) & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & (a_{2i}+ka_{2j}) & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & (a_{ni}+ka_{nj}) & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

以上没有给出证明的性质,读者可根据行列式的定义证明.

利用这些性质可简化行列式的计算,为了表达简便起见,以 r_i 表示第 i 行,c_i 表示第 i 列,交换 i,j 两行(列)记为 $r_i\leftrightarrow r_j(c_i\leftrightarrow c_j)$,第 i 行(列)乘以数 k 记为 $kr_i(kc_i)$,第 j 行(列)的元素乘以 k 加到第 i 行(列)上记为 $r_i+kr_j(c_i+kc_j)$,第 i 行(列)提取公因式记为 $r_i\div k(c_i\div k)$. 利用行列式的性质将行列式化为上三角行列式,从而算出行列式的值.

例 1 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&-5&1&2\\-3&7&-1&4\\5&-9&2&7\\4&-6&1&2\end{vmatrix}.$$

解

$$D\xlongequal{c_1\leftrightarrow c_3}-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\-1&7&-3&4\\2&-9&5&7\\1&-6&4&2\end{vmatrix}\xlongequal[\substack{r_3-2r_1\\r_4-r_1}]{r_2+r_1}-\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&2&-1&6\\0&1&1&3\\0&-1&2&0\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&2&-1&6\\0&-1&2&0\end{vmatrix}\xlongequal[r_4+r_2]{r_3-2r_2}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&3&3\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4+r_3}\begin{vmatrix}1&-5&2&2\\0&1&1&3\\0&0&-3&0\\0&0&0&3\end{vmatrix}=1\times1\times(-3)\times3=-9.$$

例 2 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a&b&b&\cdots&b\\b&a&b&\cdots&b\\b&b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\b&b&b&\cdots&a\end{vmatrix}.$$

解 注意到行列式的各行(列)对应元素相加之和相等这一特点,把第 2 列至第 n 列的元素加到第 1 列对应元素上去,得

$$D\xlongequal{c_1+(c_2+\cdots+c_n)}\begin{vmatrix}a+(n-1)b&b&\cdots&b\\a+(n-1)b&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a+(n-1)b&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1\div[a+(n-1)b]}[a+(n-1)b]\cdot\begin{vmatrix}1&b&\cdots&b\\1&a&\cdots&b\\\vdots&\vdots&&\vdots\\1&b&\cdots&a\end{vmatrix}$$