卓越工程技术人才培养特色教材

GAODENG DAISHU

高等代数

主　编　蒋永泉　陶冬亚　胡　滨　张秀福

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS

卓越工程技术人才培养特色教材

高等代数

主　编　蒋永泉　陶冬亚　胡　滨　张秀福

江苏大学出版社
JIANGSU UNIVERSITY PRESS
镇　江

图书在版编目(CIP)数据

高等代数 / 蒋永泉等主编. — 镇江:江苏大学出版社,2013.5

ISBN 978-7-81130-458-9

Ⅰ.①高… Ⅱ.①蒋… Ⅲ.①高等代数—高等学校—教材 Ⅳ.①O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 103793 号

高等代数

主　　编/蒋永泉　陶冬亚　胡　滨　张秀福
责任编辑/吴昌兴　张小琴
出版发行/江苏大学出版社
地　　址/江苏省镇江市梦溪园巷 30 号(邮编：212003)
电　　话/0511-84446464(传真)
网　　址/http://press.ujs.edu.cn
排　　版/镇江文苑制版印刷有限责任公司
印　　刷/丹阳市兴华印刷厂
经　　销/江苏省新华书店
开　　本/718 mm×1 000 mm　1/16
印　　张/15.25
字　　数/301 千字
版　　次/2013 年 5 月第 1 版　2013 年 5 月第 1 次印刷
书　　号/ISBN 978-7-81130-458-9
定　　价/32.00 元

如有印装质量问题请与本社营销部联系(电话:0511-84440882)

江苏省卓越工程技术人才培养特色教材建设

指导委员会

序

深化高等工程教育改革、提高工程技术人才培养质量，是增强自主创新能力、促进经济转型升级、全面提升地区竞争力的迫切要求。近年来，江苏高等工程教育飞速发展，全省46所普通本科院校中开设工学专业的学校有45所，工学专业在校生约占全省普通本科院校在校生总数的40%，为"十一五"末江苏成功跻身全国第一工业大省做出了积极贡献。

"十二五"时期是江苏加快经济转型升级、发展创新型经济、全面建设更高水平小康社会的关键阶段。教育部"卓越工程师教育培养计划"启动实施以来，江苏认真贯彻教育部文件精神，结合地方高等教育实际，着力优化高等工程教育体系，深化高等工程教学改革，努力培养造就一大批创新能力强、适应江苏社会经济发展需要的卓越工程技术后备人才。

教材建设是人才培养的基础工作和重要抓手。培养高素质的工程技术人才，需要遵循工程技术教育规律，建设一套理念先进、针对性强、富有特色的优秀教材。随着知识社会和信息时代的到来，知识综合、学科交叉趋势增强，教学的开放性与多样性更加突出，加之图书出版行业体制机制也发生了深刻变化，迫切需要教育行政部门、高等学校、行业企业、出版部门和社会各界通力合作，协同作战，在新一轮高等工程教育改革发展中抢占制高点。

2010年以来，江苏大学出版社积极开展市场分析和行业调研，先后多次组织全省相关高校专家、企业代表就应用型本科人才培养和教材建设工作进行深入研讨。经各方充分协商，拟定了“江苏省卓越工程技术人才培养特色教材”开发建设的实施意见，明确了教材开发总体思路，确立了编写原则：

一是注重定位准确，科学区分。教材应符合相应高等工程教育的办学定位和人才培养目标，恰当把握与研究型工程人才、设计型工程人才及技能型工程人才的区分度，增强教材的针对性。

二是注重理念先进，贴近业界。吸收先进的学术研究与技术成果，适应经济转型升级需求，适应社会用人单位管理、技术革新的需要，具有较强的领先性。

三是注重三位一体，能力为重。紧扣人才培养的知识、能力、素质要求，着力培养学生的工程职业道德和人文科学素养、创新意识和工程实践能力、国际视野和沟通协作能力。

四是注重应用为本，强化实践。充分体现用人单位对教学内容、教学实践设计、工艺流程的要求以及对人才综合素质的要求，着力解决以往教材中应用性缺失、实践环节薄弱、与用人单位要求脱节等问题，将学生创新教育、创业实践与社会需求充分衔接起来。

五是注重紧扣主线，整体优化。把培养学生工程技术能力作为主线，系统考虑、整体构建教材体系和特色，包括合理设置课件、习题库、实践课题以及在教学、实践环节中合理设置基础、拓展、复合应用之间的比例结构等。

该套教材组建了阵容强大的编写专家及审稿专家队伍，汇集了国家教学指导委员会委员、学科带头人、教学一

线名师、人力资源专家、大型企业高级工程师等。编写和审稿队伍主要由长期从事教育教学改革实践工作的资深教师、对工程技术人才培养研究颇有建树的教育管理专家组成。在编写、审定教材时，他们紧扣指导思想和编写原则，深入探讨、科学创新、严谨细致、字斟句酌，倾注了大量的心血，为教材质量提供了重要保障。

该套教材在课程设置上基本涵盖了卓越工程技术人才培养所涉及的有关专业的公共基础课、专业公共课、专业课、专业特色课等；在编写出版上采取突出重点、以点带面、有序推进的策略，成熟一本出版一本。希望大家在教材的编写和使用过程中，积极提出意见和建议，集思广益，不断改进，以期经过不懈努力，形成一套参与度与认可度高、覆盖面广、特色鲜明、有强大生命力的优秀教材。

江苏省教育厅副厅长 丁晓昌

2012 年 8 月

前 言

本书是根据教育部数学与统计学教学指导委员会制定的专业教学规范精神，针对教学对象为大学本三数学专业（非师范）和统计学专业学生开设高等代数课程而编写的教材，其内容包括预备知识、一元多项式理论、线性代数的基本内容（行列式、矩阵、线性方程组、相似矩阵、二次型）以及线性代数抽象部分（线性空间与线性变换）。

在多年的大学本三"高等代数"教学实践中，笔者深深感到现有的高等代数教材与教学实践有许多不相适应的地方。为此，学校代数学教研室在院教学委员会的指导下，成立了针对大学本三数学专业（非师范）的高等代数教材编写课题组。几年来，课题组对我国大学本三院校同类专业高等代数课程的现状进行了大量的调查研究，对有关课程体系和课程内容进行了多次研讨。在此基础上，课题组老师一起编写了《高等代数教学大纲》和《高等代数讲义》试用教材，并选派有丰富教学经验的教师进行试教，效果良好。本书在试用教材的基础上，对一元多项式和线性空间、线性变换等较为抽象的内容又作了较大程度的修改，在保证知识体系完整性的前提下弱化了严格证明的要求；而对线性代数的基本内容，则以矩阵和向量为主线，强化了以矩阵的运算、变换为重点内容的要求。这样，不仅保证了学生对数学基础知识的掌握，培养了学生利用线性代数方法处理问题的能力，同时也兼顾了对学生抽象思维和逻辑推理能力的训练和提高，从而使教材更适应于教学实际的需要。

本书主要内容和习题设计由蒋永泉副教授完成，课题组成员胡滨老师参与了第 1～3 章的编写工作，陶冬亚老师参与了第 4～7 章的编写工作，张秀福老师参与了第 8 章的编写及全书的审校工作。教学实践表明，讲授本书内容大约需要 140 学时，其中包含习题课约 40 学时。

本教材的出版得到了江苏师范大学数学与统计学院数学与应用数学国家级特色专业建设点项目、“十二五”省高等学校重点专业数学类江苏省“十二五”数学一级重点学科项目和统计学省优势学科项目的资助。教材的编写得到了学校和数学与统计学院领导，特别是杜增吉教授、戴朝寿教授的大力支持和热情帮助，在此向他们表示衷心感谢！最后，非常感谢江苏大学出版社为本书面世所做的工作。

由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，恳请广大读者和同行批评指正。

编 者

2013 年 3 月

目　录

第1章 预备知识

本章介绍一些基本的概念和方法，这些概念和方法都是高等院校理科学生，特别是数学专业学生必备的基础知识，也是高等代数的预备知识.

1.1 集 合

自从1892年著名的德国数学家康托(Cantor,1845—1918)做了奠基性的工作以来，集合论的思想在自然科学中的应用越来越广泛，现已渗透到所有的数学学科中.集合论是研究集合的运算和性质的数学分支，起源于16世纪末对数集的研究，目的是寻求微积分理论的坚实基础.本节主要介绍关于集合的一些基本知识.

1.1.1 集合

集合是数学中最基本的概念之一，它是一个不定义的概念，称为原始概念.所谓**集合**，就是一些不同的确定的事物的全体.例如，一个班级的全体同学组成一个集合，这个班级的全体男生组成一个集合，该班级所在教室的全部课桌也组成一个集合；全体整数可以组成一个集合(即整数集)，由若干个整数可组成一个集合(如$\{2,3,5\}$)；某个平面上的所有的点也组成一个集合.

组成集合的每一个事物称为这个集合的**元素**.通常用大写的拉丁字母$A,B,M,\cdots$表示集合，用小写的拉丁字母$a,b,m,\cdots$表示集合的元素.通常用$\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$分别表示自然数集、整数集、有理数集、实数集和复数集.

如果a是集合A的元素，就说a**属于**A，记作$a\in A$；或者说A**包含**a，记作$A\ni a$.如果a不是集合A的元素，就说a**不属于**A，记作$a\notin A$.

由有限多个元素组成的集合称为**有限集**；由无限多个元素组成的集合称为**无限集**.如自然数集是无限集，一个班级的全体同学组成的集合是有限集.特别地，元素个数为零的集合称为**空集**，记作$\varnothing$.与空集相对应的是全集.一个集合，如果它能包括我们所考虑的事物之内的所有元素，则这个集合称为**全集**，一般用E表示全集.讨论数时，可以把复数集$\mathbf{C}$看成全集；讨论xOy平面上的点时，可以把

xOy 平面上所有点组成的集合看成全集.

要确定一个集合,就是要确定这个集合由哪些元素组成.常用来表示集合的方法有两种:一种是列举法,另一种是描述法.所谓**列举法**,就是把集合中的元素一一列举出来,再用花括号把这些元素括起来.这里,把元素一一列举出来,有时也只能列举出一部分元素,而其余元素可以从列举出部分元素的前后关系中比较明显地推导出,如由有限多个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合可以表示为

$$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},$$

而自然数集和整数集可用列举法分别表示为

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}\text{和 }\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}.$$

所谓**描述法**,就是给出这个集合元素的特征性质.有这种特征性质的元素都在这个集合中,而在这个集合中的元素都具有这个特征性质.用描述法来表示集合时,可把集合表示成如下形式:

$$\{a\,|\,a\text{ 所具有的特征性质}\}.$$

如 xOy 平面上坐标满足方程 $x^2+y^2=1$ 的点组成的集合 A 可以表示为

$$A=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1,x,y\in\mathbf{R}\},$$

而自然数集和整数集也可用描述法分别表示为

$$\mathbf{N}=\{n\,|\,n\text{ 是自然数}\}\text{和 }\mathbf{Z}=\{n\,|\,n\text{ 是整数}\}.$$

为了叙述方便,再引进几个符号.

用"$\exists$"表示"存在",如"$\exists a\in A$"表示存在元素 a 在集合 A 中,或 A 中有元素 a;记号"$\exists 2\in\mathbf{N}$","$\exists 2\in\mathbf{R}$"分别表示自然数集和实数集中有元素 2.

用"$\forall$"表示"任意的",如"$\forall a\in A$"表示 a 是集合 A 中的任意一个元素,可以用"$\forall a\in\mathbf{Z}$"表示 a 是任意一个整数.

用"$P\Rightarrow Q$"表示"如果命题 P 成立,那么命题 Q 成立".例如"如果 $a\in A$,那么 $a\in B$"可记作"$a\in A\Rightarrow a\in B$".

用"$(P)\Leftrightarrow(Q)$"表示"命题 P 成立当且仅当命题 Q 成立".例如"a 是整数当且仅当 $a\in\mathbf{Z}$"可记作(a 是整数)$\Leftrightarrow(a\in\mathbf{Z})$.

1.1.2 子集与集合的相等

定义 1 设 A,B 是两个集合,如果 A 的每一个元素都是 B 的元素,就称 A 是 B 的**子集**,或 B **包含** A,记作 $A\subseteq B$,读作 A 包含于 B,或记作 $B\supseteq A$,读作 B 包含 A,即

$$(A\subseteq B)\Leftrightarrow(\forall a\in A\Rightarrow a\in B);$$

否则,就称 A 不是 B 的**子集**,记作 $A\nsubseteq B$,即

$$(A\nsubseteq B)\Leftrightarrow(\exists a\in A,\text{而 }a\notin B).$$

如果集合 A 是集合 B 的子集,且 $\exists b\in B$,而 $b\notin A$,就称 A 是 B 的**真子集**,记作

$A\subset B$,或 $B\supset A$,即

$$(A\subset B)\Leftrightarrow(A\subseteq B,\text{且}\exists b\in B,\text{而}b\notin A).$$

关于子集问题,有下面基本的事实:

(1) 任意一个集合 A 都是它自身的子集,即 $A\subseteq A$.

(2) 空集是任意一个集合的子集.

定义 2　设 A,B 是两个集合,如果它们含有完全相同的元素,就称这两个集合**相等**,记作 $A=B$.

如果 A,B 是两个集合,则 $(A=B)\Leftrightarrow(A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A)$.

1.1.3　集合的运算

定义 3　设 A,B 是两个集合,由属于 A 或属于 B 的一切元素组成的集合称为 A 与 B 的**并**,记作 $A\cup B$,即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

根据集合并的定义,我们有

(1) $(x\in A\cup B)\Leftrightarrow(x\in A$ 或 $x\in B)$;

(2) $(x\notin A\cup B)\Leftrightarrow(x\notin A$ 且 $x\notin B)$;

(3) $A\subseteq A\cup B,B\subseteq A\cup B$.

定义 4　设 A,B 是两个集合,由 A 与 B 的公共元素所组成的集合称为 A 与 B 的**交**,记作 $A\cap B$,即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

根据集合交的定义,我们有

(1) $(x\in A\cap B)\Leftrightarrow(x\in A$ 且 $x\in B)$;

(2) $(x\notin A\cap B)\Leftrightarrow(x\notin A$ 或 $x\notin B)$;

(3) $A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B$.

定义 5　设 A,B 是两个集合,由一切属于 A 但不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差**,记作 $A-B$ 或 $A\backslash B$,即

$$A-B=\{x\mid x\in A,\text{且 }x\notin B\}.$$

定义 6　设 A 是一个集合,则集合 $E-A$ 称为 A 的**补集**,记作 A'或 $\overline{A}$.

集合的并与交满足下列算律:

(1) 幂等律:$A\cup A=A,A\cap A=A$;

(2) 交换律:$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

(3) 结合律:$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$;

(4) 分配律:$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(5) 摩根律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

要证明以上算律成立，就是证明这些算律等式两边的集合相等，下面对分配律的第二式加以证明.

证 $\forall x\in A\cap(B\cup C)$，有 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$. 若 $x\in B$，则 $x\in A\cap B$；若 $x\notin B$，则由 $x\in B\cup C$，有 $x\in C$，又 $x\in A$，故有 $x\in A\cap C$. 不论哪种情况，都有 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，从而有

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

另一方面，$\forall x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，有 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$. 若 $x\in A\cap B$，则 $x\in A$ 且 $x\in B$，有 $x\in A\cap(B\cup C)$；若 $x\in A\cap C$，则 $x\in A$ 且 $x\in C$，也有 $x\in A\cap(B\cup C)$. 所以，总有

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C).$$

从而有

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

两个集合的并与交运算可以推广到 $n(n>2)$ 个集合上. 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个集合，则由 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的一切元素组成的集合称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，即

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\{x\mid x\in A_1，\text{或 } x\in A_2，\cdots，\text{或 } x\in A_n\}；$$

由 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的一切公共元素组成的集合称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，即

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n=\{x\mid x\in A_i，i=1,2,\cdots,n\}.$$

定义 7 设 A,B 是两个集合，则集合

$$\{(a,b)\mid a\in A,b\in B\}$$

称为集合 A 与 B 的**笛卡尔乘积**，简称**积**，记作 $A\times B$.

例 1 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b\}$，则

$A\times B=\{(1,a),(1,b),(2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$；

$B\times A=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3)\}$；

$B\times B=\{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}$.

习 题 1.1

1. 写出集合 $A=\{1,2,3\}$ 的幂集 2^A.（**幂集**即由 A 的一切子集组成的集合）

2. 由 $A\cup B=A\cup C$ 能否推出 $B=C$，为什么？

3. 设 A 是一个集合，a 是 A 的一个元素. 指出下列关系是否正确，若不正确，写出正确的关系.

(1) $a=\{a\}$；　　(2) $\{a\}\in 2^A$；　　(3) $\varnothing\in A$；

(4) $\varnothing \in 2^A$;　　　(5) $\{a\} \in A$;　　　(6) $A \subseteq 2^A$.

4. 判断下列论断哪些是对的,哪些是错的? 错的论断请举出反例.

(1) $x \in A \cup B$ 且 $x \notin A \Rightarrow x \in B$;

(2) $x \in A - B \Rightarrow x \notin A \cap B$;

(3) $x \notin A \cap B \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$;

(4) $x \notin A \cup B \Rightarrow x \notin A$ 且 $x \notin B$.

1.2　数学归纳法

数学归纳法依据的原理是自然数集的一个最基本的性质——最小数原理.

最小数原理　自然数集 $\mathbf{N}$ 的任一非空子集 S 必存在一个最小数.

最小数原理并不是对任意数集都成立的. 例如,整数集 $\mathbf{Z}$、有理数集 $\mathbf{Q}$、实数集 $\mathbf{R}$ 及实数集的子集 $(0,1)$ 都没有最小数.

利用最小数原理,有下面结论.

定理 1　设 a 是任意一个整数,令

$$M_a = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, x \geqslant a\},$$

则 M_a 的任一非空子集 S 必存在一个最小数.

证　取整数 0,那么 S 可以分解为两个子集

$$S_1 = \{x \mid x \in M_a, x < 0\} \text{ 与 } S_2 = \{x \mid x \in M_a, x \geqslant 0\}$$

的并. 如果 $S_1 = \varnothing$,则 $S = S_2$ 是自然数集的非空子集,由最小数原理,在 S_2 中存在最小数 m,它就是 S 的最小数;如果 $S_1 \neq \varnothing$,则 S_1 是一个有限非空数集,从而在 S_1 中存在最小数 n,由于 S_2 中的数都大于或等于 0,当然也大于 n,于是 n 就是 S 中最小数.

定理 2(数学归纳法原理)　设有一个与整数 n 有关的命题 $P(n)$,如果

(1) $n = a\,(a \in \mathbf{Z})$ 时,命题 $P(n)$ 成立;

(2) 对任意整数 $k\,(k \geqslant a)$,当 $n = k$ 时命题 $P(n)$ 成立,就有 $n = k+1$ 时命题 $P(n)$ 也成立.

那么命题 $P(n)$ 对大于或等于 a 的一切整数都成立.

证　构造集合

$$M_a = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, x \geqslant a\},$$

下面只要证明 $P(n)$ 在 M_a 中都成立.

(反证法)假设 M_a 中有整数使 $P(n)$ 不成立,令 S 是 M_a 中所有使命题 $P(n)$ 不成立的整数组成的集合,则 $S \neq \varnothing$. 由定理 1,在 S 中存在最小数 m. 因为 $P(n)$ 对于 $n = a$ 成立,所以 $m > a$,从而有 $m - 1 \geqslant a$,即 $m - 1 \in M_a$. 又 m 是 S 中的最小数,故有 $m - 1 \notin S$,所以 $n = m - 1$ 时命题 $P(n)$ 成立. 于是,由条件(2)有 $n = m$ 时,命

题$P(n)$也成立，即 $m\notin S$，这就导致矛盾，即有命题 $P(n)$在 M_a 中均成立.

定理 2 通常称为第一数学归纳法. 在具体应用中，还经常需要用到下面的结论——第二数学归纳法.

定理 3(第二数学归纳法原理) 设有一个与整数 n 有关的命题 $P(n)$，如果

(1) $n=a(a\in \mathbf{Z})$时，命题 $P(n)$成立；

(2) 对小于等于 k 的一切整数 $n(n\geqslant a)$都有命题 $P(n)$成立，就有 $n=k+1$ 时命题 $P(n)$也成立.

那么，这个命题 $P(n)$对大于或等于 a 的一切整数都成立.

定理 3 的证明留作练习.

例 1 证明 $2^n>n^2(n\geqslant 5,n\in \mathbf{Z})$.

证 当$n=5$ 时，命题成立，因为

$$2^5=32>25=5^2.$$

假设 $n=k(k\geqslant 5)$时命题成立. 当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{aligned}2^{k+1}&=2\times 2^k>2\times k^2\\&=k^2+2k+1+[(k-1)^2-2]\\&\geqslant(k+1)^2+4^2-2>(k+1)^2,\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时，命题也成立.

所以，根据第一数学归纳法原理得 $2^n>n^2(n\geqslant 5,n\in \mathbf{Z})$.

例 2 有两堆棋子，数目相等，两人玩耍，每人可以在一堆里任意取几颗，但不能同时在两堆里取，规定取得最后一颗者胜，求证：后取者可以必胜.

证 设 n 为其中一堆棋子的颗数，当 $n=1$ 时，先取者只能在一堆里取一颗，这样另一堆里留下的一颗就被后取者取得，此时命题成立.

假设当 $n\leqslant k$ 时命题成立，下证 $n=k+1$ 时命题也成立.

设先取者在一堆里取棋子 $l(1\leqslant l\leqslant k+1)$颗，剩下的两堆棋子，一堆有 $k+1$ 颗，另一堆有 $k+1-l$ 颗. 此时，后取者可以在较多的一堆中取 l 颗，使两堆棋子都成为 $k+1-l$ 颗，这样就变成 $n=k+1-l$ 的问题，根据归纳假设，后取者可以得胜. 于是，根据第二数学归纳法原理可知，对所有的正整数 n 来说，后取者可以必胜.

习 题 1.2

1. 试述最小数原理，并说明最小数原理是否对任何数集都成立.

2. 证明 $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.

3. 证明第二数学归纳法原理.