21世纪大学数学精品教材

◎丛书主编　蔡光兴　戴明强

数学模型

郑　列　朱永松　主编

科学出版社

21世纪大学数学精品教材
丛书主编 蔡光兴 戴明强

数学模型

郑 列 朱永松 主编

科学出版社

内 容 简 介

本书根据高等学校数学建模课程的教学要求，针对工科院校的特点，结合教学经验和理念编写而成，系统地介绍了数学建模的理论及应用，符合数学建模课程的教学和数学建模竞赛培训活动的实际需要.

全书共16章，包括数学建模概论、微分方程方法、差分方程方法、线性规划方法、整数规划方法、非线性规划方法、多目标决策分析方法、图论方法、动态规划方法、概率统计方法、数据处理与数据统计分析方法、回归分析方法、灰色系统分析方法、层次分析与模糊数学方法、人工神经网络方法、遗传算法。

本书可作为普通高等学校本、专科数学建模课程的教材，也可作为数学建模竞赛的培训教材和参考书，还可供相关专业研究生学习选用和有关工程技术人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

数学模型/郑列，朱永松主编. 一北京：科学出版社，2013. 7

21世纪大学数学精品教材

ISBN 978-7-03-038155-2

Ⅰ. ①数…　Ⅱ. ①郑…　②朱…　Ⅲ. ①数学模型—高等学校—教材

Ⅳ. ①O22

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第156324号

责任编辑：曾　莉　黄彩霞／责任校对：董艳辉

责任印制：彭　超／封面设计：苏　波

科 学 出 版 社　出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

武汉市新华印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

开本：787×1092　1/16

2013年7月第　一　版　印张：14 1/2

2013年7月第一次印刷　字数：357 000

定价：28.00元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

前　言

21世纪的今天，数学以空前的广度和深度向一切领域渗透，使得数学建模越来越受到人们的重视，它不仅在大学理工科中占有举足轻重的基础地位，而且在人文、经济、管理等学科中的作用也日重一日. 如何在实践中应用数学知识解决实际问题，成为重中之重，这就需要培养学生建立数学模型的能力.

我校数学建模课程的开设是在1994年，那时国内还没有成熟的教材及参考书. 我校教师查询和搜集了大量国外相关的图书与文献资料，从中精选出部分适用性较强的教案，边教学、边补充修改，不断丰富教学内容. 这些年来，我校学生在全国大学生数学建模竞赛中取得了多项国家级和省级一、二、三等奖的佳绩. 根据多年的教学积累，以及与其他院校合编数学建模教材的经验，我们编写了本书.

本书介绍了数学建模中常用的一些基础知识和典型方法，同时每章还选取了历年大学生数学建模竞赛的相关实例，剖析了相关方法的实际应用，希望使读者领略建立数学模型和分析、解决问题的方法和技巧，培养综合分析和解决问题的能力，提高实际建模能力.

本书只要求读者具备大学高等数学、工程数学的基础知识，各章节内容和范例相对独立，读者可根据自己的兴趣和需要选择阅读. 本书还可作为数学建模方法的查询手册使用.

本书由郑列、朱永松任主编，许松林、田德生、蒋慧峰、黄毅任副主编. 各章编写人员如下：朱永松负责编写第1章、第6章、第11章的部分内容，郑列负责编写第2章，田德生负责编写第3章、第15章，吴颖丹负责编写第4章、第5章，荣伏梅负责编写第7章、第9章，许松林负责编写第8章、第16章，罗幼喜负责编写第10章、第11章的部分内容，黄毅负责编写第12章，蒋慧峰负责编写第13章、第14章. 本书由郑列、朱永松提出编写思路和编写大纲，最后由朱永松、黄毅统稿.

在本书的组编过程中，蔡光兴教授对本书的结构体系提出了建设性的指导意见，在此表示感谢.

由于编者水平有限，同时时间较为仓促，本书难免有不妥之处，恳请广大读者指正并提出宝贵建议，以便再版时修订.

编　者

2013年3月

目　录

第 1 章　数学建模概论

1.1　什么是数学模型和数学建模

数学教育在整个人才培养过程中的重要性是人所共知、不言而喻的，从小学到大学十几年，数学一直是一门主课，课程中讲的、练的、考的主要是计算方法、公式推导、定义叙述、定理证明，不妨统称为“算数学”. 对于将来要以数学为工具解决各种实际问题的学生来说，当然需要准确、快捷的计算和严密的逻辑推理，即要学好“算数学”，但是在计算、推理之前首先要用数学语言描述那个问题，建立数学模型，之后还要进行分析、修正，也就是要会“用数学”.

数学模型(Mathematical Model)就是由数字、字母和数学符号组成的描述对象数量规律的公式、图表或者程序，简单地理解就是对所研究对象的数学模拟，它具有解释、判断、预测等重要功能. 当人们解决一些实际问题时，如设计产品参数、规划交通网络、制订生产计划、预报经济增长、确定投资方案等，都需要将研究对象的内在规律用数学的语言和方法表述出来，并将求解得到的数量结果返回到实际对象的问题中去，这样的一个全过程称为建立数学模型，简称数学建模(Mathematical Modeling).

建立数学模型的过程，是把错综复杂的实际问题简化、抽象为合理的数学结构的过程. 在这一过程中，要通过调查、搜集数据资料，观察和研究实际对象的固有特征和内在规律，抓住问题的主要矛盾，建立起反映实际问题的数量关系，然后利用数学的理论和方法去分析和解决问题. 这就需要一定的数学基础、敏锐的洞察力和想象力以及对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面. 在决策科学化、定量化呼声日益高涨的今天，数学建模的重要作用越来越被人们所认识，它已成为现代科技工作者必备的重要能力之一.

很多像牛顿一样伟大的科学家都是建立和应用数学模型的大师，他们将各个不同科学领域的知识同数学有机地结合起来，在不同的学科中取得了巨大的成就. 例如，力学中的牛顿定律、电磁学中的麦克斯韦方程组、化学中的门捷列夫周期表、生物学中的孟德尔遗传定律等，都是经典学科中应用数学模型的光辉范例. 目前，在计算机的支持下，数学模型在社会、经济、生态、地质、航天等方面有了更加广泛和深入的应用. 因此，从某种意义上讲，培养数学建模能力是培养现代化高科技人才的重要途径.

数学建模将各种知识综合应用于解决实际问题中，是培养和提高同学们应用所学知识分析问题、解决问题能力的必备手段之一.

模型的分类：

- 具体模型
  - 直观模型
  - 物理模型
- 抽象模型
  - 思维模型
  - 符号模型
  - 数学模型
    - 数式模型
    - 图形模型

数学模型的分类：

(1) 按研究方法和对象的数学特征可分为初等模型、几何模型、优化模型、微分方程模型、图论模型、逻辑模型、稳定性模型、扩散模型等.

(2) 按研究对象的实际领域(或所属学科)可分为人口模型、交通模型、环境模型、生态模型、生理模型、城镇规划模型、水资源模型、污染模型、经济模型、社会模型等.

1.2 数学建模的方法和步骤

建立数学模型的方法和步骤并没有一定的模式，但一个理想的模型应能反映系统的全部重要特征：模型的可靠性和模型的使用性.

建模的一般方法：

(1) 机理分析方法. 根据对现实对象特性的认识，分析其因果关系，找出反映内部机理的规律，所建立的模型常有明确的物理或现实意义.

(2) 测试分析方法. 将研究对象视为一个"黑箱"系统，内部机理无法直接寻求，通过测量系统的输入、输出数据，并以此为基础运用统计分析方法，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个数据拟合得最好的模型. 测试分析方法也叫做系统辨识.

将这两种方法结合起来使用，即用机理分析方法建立模型的结构，用系统测试方法来确定模型的参数，也是常用的建模方法.

在实际过程中用哪一种方法建模主要是根据我们对研究对象的了解程度和建模目的来决定. 机理分析方法建模的具体步骤大致如图 1.1 所示.

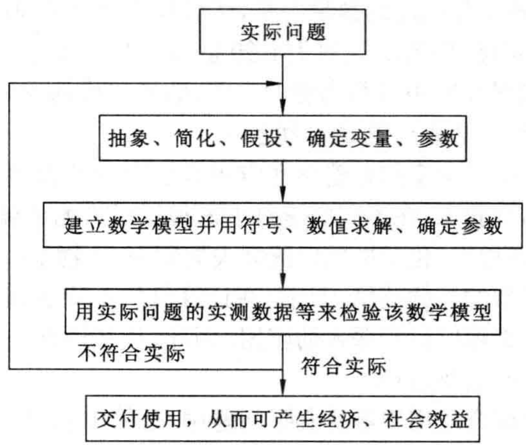

图 1.1 机理分析方法建模过程示意图

建模的步骤一般分为下列几步：

(1) 模型准备. 首先要了解问题的实际背景，明确题目的要求，搜集各种必要的信息.

(2) 模型假设. 为了利用数学方法，通常要对问题作出必要的、合理的简化，使问题的主要特征凸现出来，忽略问题的次要方面.

(3) 模型构成. 根据所作的假设以及事物之间的联系，构造各种量之间的关系，把问题化为数学问题. 要注意尽量采取简单的数学工具，因为简单的数学模型往往更能反映事物的本

质，而且也容易使更多的人掌握和使用.

(4) 模型求解. 利用已知的数学方法来求解上一步所得到的数学问题. 这时往往还要作出进一步的简化或假设.

(5) 模型分析. 对所得到的解答进行分析，特别要注意当数据变化时所得结果是否稳定.

(6) 模型检验. 分析所得结果的实际意义，与实际情况进行比较，看是否符合实际，如果结果不够理想，应该修改、补充假设或重新建模，有些模型需要经过几次反复检验，不断完善.

(7) 模型应用. 所建立的模型必须在实际中应用才能产生效益，并在应用中不断改进和完善.

1.3 数学建模与能力培养

1.3.1 数学建模过程本身就是一种创新活动

数学教育本质上是一种素质教育. 通过数学训练，可以使学生树立明确的数量观念，提高逻辑思维能力，有助于培养认真细致、一丝不苟的作风，形成精益求精的风格，提高运用数学知识处理现实世界中各种复杂问题的意识、信念和能力，调动学生的探索精神和创造力. 不论是用数学方法解决哪类实际问题，还是与其他学科相结合形成交叉学科，首要的和关键的一步都是将研究对象的内在规律用数学的语言和方法表述出来，即建立所谓数学模型，还要将求解得到的结果返回到实际问题中去，这种解决问题的全过程称为数学建模.

(1) 数学建模竞赛的题目由工程技术、经济管理、社会生活等领域中的实际问题简化加工而成，没有事先设定的标准答案，但留有充分余地供参赛者发挥其聪明才智和创造精神. 我们从下面一些题目的标题可以看出其实用性和挑战性："DNA 序列分类""血管的三维重建""公交车调度""SARS 的传播""奥运会临时超市网点设计""长江水质的评价和预测"等.

(2) 竞赛以通信形式进行，三名大学生组成一队，在三天时间内可以自由地搜集资料、调查研究，使用计算机、软件和互联网，但不得与队外任何人包括指导教师讨论. 要求每个队完成一篇包括模型的假设、建立和求解，计算方法的设计和计算机实现，结果的分析和检验，模型的改进等方面的论文. 竞赛评奖以假设的合理性、建模的创造性、结果的正确性和文字表述的清晰程度为主要标准. 可以看出，这项竞赛从内容到形式与传统的数学竞赛不同，既丰富、活跃了广大同学的课外生活，也为优秀学生脱颖而出创造了条件.

(3) 竞赛让学生面对一个从未接触过的实际问题，运用数学方法和计算机技术加以分析、解决，他们必须开动脑筋，拓宽思路，充分发挥创造力和想象力，这培养了学生的创新意识及主动学习、独立研究的能力.

(4) 竞赛紧密结合社会热点问题，富有挑战性，吸引着学生关心、投身国家的各项建设事业，培养他们理论联系实际的学风.

(5) 竞赛需要学生在很短时间内获取与赛题有关的知识，锻炼了他们从互联网和图书馆查阅文献、搜集资料的能力，也提高了他们撰写科技论文的文字表达水平.

(6) 竞赛要三个同学共同完成一篇论文，他们在竞赛中要分工合作、取长补短、求同存异，既有相互启发、相互学习，也有相互争论，培养了学生们同舟共济的团队精神和进行协调的组织能力.

(7) 竞赛是开放型的，三天中没有或者很少有外部的强制约束，同学们要自觉地遵守竞赛纪律，公平地开展竞争. 诚信意识和自律精神是建设和谐社会的基本要素之一，同学们能在竞赛中得到这种品格锻炼对他们的一生是非常有益的.

大学生数学建模竞赛是我国高等教育改革的一次成功的实践，为高等学校应该培养什么人、怎样培养人，进行了重要的探索，为提高学生综合素质提供了一个范例. 数学建模教育是培养学生综合科学素质和创新能力的有效途径，通过组织学生参加全国大学生数学建模竞赛培养了他们的竞赛意识、创新意识和创新能力，数学建模课程教学和数学建模实践活动在人才培养方面影响深入. 中国科学院李大潜等多位院士以及教育界的专家对数学建模竞赛活动的举办给予了很高的评价.

1.3.2 在数学建模培养方法上的创新活动

事实上，学生学习数学建模的过程也是培养创新能力的过程. 因此，我们应充分发挥数学建模对培养创新能力的积极作用，在解决问题的各种学习实践中要尽量提出有新意的见解和方法，在积累知识的同时注意培养和发展学生的创新能力.

在具体的培养方法上应强调以下几点：

(1) 注重积累，优化知识结构. 基础知识是构建创新能力的源泉，掌握的数学基础知识越多，联想、类比、发散的领域就越宽广，从而发现新思想、新概念、新方法、新结论的机会就越多，创新能力也就越强. 所以，在数学建模教学中，要贯彻渗透性、层次性、应用性、实践性原则来帮助学生构建创新能力，优化学生的数学知识结构，改变只会解习题、记定理的习惯，并使之能触类旁通地解决实际问题.

(2) 引导思考，重视认知过程. 在数学建模教学中，多安排学生独立思考的时间，为学生提供自由想象、自由发挥的空间，激励学生于无疑处见有疑，对数学理论、数学方法的边界条件多提疑问，发现别人未触及的潜在的解决问题的方法.

(3) 设计教学，促发直觉思维. 一是提供丰富的背景材料，设计恰当的教学情景，促使学生在分段思考的基础上作出整体思考；二是引导学生寻找和发现事物的内在联系，总结一般规律；三是安排一定的直觉思维空间，寻找解题突破口；四是鼓励学生大胆猜想，养成善于猜想的数学思维习惯.

(4) 团结拼搏，培养创新品格. 数学建模在培养学生顽强拼搏的意志、与人团结协作的精神等方面具有独特优势，因为参加数学建模的学生多数是由数学、计算机、物理等许多专业学科的人员所组成，特别是数学建模竞赛的三天实战，更是学生在大学阶段难得的综合训练的契机.

1.4 数学建模竞赛论文规范

全国大学生数学建模竞赛论文格式规范：

(1) 论文用白色 A4 纸单面打印；上下左右各留出至少 2.5 cm 的页边距；从左侧装订.

(2) 论文第一页为承诺书.

(3) 论文题目和摘要写在论文第二页上，从第三页开始是论文正文.

(4) 论文从第三页开始编写页码，页码必须位于每页页脚中部，用阿拉伯数字从“1”开始连续编号.

(5) 论文不能有页眉，论文中不能有任何可能显示答题人身份的标志.

(6) 论文题目用三号黑体字，一级标题用四号黑体字(居中)；二级、三级标题用小四号黑体字，左端对齐(不居中). 论文中其他汉字一律采用小四号宋体字，行距用单倍行距，打印时应尽量避免彩色打印.

(7) 提请大家注意：摘要应该是一份简明扼要的详细摘要(包括关键词)，在整篇论文评阅中占有重要权重，请认真书写(注意篇幅不能超过一页，且无须译成英文). 评阅时将首先根据摘要和论文整体结构及概貌对论文优劣进行初步筛选.

(8) 引用别人的成果或其他公开的资料(包括网上查到的资料) 必须按照规定的参考文献的表述方式在正文引用处和参考文献中均明确列出. 正文引用处用方括号表示参考文献的编号，如[1][3]等；引用书籍还必须指出页码. 参考文献按正文中的引用次序列出.

参考文献中书籍的表述方式为

[编号] 作者，书名，出版地：出版社，出版年.

参考文献中期刊杂志论文的表述方式为

[编号] 作者，论文名，杂志名，卷期号：起止页码，出版年.

参考文献中网上资源的表述方式为

[编号] 作者，资源标题，网址，访问时间(年月日).

1.5 建模案例及分析

1.5.1 椅子能在不平的地面上放稳吗

1. 问题提出

把椅子往不平的地面上一放，通常只有三只脚着地，放不稳，然而只要稍挪动几次，就可以四脚着地，放稳了. 下面用数学语言证明.

2. 模型假设

对椅子和地面都要作一些必要的假设：

(1) 椅子四条腿一样长，椅脚与地面接触可视为一个点，四脚的连线呈正方形.

(2) 地面高度是连续变化的，沿任何方向都不会出现间断(没有像台阶那样的情况)，即地面可视为数学上的连续曲面.

(3) 对于椅脚的间距和椅脚的长度而言，地面是相对平坦的，使椅子在任何位置至少有三只脚同时着地.

3. 模型建立

中心问题是数学语言表示四只脚同时着地的条件、结论.

首先用变量表示椅子的位置，如图 1.2 所示. 由于椅脚的连线呈正方形，以中心为对称点，

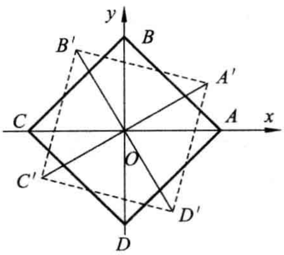

图 1.2 椅脚的平面位置图

正方形绕中心的旋转正好代表了椅子位置的改变，于是可以用旋转角度 θ 这一变量来表示椅子的位置.

其次要把椅脚着地用数学符号表示出来，如果用某个变量表示椅脚与地面的竖直距离，当这个距离为零时，表示椅脚着地了. 椅子要挪动位置说明这个距离是位置变量的函数.

由于正方形的中心对称性，只要设两个距离函数就行了，记 A,C 两脚与地面距离之和为 $f(\theta)$，B,D 两脚与地面距离之和为 $g(\theta)$，显然 $f(\theta),g(\theta)\geqslant 0$，由假设(2) 知 f,g 都是连续函数，再由假设(3) 知 $f(\theta),g(\theta)$ 至少有一个为0. 当 $\theta=0$ 时，不妨设 $g(\theta)=0,f(\theta)>0$，这样改变椅子的位置使四只脚同时着地，就归结为如下命题：

命题 已知 $f(\theta),g(\theta)$ 是 θ 的连续函数，对任意 θ，$f(\theta)g(\theta)=0$，且 $g(0)=0,f(0)>0$，则存在 θ_0，使 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$.

4. 模型求解

将椅子旋转 90°，对角线 AC 和 BD 互换，由 $g(0)=0,f(0)>0$ 可知 $g(\pi/2)>0$，$f(\pi/2)=0$. 令 $h(\theta)=g(\theta)-f(\theta)$，则 $h(0)>0,h(\pi/2)<0$，由 f,g 的连续性知 h 也是连续函数，由零点定理，必存在 θ_0 $(0<\theta_0<\pi/2)$ 使 $h(\theta_0)=0,g(\theta_0)=f(\theta_0)$，由 $g(\theta_0)f(\theta_0)=0$，所以 $g(\theta_0)=f(\theta_0)=0$.

5. 模型评价

模型的巧妙之处在于用一元变量 θ 表示椅子的位置，用 θ 的两个函数表示椅子四脚与地面的距离. 利用正方形的中心对称性及旋转 90° 并不是必须的，同学们可以考虑四脚呈长方形的情形.

1.5.2 数学建模实例：人口预报问题

1. 问题提出

人口问题是当前世界上人们最关心的问题之一. 认识人口数量的变化规律，作出较准确的预报，是有效控制人口增长的前提. 下面介绍两个最基本的人口模型，并利用表 1.1 给出的近两百年的美国人口统计数据，对模型作出检验，最后用它预报 2000 年、2010 年美国人口.

表 1.1 美国人口统计数据

年份	1790	1800	1810	1820	1830	1840	1850
人口 / 百万	3.9	5.3	7.2	9.6	12.9	17.1	23.2
年份	1860	1870	1880	1890	1900	1910	1920
人口 / 百万	31.4	38.6	50.2	62.9	76.0	92.0	106.5
年份	1930	1940	1950	1960	1970	1980	1990
人口 / 百万	123.2	131.7	150.7	179.3	204.0	226.5	251.4

2. 指数增长模型(马尔萨斯人口模型)

此模型由英国人口学家马尔萨斯(Malthus)于 1798 年提出.

(1) 假设. 人口增长率 r 是常数(或单位时间内人口的增长量与当时的人口成正比).

(2) 建立模型. 记时刻 $t=0$ 时人口数为 x_0,时刻 t 的人口数为 $x(t)$,由于量大,$x(t)$ 可视为连续、可微函数. t 到 $t+\Delta t$ 时间内人口的增量为

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=rx(t).$$

于是 $x(t)$ 满足微分方程:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=rx, \\ x(0)=x_0.\end{cases} \tag{1.5.1}$$

(3) 模型求解. 解微分方程(1.5.1)得

$$x(t)=x_0\mathrm{e}^{rt}. \tag{1.5.2}$$

上式表明:当 $t\to\infty$ 时,$x(t)\to\infty$ $(r>0)$.

(4) 模型的参数估计. 要用模型的结果式(1.5.2)来预报人口,必须对其中的参数 r 进行估计,这可以用表 1.1 的数据通过拟合得到. 通过表中 1790 ~ 1990 年的数据拟合得 $r=0.307$.

(5) 模型检验. 将 $x_0=3.9, r=0.307$ 代入式(1.5.2),求出用指数增长模型预测的 1810 ~1920 年的人口数,见表 1.2.

表 1.2　美国实际人口与按指数增长模型计算的人口比较

年份 \ 人口	实际人口 / 百万	指数增长模型	
		预测人口 / 百万	误差 /%
1790	3.9	—	—
1800	5.3	—	—
1810	7.2	7.3	1.4
1820	9.6	10.0	4.2
1830	12.9	13.7	6.2
1840	17.1	18.7	9.4
1850	23.2	25.6	10.3
1860	31.4	35.0	10.8
1870	38.6	47.8	23.8
1880	50.2	65.5	30.5
1890	62.9	89.6	42.4
1900	76.0	122.5	61.2
1910	92.0	167.6	82.1
1920	106.5	229.3	115.3

从表 1.2 可看出,1810 ~ 1870 年间的预测人口数与实际人口数吻合较好,但 1880 年以后

的误差越来越大.

分析原因,该模型的结果说明人口将以指数规律无限增长,而事实上,随着人口的增加,自然资源、环境条件等因素对人口增长的限制作用越来越显著. 如果当人口较少时人口的自然增长率可以看成常数的话,那么当人口增加到一定数量以后,这个增长率就要随着人口增加而减少. 于是应该对指数增长模型关于人口净增长率是常数的假设进行修改. 下面的模型是在修改的模型中著名的一个.

3. 阻滞增长模型(logistic 模型)

(1) 假设.

① 人口增长率 r 为人口 $x(t)$ 的函数 $r(x)$(减函数),最简单假定 $r(x)=r-sx$, $r, s>0$(线性函数),r 叫做固有增长率.

② 自然资源和环境条件年容纳的最大人口容量为 x_{m}.

(2) 建立模型. 当 $x=x_{\mathrm{m}}$ 时,增长率应为 0,即 $r(x_{\mathrm{m}})=0$,于是 $s=r/x_{\mathrm{m}}$,代入 $r(x)=r-sx$ 得

$$r(x)=r\left(1-\frac{x}{x_{\mathrm{m}}}\right). \tag{1.5.3}$$

将式(1.5.3)代入微分方程(1.5.1)得模型为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r\left(1-\dfrac{x}{x_{\mathrm{m}}}\right)x,\\ x(0)=x_0.\end{cases} \tag{1.5.4}$$

(3) 模型的求解.

解方程(1.5.4)得

$$x(t)=\frac{x_{\mathrm{m}}}{1+\left(\dfrac{x_{\mathrm{m}}}{x_0}-1\right)\mathrm{e}^{-rt}}. \tag{1.5.5}$$

根据方程(1.5.4)作出 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$-$x$ 曲线图,如图 1.3 所示,由该图可看出人口增长率随人口数的变化规律. 根据式(1.5.5)作出 x-t 曲线,如图 1.4 所示,由该图可看出人口数随时间的变化规律.

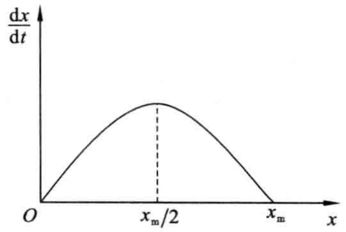

图 1.3 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$-$x$ 曲线图

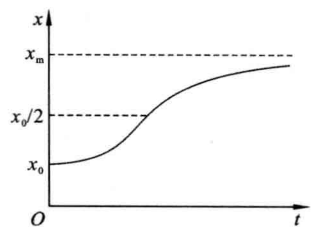

图 1.4 x-t 曲线图

(4) 模型的参数估计. 利用表 1.1 中 1790 ~ 1990 年的数据对 r 和 x_{m} 拟合得 $r=0.2072$, $x_{\mathrm{m}}=464$.

(5) 模型检验. 将 $r=0.2072$, $x_{\mathrm{m}}=464$ 代入式(1.5.5),求出用指数增长模型预测的 1800 ~ 1990 年的人口数,见表 1.3 第 3 列、第 4 列.

也可将方程(1.5.4) 离散化,得

$$x(t+1)=x(t)+\Delta x=x(t)+r\left[1-\frac{x(t)}{x_{\mathrm{m}}}\right]x(t)\quad(t=0,1,2,\cdots).\qquad(1.5.6)$$

用式(1.5.6) 预测 1800 ～ 1990 年的人口数,结果见表 1.3 第 5 列、第 6 列.

表 1.3　美国实际人口与按阻滞增长模型计算的人口比较

年份	实际人口 / 百万	阻滞增长模型			
		式(1.5.5)		式(1.5.6)	
		预测人口 / 百万	误差 /%	预测人口 / 百万	误差 /%
1790	3.9	—	—	—	—
1800	5.3	5.902 5	0.113 7	3.900 0	0.264 2
1810	7.2	7.261 4	0.008 5	6.507 4	0.096 2
1820	9.6	8.933 2	0.069 5	8.681 0	0.095 7
1830	12.9	10.989 9	0.148 1	11.415 3	0.115 1
1840	17.1	13.520 1	0.209 4	15.123 2	0.115 6
1850	23.2	16.632 8	0.283 1	19.819 7	0.145 7
1860	31.4	20.462 1	0.348 3	26.522 8	0.155 3
1870	38.6	25.173 1	0.347 8	35.452 8	0.081 5
1880	50.2	30.968 7	0.383 1	43.532 9	0.132 8
1890	62.9	38.098 6	0.394 3	56.188 4	0.106 7
1900	76.0	46.869 9	0.383 3	70.145 9	0.077 0
1910	92.0	57.660 7	0.373 3	84.730 5	0.079 0
1920	106.5	70.935 9	0.333 9	102.462 6	0.037 9
1930	123.2	87.267 4	0.291 7	118.950 9	0.034 5
1940	131.7	107.358 8	0.184 8	137.881 0	0.046 9
1950	150.7	132.075 9	0.123 6	148.797 8	0.012 6
1960	179.3	162.483 5	0.093 8	170.276 5	0.050 3
1970	204.0	199.891 9	0.020 1	201.177 2	0.013 8
1980	226.5	245.912 7	0.085 7	227.574 8	0.004 7
1990	251.4	302.528 8	0.203 4	250.448 8	0.003 8

(6) 模型应用. 现应用该模型预测人口. 用表 1.1 中 1790 ～ 1990 年的全部数据重新估计参数,可得 $r=0.2083$, $x_{\mathrm{m}}=457.6$. 用式(1.5.6) 作预测得

$$x(2000)=275,\qquad x(2010)=297.9.$$

也可用式(1.5.5) 进行预测.

1.5.3　双层玻璃的功效

1. 问题提出

北方城镇里有些建筑物的窗户是双层的,即窗户上装两层厚度为 d 的玻璃夹着一层厚度

为 l 的空气,如图 1.5 所示,据说这样做是为了保暖,即减少室内向室外的热量流失.

我们要建立一个模型来描述热量通过窗户的热传导(即流失)过程,并将双层玻璃窗与用同样多材料做成的单层玻璃窗(如图 1.6 所示,玻璃厚度为 $2d$)的热量传导进行对比,对双层玻璃窗能够减少多少热量损失给出定量分析结果.

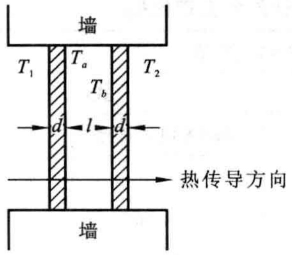

图 1.5　双层玻璃窗

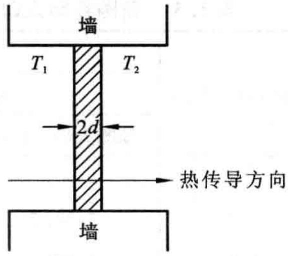

图 1.6　单层玻璃窗

2. 模型假设

(1) 假设热量的传播过程只有传导,没有对流. 即假定窗户的密封性能很好,两层玻璃之间的空气是不流动的.

(2) 假设室内温度 T_1 和室外温度 T_2 保持不变,热传导过程已处于稳定状态,即沿热传导方向,单位时间通过单位面积的热量是常数.

(3) 假设玻璃材料均匀,热传导系数是常数.

3. 符号说明

T_1—— 室内温度;
T_2—— 室外温度;
d—— 单层玻璃厚度;
l—— 两层玻璃之间的空气厚度;
T_a—— 内层玻璃的外侧温度;
T_b—— 外层玻璃的内侧温度;
k—— 热传导系数;
Q—— 热量损失.

4. 模型建立与求解

由物理学知识知道,在上述假设下,热传导过程遵从下面的物理规律:

厚度为 d 的均匀介质,两侧温度差为 ΔT,则单位时间由温度高的一侧向温度低的一侧通过单位面积的热量为 Q,与 ΔT 成正比,与 d 成反比,即

$$Q = k\frac{\Delta T}{d}, \tag{1.5.7}$$

其中,k 为热传导系数.

1) 双层玻璃的热量流失

记双层窗内层玻璃的外侧温度为 T_a,外层玻璃的内侧温度为 T_b,玻璃的热传导系数为 k_1,空气的热传导系数为 k_2,由式(1.5.7) 单位时间单位面积的热量传导(热量流失)为