

“十二五”国家重点图书出版规划项目

CONTROL AND APPLICATION BASE ON CATASTROPHE THEORY
基于突变理论的控制及应用

赵新华 曹伟 著



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

013045541

TP273
688

“十二五”国家重点图书出版规划项目

内容简介

本书共分5章。第1章为绪论，介绍突变理论的基本概念、分类、应用及研究现状。第2章介绍突变理论的基本原理，包括突变理论的基本概念、分类、应用及研究现状。第3章介绍突变理论在工程中的应用，包括突变理论在工程中的应用、突变理论在工程中的应用、突变理论在工程中的应用。第4章介绍突变理论在控制中的应用，包括突变理论在控制中的应用、突变理论在控制中的应用、突变理论在控制中的应用。第5章介绍突变理论在应用中的其他问题，包括突变理论在应用中的其他问题、突变理论在应用中的其他问题、突变理论在应用中的其他问题。

CONTROL AND APPLICATION BASE ON CATASTROPHE THEORY 基于突变理论的控制及应用

赵新华 曹伟 著



TP273
688



北航

C1653835



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书系统地阐述了以突变理论方法为主的突变控制的工程应用问题。全书共分6章:第1章介绍与本书密切相关的一些数学基础知识;第2章介绍7种初等突变、几何形状、突变理论的应用、突变约定、突变指征及突变应用方式等内容;第3章介绍突变控制理论的主要研究内容及突变控制的几种方法,包括状态反馈突变控制法、冲失滤波器、基于非线性多项式函数的突变控制法、基于分叉理论的突变控制方法;第4~6章阐述了突变控制的工程应用实例,包括在潜器稳定性分析中的应用、在船舶非线性运动中的突变控制及突变控制在水下超高速航行体纵向运动中的应用。

本书可作为控制理论与控制工程、系统工程、非线性动力学以及相关工程与应用专业的研究生教材或教学参考书,也可供相关专业教学和科研人员、工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

基于突变理论的控制及应用/赵新华,曹伟著. —哈尔滨:
哈尔滨工业大学出版社,2013.4

ISBN 978-7-5603-4048-7

I. ①基… II. ①赵…②曹… III. ①突变理论—应用—
自动控制 IV. ①TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 073517 号

策划编辑 许雅莹
责任编辑 李长波
封面设计 刘长友
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006
传 真 0451-86414749
网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>
印 刷 哈尔滨工业大学印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16 印张 11 字数 251 千字
版 次 2013 年 4 月第 1 版 2013 年 4 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5603-4048-7
定 价 36.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

前 言

PREFACE

突变理论是非线性动力学的一个重要分支,其应用研究不仅在应用数学、力学和人文科学有重大进展,在医学、工程技术和社会科学等各个学科领域也有广泛应用。突变理论已经成为解决一些工程问题的新思路及方法,成为非线性动力学、应用数学及先进控制理论相融合的一种及其重要的交叉学科问题。

近年来,由于非线性动力学及其相关学科的迅速发展,为基于突变理论的突变控制问题的应用研究提供了新的手段和方法,使得深入研究非线性系统的突变控制问题成为可能。国内外许多学者都对突变理论在控制问题中的应用提出了研究方法与创新思想,正是基于以上原因,本专著将作者及所在团队近几十年来在突变控制方面的研究成果整理成册,希望可以供从事相关研究的学者作为参考。

感谢哈尔滨工程大学孙尧教授及其带领的研究团队对本书撰写工作的支持,本书的部分成果得到了孙尧教授的直接指导;感谢哈尔滨工程大学自动化学院的领导,他们在本书的成稿过程中给予了许多帮助和支持,为作者的学术研究提供了良好的生活环境和科研条件,使得作者能够集中精力完成本书的撰写研究工作。

感谢国家自然科学基金项目(编号 50909027)的资助。

另外,本书参考了很多国内外专家和同行学者的论文或者著作,无法一一列举,在此一并表示感谢。

由于作者水平有限,加之时间仓促,书中疏漏和不足之处在所难免,欢迎广大读者批评指正。

作 者

2013 年 3 月

目 录

CONTENTS

第 1 章 突变理论及其数学基础	1
1.1 数学基础	1
1.1.1 结构稳定性	1
1.1.2 函数族的 Morse 引理和分裂引理	3
1.1.3 余维数和开折	7
1.2 分叉理论	10
1.2.1 分叉理论概述	10
1.2.2 静态分叉	11
1.2.3 中心流形定理	15
1.3 奇异性理论	20
1.3.1 识别问题	20
1.3.2 开折问题	20
1.3.3 分类问题	22
1.4 突变理论	22
1.4.1 势函数和基本突变	22
1.4.2 水的液气相变	24
1.4.3 “狗急跳墙”分析	26
1.4.4 范德玻尔振子	27
参考文献	29
第 2 章 7 种初等突变及其几何形状	30
2.1 折叠突变	30
2.2 尖点突变	32
2.3 燕尾突变	34
2.4 椭圆脐点突变	36
2.5 双曲脐点突变	38
2.6 蝴蝶突变	41
2.7 抛物脐点突变	44

2.8 突变理论的应用	45
2.8.1 突变约定	45
2.8.2 突变指征	47
2.8.3 应用方式概述	51
参考文献	52
第3章 突变控制理论	53
3.1 概述	53
3.2 突变特性分析及突变控制系统模型的特征	54
3.3 突变控制方法	54
3.3.1 状态反馈突变控制法	55
3.3.2 冲失滤波器辅助反馈突变控制法	60
3.3.3 基于非线性多项式函数的突变控制法	67
3.3.4 基于分叉理论的突变控制法	71
3.4 突变控制理论框架	83
参考文献	84
第4章 突变控制在潜器稳定性分析中的应用	86
4.1 潜器水平面和垂直面的非线性运动模型	86
4.2 潜器垂直运动的突变分析	87
4.2.1 模型简化	87
4.2.2 稳定性分析	88
4.2.3 突变模型的建立	89
4.2.4 突变分析	91
4.3 潜器水平面运动的非线性分析	93
4.3.1 导航及控制模型简化	93
4.3.2 稳定性分析	95
4.4 潜器近水面运动波浪扰动模型	97
4.4.1 波浪扰动模型	97
4.4.2 潜器近水面运动模型	99
4.5 潜器近水面运动静态突变特性	100
4.5.1 静态分叉及突变分析	100
4.5.2 数值分析	102
4.6 静态突变变结构控制	103
4.6.1 问题描述	104
4.6.2 突变变结构控制器	106
4.6.3 仿真结果	108
参考文献	110

第 5 章 船舶非线性运动突变特性及控制	112
5.1 船舶非线性横摇运动方程	112
5.2 横摇运动多尺度分析	113
5.3 船舶非线性横摇运动动态突变特性	116
5.3.1 零解稳定性	116
5.3.2 Hopf 分叉	118
5.3.3 数值仿真分析	120
5.4 船舶非线性横摇运动动态突变控制	121
5.4.1 线性状态反馈突变控制器设计	122
5.4.2 控制器参数讨论	123
5.4.3 受控系统数值分析	124
5.5 船舶横纵摇耦合运动模型	126
5.5.1 船舶运动坐标系及假设条件	126
5.5.2 船舶横纵摇耦合运动模型	127
5.6 船舶横纵摇耦合运动分支突变特性分析	130
5.6.1 摄动分析	130
5.6.2 突变特性	134
5.7 船舶横纵摇耦合运动分支突变控制	136
5.7.1 非线性耦合状态反馈控制器	136
5.7.2 仿真结果	139
参考文献	140
第 6 章 突变控制在水下超高速航行体纵向运动中的应用	142
6.1 水下超高速航行体概述	142
6.1.1 空泡形成的机理	142
6.1.2 水下超高速航行体的动力学模型	143
6.2 空化问题中的突变特性	145
6.3 非定常通气超空泡分叉突变特性	147
6.3.1 空泡截面扩展方程	148
6.3.2 摄动分析	148
6.3.3 静态分叉及突变分析	150
6.3.4 数值分析	151
6.4 水下超高速航行体纵向运动突变特性	152
6.4.1 模型简化	152
6.4.2 突变模型建立	153
6.4.3 尖点突变特性分析	154

6.5	以空化数为参数的水下超高速航行体突变模型	155
6.5.1	水下超高速航行体纵向运动的简化动力学模型	155
6.5.2	水下超高速航行体航行过程中的分叉突变现象	156
6.5.3	水下超高速航行体纵摇折叠突变模型的建立	157
6.5.4	基于分叉理论的突变特性分析	159
6.6	水下超高速航行体的突变控制	161
6.6.1	线性状态反馈突变控制	161
6.6.2	利用冲失滤波器进行突变控制	163
	参考文献	166

第 1 章

突变理论及其数学基础

1.1 数学基础

1.1.1 结构稳定性

Lyapunov 稳定性理论讨论系统运动状态受初始扰动后的动态特性,即研究初值的微小扰动是否会引起系统状态轨线无限偏离的问题。而结构稳定性讨论的则是鲁棒性或粗系统(Coarse System)问题,即研究系统受到扰动后是否会引起系统拓扑结构的变化问题或系统的基本性态是否会变化的问题。

考虑摄动对临界点的影响,设在 f 的临界点 0 有 $Dpl_0 = 0$ 。若 $\det Hf|_0 \neq 0$, H 为 Hesse 矩阵,那么若函数 p 的作用足够小,就有 $\det H(f+p)|_0 \neq 0$ 。根据以上推导可以给出结构稳定性的定义:若函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 等价于函数 $f+p: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 其中 $p: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 是任意点,并且充分小(p 及其各阶导数都充分接近于 0),则称函数 f 是结构稳定的。

定义 1.1(结构稳定性) 设 $X \in \mathbf{R}^r$, $f \in C^1(X, X)$, 如果存在 $\epsilon > 0$, 使得 $\forall g \in U_\epsilon(f) \subset C^1(X, X)$, g 与 f 拓扑等价,则称 f 是结构稳定的。

【例 1.1】 $f(x) = x^2$, $p(x) = 2\epsilon x$,

$$f(x) + p(x) = x^2 + 2\epsilon x = (x + \epsilon)^2 - \epsilon^2.$$

p 对 f 的影响只是把在 $x = 0$ 的临界点移动到 $x = -\epsilon$, 从而 $f(x)$ 是结构稳定的。

【例 1.2】 $f(x) = x^3$ 在 0 有退化临界点,它在摄动 p 的作用下有 3 种情况:

(a) $\epsilon > 0$ 时, f 不再有临界点;

(b) $\epsilon = 0$ 时,实际上无摄动, f 无变化;

(c) $\epsilon < 0$ 时, f 在 $x = \pm\sqrt{\epsilon/3}$ 各有一个临界点,在 0 的临界点消失。

从而 $f(x) = x^3$ 不是结构稳定的。一般地, x^k 受到摄动后,最多可有 $k-1$ 个临界点,如 x^3 的临界点(拐点)可分裂为两个(极大点与极小点), x^4 的临界点可分裂为三个,等等(图 1.1)。

下面讨论函数族的结构稳定性,它是以函数族的等价性为基础的,并且在突变理论中起着十分重要的作用。

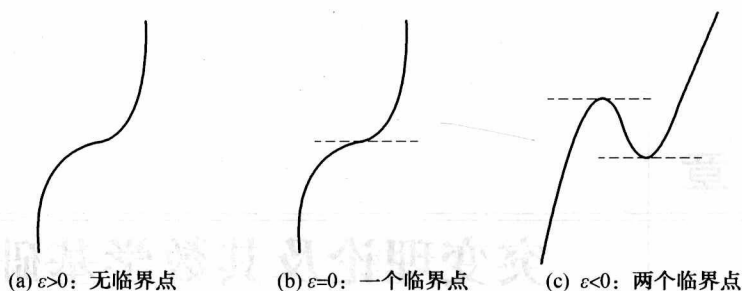


图 1.1 结构不稳定函数 $f(x) = x^3$ 在摄动 εx 下的临界点情况

设 $f: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$ 等价于函数族 $f + p: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$, 其中 $p: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$ 是任意的, 并且充分小 (p 及其各阶导数都充分接近于 0), 则函数族 f 是结构稳定的。

【例 1.3】 $W_a(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{a}{2}x^2$ 为尖点突变的退化情况, 它的临界点由

$$\frac{dW_a(x)}{dx} = x^3 + ax = 0$$

确定, 即横轴 $x = 0$ 和抛物线 $x^2 + a = 0$, 如图 1.2(a) 所示。

加入小干扰项 εx 作为摄动, 得到

$$\tilde{W}_a(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{a}{2}x^2 + \varepsilon x$$

它的临界点由

$$x^3 + ax + \varepsilon = 0$$

给出, 如图 1.2(b) 所示, 该图与图 1.2(a) 显然不同, 从而 $W_a(x)$ 不是结构稳定的。

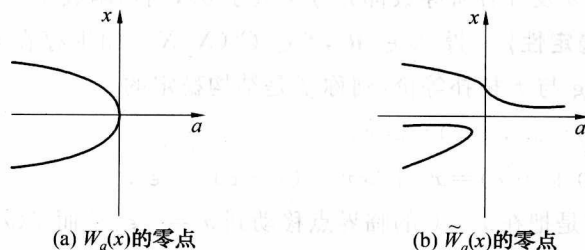


图 1.2 尖点突变的退化情况

对于平面动力系统其结构稳定性可以通过定理 1.1 进行判定。

定理 1.1 平面动力系统结构稳定的充分必要条件为:

- (1) 仅有有限个平衡点, 并且都是双曲平衡点;
- (2) 不存在联结鞍点的相轨迹;
- (3) 仅有有限个闭轨, 并且都是双曲的, 即都是稳定的或不稳定的单重极限环。

考虑非线性系统, $\dot{x} = f(x)$, $x \in X = \mathbf{R}^n$ 有非双曲平衡态 x_0 , 则此系统在此平衡态附近是结构不稳定的。事实上, 因为 x_0 是非双曲平衡态, 则 $Df(x_0)$ 有零实部特征值, 对其



作任意小的扰动,就可能使平衡点消失,或改变平衡点附近的拓扑结构(使中心流形变成稳定流形或不稳定流形),从而使扰动后的系统不与其原系统拓扑等价。

1.1.2 函数族的 Morse 引理和分裂引理

在非退化临界点附近,总可以通过坐标变换把函数化为简单的标准形式,即有引理:

引理 1.1 设 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 在 0 的邻域中光滑,且 $f(0)=0$, 则在一个可能较小的 0 的邻域中存在函数 $g_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 使得 $f = \sum_{i=1}^n x_i g_i$, 其中 g_i 光滑, 且 $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_0$ 。

证明 显然有

$$f = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx_1, \dots, tx_n) dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(tx_1, \dots, tx_n)} x_i dt$$

令

$$g_i = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i} \Big|_{(tx_1, \dots, tx_n)} dt$$

于是 $f = \sum_{i=1}^n x_i g_i$, 命题得证。

【例 1.4】 $f = x_1 \sin x_2$, 于是 $\partial f / \partial x_1 = \sin x_2$, $\partial f / \partial x_2 = x_1 \cos x_2$ 。将其化为引理 1.1 中的形式。

解 按照引理的证明步骤, 可把 f 写成

$$\begin{aligned} f &= x_1 \int_0^1 \sin(tx_2) dt + x_2 \int_0^1 \cos(tx_2) tx_1 dt = \\ &= x_1 \left(\frac{\cos x_2 - 1}{x_2} \right) + x_2 \cdot \frac{x_1}{x_2} \left(\sin x_2 - \frac{1 - \cos x_2}{x_2} \right) \end{aligned}$$

于是有

$$g_1 = -\frac{\cos x_2 - 1}{x_2}, \quad g_2 = \frac{x_1}{x_2} \left(\sin x_2 - \frac{1 - \cos x_2}{x_2} \right)$$

且容易算出

$$g_1(0) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \Big|_0 = 0, \quad g_2(0) = \frac{\partial f}{\partial x_2} \Big|_0 = 0$$

定理 1.2 (Morse 引理) 设光滑映射 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 有非退化的临界点 u ($Df|_u = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \Big|_u = 0$ 且 $\det Hf|_{x_0} \neq 0$), 则可以在 u 的一个邻域 U 中找到一个局部坐标系 $(y_1, y_2, \dots, y_n)$, 使得

$$f = f(u) - y_1^2 - \dots - y_l^2 + y_{l+1}^2 + \dots + y_n^2 \quad (1.1)$$

且对所有 i 有 $y_i(u) = 0$ 。

证明 进行坐标变换, 把 u 移到原点, 于是 $f(0) = 0$ 。按照引理 1.1, 在 0 的某个邻域中有



$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j g_j(x)$$

但 0 是临界点,从而

$$g_j(0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x_j} \right|_0 = 0$$

再次引用引理 1.1,就必定有光滑函数 $h_{ij}(x)$ 使得

$$g_j(x) = \sum_{i=1}^n h_{ij}(x)$$

从而

$$f(x) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x)$$

记 $\hat{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$, 则对上式两次求导可以得到

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_0 = 2\hat{h}_{ij}(0)$$

然后由非退化性得到

$$[\hat{h}_{ij}(0)] = \left[\frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_0 \right]$$

非奇异。

使用归纳法,设在 0 的邻域 U_1 中存在局部坐标系 $(u_1, \dots, u_n)$, 使得

$$f = \pm u_1^2 \pm \dots \pm u_{r-1}^2 + \sum_{i,j \geq r}^n u_i u_j H_{ij}(u_1, \dots, u_n)$$

注意到矩阵不会因光滑可逆的坐标变换而失秩,则总可以通过对 $(u_1, \dots, u_n)$ 作线性坐标变换而使 $H_{rr}(0) \neq 0$ 。于是可令

$$g(u_1, \dots, u_n) = \sqrt{|H_{rr}(u_1, \dots, u_n)|}$$

按反函数定理,它在含有 U_1 和 U_2 中是光滑的。再作坐标变换

$$v_i = u_i \quad (i \neq r)$$

$$v_r = g(u_1, \dots, u_n) \left(u_r + \sum_{i>r}^n \frac{u_i H_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{H_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right)$$

根据反函数定理,这是一个微分同胚。于是得到

$$f = \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_r^2 + \sum_{i,j \geq r+1}^n v_i v_j \tilde{H}_{ij}(v_1, \dots, v_n)$$

完成了归纳。

由 Morse 引理,在任意非退化临界点附近,函数可写成 Morse-l 鞍点形式,即

$$-z_1^2 - \dots - z_{n-l}^2 + z_{n-l+1}^2 + \dots + z_n^2$$

$l=0$ 时为极小点, $l=n$ 时为极大点。从而把非退化临界点称为 Morse(临界)点,把退化临界点称为非 Morse(临界)点。在非 Morse(临界)点,函数的 Hessian 矩阵是退化的,



退化的程度用余秩数来度量。

把 Morse 引理加以扩展,可以得到分裂引理,这个引理把变量分为实质性和非实质性两大类。实质性变量对应于退化部分,需要着重研究。

定理 1.3(分裂引理) 若系统 $\frac{dx}{dt} = F(x)$ 某平衡点处的 Hessian 矩阵秩为 n , 即其行列式不为零, 则存在一个坐标变换, 使 F 变成以下形式, 即

$$F = l_1 x_1^2 + l_2 x_2^2 + \cdots + l_n x_n^2 + R \quad (1.2)$$

这里 $l_1, l_2, \dots, l_n$ 均为 1 或 -1 , R 为高次项, 且 F 是结构稳定的。

另一方面, 如果 Hessian 矩阵的秩是 $n-r, r > 0$, 那么存在一个坐标变换, 它使 F 变成

$$F = l_{r+1} x_{r+1}^2 + l_{r+2} x_{r+2}^2 + \cdots + l_n x_n^2 + R \quad (1.3)$$

结构不稳定性只局限于变量 $x_1, x_2, \dots, x_r$, 从而可以只根据这些变量来分析, 而其余变量 $x_{r+1}, x_{r+2}, \dots, x_n$ 均可以忽略。

证明 作线性坐标变换 $u = u(x)$, 可以把 f 在 0 的 Hessian 矩阵变换为

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & -1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

由隐函数定理, 可以把集合

$$\left\{ u \mid \frac{\partial f}{\partial u_1} = \cdots = \frac{\partial f}{\partial u_r} = 0 \right\}$$

(局部地) 表示为一个光滑函数 $g: \mathbf{R}^{n-r} \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的图像

$$\{(g_1(u_{r+1}, \dots, u_n), \dots, g_r(u_{r+1}, \dots, u_n), u_{r+1}, \dots, u_n)\}$$

借助 g , 可以投影到 $(u_{r+1}, \dots, u_n)$ 轴, 即构造局部微分同胚 $\varphi: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$

$$\varphi(u_1, \dots, u_n) = (u_1 + g_1(u_{r+1}, \dots, u_n), \dots, u_r + g_r(u_{r+1}, \dots, u_n), u_{r+1}, \dots, u_n)$$

设 $F = f \circ \varphi$, 则每个函数

$$F_{u_{r+1}, \dots, u_n}: \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(u_1, \dots, u_n) \mapsto F(0, \dots, 0, u_{r+1}, \dots, u_n)$$

在 $\mathbf{R}^r$ 的原点都有一个 Morse 点, 但 F 在这里不一定取零值, 记这个值为

$$\hat{f}(u_{r+1}, \dots, u_n) = F(0, \dots, 0, u_{r+1}, \dots, u_n)$$

采用 Morse 引理的证明的前一部分论据, 并把引理 1.1 推广到 f 沿多根轴为零, 可以得到



$$F(u) = \hat{f}(u_{r+1}, \dots, u_n) + \sum_{k, m \leq r}^n u_k u_m h_{km}^{(u_{r+1}, \dots, u_n)}(u_1, \dots, u_r)$$

对于任意的参变量组 $(u_{r+1}, \dots, u_n)$, $h_{km}^{(u_{r+1}, \dots, u_n)}: \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$ 都是光滑的, 从而可以应用 Morse 引理得到

$$F(u) = \hat{f}(u_{r+1}, \dots, u_n) \pm v_1^2 \pm \dots \pm v_r^2$$

分裂引理说明, 函数性态所决定的变量数目不等于状态变量的数目 n , 而等于实质性状态变量数目 r , 这个数目称为 Hesse 矩阵的余秩数, 它也是函数 F 的余秩数。

关于函数的 Morse 引理和分裂引理都可以推广到函数族, 这时把参数与其他变量同等地看待。

定理 1.4 (函数族分裂引理) 设 $F: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$ 是光滑的, 记 $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r$ 中的一点为 $(x, c) = (x_1, \dots, x_n, c_1, \dots, c_r)$ 。若 F 在 $(x, c) = 0$ 有退化临界点, 且 Hesse 矩阵

$$H = \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq n}$$

的余秩数为 m , 则 F 的等价形式为

$$\tilde{F}(y_1(x, c), \dots, y_m(x, c), c) \pm y_{m+1}^2 \pm \dots \pm y_n^2$$

的函数族。

证明 找出 H 的一个非退化 $(n \times m) \times (n \times m)$ 余子式, 并通过改变坐标变换使这个余子式成为

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq n-m}$$

现定义

$$G: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^{n-m}$$

$$(x, c) \mapsto \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(x, c), \dots, \frac{\partial F}{\partial x_{n-m}}(x, c) \right)$$

则由隐函数定理, 在 0 的某一个邻域 $U \subset \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r$ 中有

$$g: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^{n-m}$$

使得

$$G(g(x_{n-m+1}, \dots, x_n, c), x_{n-m+1}, \dots, x_n, c) = 0$$

由连续性, 若令

$$z = (g(x_{n-m+1}, \dots, x_n, c), x_{n-m+1}, \dots, x_n, c)$$

则矩阵

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(z) \right]_{1 \leq i, j \leq n-m}$$

对所有 $c \in U$ 非退化。定义

$$\varphi: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r$$

$$(x, c) \mapsto (x_1 + g_1(x_{n-m+1}, \dots, x_n, c), \dots, x_{n-m} + g_{n-m}(x_{n-m+1}, \dots, x_n, c), x_{n-m+1}, \dots, x_n, c)$$



这是一个微分同胚。令 $F = F \circ \varphi$, 则在 $\mathbf{R}^{n-m}$ 的原点附近有

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(0, \dots, 0, x_{n-m+1}, x_n, c) = 0 \quad (1 \leq i \leq n-m)$$

$$\det \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(0, \dots, 0, x_{n-m+1}, x_n, c) \right]_{1 \leq i, j \leq n-m} \neq 0$$

于是可像证明 Morse 引理一样继续下去, 只是现在 h_{ij}, H_{ij}, g 等 (对 $1 \leq i, j \leq n-m$) 都以 $x_{n-m+1}, \dots, x_n, c$ 为参数。对固定的参数值只改变 $x_1, \dots, x_{n-m}$, 每一个 $F|_{\mathbf{R}^{n-m} \times \{(x_{n-m+1}, \dots, x_n, c)\}}$ 的临界值不变, 从而定义了本定理中的函数 $F: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$ 。

定理 1.5 (函数族的 Morse 引理) 设 $F: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$ 光滑, 并设它在 $(x, c) = 0$ 有非退化临界点, 即 Hessian 矩阵

$$\left[\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right]_{1 \leq i, j \leq n}$$

非退化, 则 F 等价于以下形式的函数族

$$\pm y_1^2 \pm \dots \pm y_n^2$$

证明 在定理 1.4 中取 $m=0$ 。

注意定理 1.5 中的情形, 参数 $c \in \mathbf{R}^r$ 不再在等价形式中出现, 即函数 $F_c(y) = F(y, c)$ 是 Morse 函数, 参数 c 称为分离的。于是, 对于退化的临界点, 不仅对 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 的摄动可以消除, 而且对 $F: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^r \rightarrow \mathbf{R}$ 的摄动也可以消除。事实上, $F|_{\mathbf{R}^n \times \{0\}}$ 就是 f , 若 c 是小量 (用 F 的连续性和光滑性来度量), 则 $F|_{\mathbf{R}^n \times \{c\}}$ 只是被摄动后的 f 。但对于非退化临界点, 情况则不同。

1.1.3 余维数和开折

为表示一个几何对象所需的方程数目, 一般等于这个对象的维数与它所在空间的维数之差, 称这个量值为这个对象的余维数。

1. 余维数的定义

$f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 在 0 的余维数的精确定义是:

$$\text{cod}(f) = \max_{k \geq 1} (\Delta_{k+1}(f)) \text{ 在 } J_n^{k+1} \text{ 中的余维数} =$$

$$\max_{k \geq 1} (\dim J_n^{k+1} - \dim \Delta_{k+1}(f))$$

即“缺少的乘幂项数目”。在射式空间中, 射式空间的诸坐标轴与射式的各次乘幂项相对应, 从而函数在其中的坐标就是函数的各次乘幂的系数。显然, 所缺少的乘幂项数目当 k 增加时不会减少, 如果它增加到某一数值后保持不变, 那么 $\text{cod}(f)$ 有限; 如果它无限地增加, 那么 $\text{cod}(f) \rightarrow \infty$ 。

性质 1.1 只有余维数为 1 的对象才能把 $\mathbf{R}^n$ 分裂成为两个不同的部分。

如, 一个点分裂一条线, 一条线分裂一个面。

性质 1.2 如果忽略非实质性坐标而改变问题的维数, 则余维数通常保持不变。



如图 1.3 所示,图中表示了 $\mathbf{R}^3$ 的一部分,内有一条曲线。如果忽略 z 坐标,并把注意力集中在 $x-y$ 平面,则曲线变成一个单独的点,它是一个有不同维数(0 而不是 1),但相同余维数——2 的对象。

由这个例子可以看出,当力求降低问题的维数以使它较为容易处理时,余维数(如余秩数一样)是一个合适的量值,而问题的真实维数(即状态变量的数目)变得不那么重要,甚至可以是未知的。

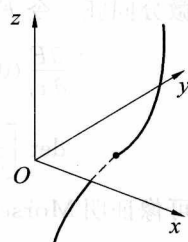


图 1.3 余维数示意图

一般说来,一个 p 维对象的单参数连续族是一个 $p+1$ 维对象:一个点族是一条曲线,一个曲线族是一个曲面。

2. 摄动引起的临界点分裂

例 1.2 说明了 Morse 点在摄动下不分裂, x^3 的临界点(拐点)可分裂为两个(极大与极小), x^4 的临界点可以分裂为三个,等等。于是有定理 1.6。

定理 1.6 设 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 在 0 具有余维数 c , 则 f 受到任意充分小摄动后所生成的 f' 在 0 附近至多有 $c+1$ 个临界点。

这条定理说明,余维数度量了临界点的复杂性。另外,要求对称性会大大增加复杂程度。例如,如果有旋转 90° 的对称性要求,那么 x 和 y 至少为 4 次,余维数至少为 8。这说明,考虑对称性虽能使分析有所简化,但这样带来的好处往往被摄动性态的复杂性所抵消。

3. 开折

上述解开退化临界点中 $\text{cod}(f)+1$ 的工作,用复数摄动确实可以完成,但用实数摄动能否完成尚待探索。较为系统化地可以采用光滑的摄动族,例如对 x^3 作 x^3+tx , 对 x^4 作 $x^4+t_2x^2+t_1x$, 等等。这种做法称为 f 的开折。开折的定义如下:

函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 的 r 开折是函数 $F: \mathbf{R}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}$, 它满足

$$F(x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0) = f(x_1, \dots, x_n)$$

我们用 $F_{t_1, \dots, t_r}(x_1, \dots, x_n)$ 来记 $F(x_1, \dots, x_n, t_1, \dots, t_r)$, 并认为 F 是以 t 为参数的 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 函数的族。称 $x_1, \dots, x_n$ 为内变量, $t_1, \dots, t_r$ 为开折变量, r 为开折维数, $\mathbf{R}^r$ 为开折空间。

f 的一个 d 开折 $\bar{F}$ 由 F 经过 3 个映射导出如下:

(1) 一个光滑映射

$$e: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^r$$

$$(s_1, \dots, s_d) \mapsto (e_1(s), \dots, e_r(s))$$

(2) $\mathbf{R}^n$ 中依赖于 s 的局部坐标变换, 即映射

$$y: \mathbf{R}^{n+d} \rightarrow \mathbf{R}^n$$



$$(x, s) \mapsto (y_1(x, s), \dots, y_r(x, s))$$

且对每个固定的 s , 映射 $y_s: x \mapsto y(x, s)$ 是 0 附近的一个局部微分同胚。

(3) 切变函数 $\gamma: \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}$, 也就是在 $\mathbf{R}^{n+d}$ 中的 0 附近有

$$\bar{F}(x, s) = F(y_s(x), e(s)) + \gamma(s)$$

【例 1.5】 由 $x^3 + sx$ 导出 $x^3 + sx^2$ 。

$$e: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ 为 } s \mapsto -s^2/3$$

$$y: \mathbf{R}^{1+1} \rightarrow \mathbf{R} \text{ 为 } (x, s) \mapsto x + s/3$$

$$\gamma: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ 为 } s \mapsto -2s^3/27$$

容易算出

$$\left(x + \frac{s}{3}\right)^3 - \frac{s^2}{3}\left(x + \frac{s}{3}\right) = x^3 + sx^2 + \frac{s^2}{3}x + \frac{s^3}{27} - \frac{s^2}{3}x - \frac{s^3}{9} = x^3 + sx^2 - \frac{2s^3}{27}$$

由以上讨论可以看出, 开折的形式是多种多样的, 其中有重要意义的是普用开折和普适开折, 定义如下:

设 f 有某一开折, 若 f 的其他开折都可以由它导出, 则该开折称为普用开折; 普用开折中开折变量最少的那些开折称为普适开折。

普适开折不必是唯一的, 但两个普适开折必定相互等价。

【例 1.6】 x^3 的若干种开折:

$$F_1(x, a_1, a_2) = x^3 + a_1x + a_2x^2$$

$$F_2(x, b) = x^3 + bx^2$$

$$F_3(x, c) = x^3 + cx$$

它们分别是普用开折、非普用开折、普适开折。事实上

$$F_2\left(x - \frac{b}{3}, b\right) = x^3 - \frac{1}{3}b^2x = F_3\left(x, -\frac{1}{3}b^2\right)$$

即当 $c > 0$ 时, 不能把 F_2 化成为 F_3 的形式。

若 F 是 f 的 r 开折, 构造

$$v_1^k(F) = \frac{\partial}{\partial t_1} J^k F_{t_1, 0, \dots, 0}$$

$$v_r^k(F) = \frac{\partial}{\partial t_r} J^k F_{0, \dots, 0, t_r}$$

并记 $V^k(F)$ 为 $v_i^k(F)$ 张成的 J_n^k 的子空间, 则有定理 1.7。

定理 1.7 k 确定的 f 的 r 开折 F 为普用开折, 当且仅当 $V^k(F)$ 与 $\Delta_k(F)$ 为 J_n^k 中的横截子空间; 若为普适开折, 当且仅当它为普用, 并且 $r = \text{cod}(f)$ 。

由定理 1.7 可以得到以下推论:

推论 若 f 的任意两个 r 开折的 $V^k(F)$ 和 $V^k(G)$ 均与 $\Delta_k(F)$ 横截, 则它们作为函数族是等价的。又若 F 是 r 开折, G 是 s 开折, $r > s$, 且二者皆为通用的, 那么 F 等价于