考研数学复习指导系列丛书

2014

考研数学

真题篇

十年真题精解与热点问题

（数学二）

陈启浩 编著

题都一样

解答不一样

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

考研数学复习指导系列丛书

2014 考研数学真题篇
（数学二）
十年真题精解与热点问题

陈启浩　编著

机　械　工　业　出　版　社

本书是考研数学辅导书．主要内容包括2004年到2013年十年的考研数学二的真题，真题的分析、解答和延伸，以及对考试热点问题的讨论．

本书适合参加全国硕士研究生入学统一考试“数学二”的同学阅读，也可作为教师的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

2014考研数学真题篇十年真题精解与热点问题．数学二/陈启浩编著．—北京：机械工业出版社，2013.4

（考研数学复习指导系列丛书）

ISBN 978-7-111-41933-4

Ⅰ.①2…　Ⅱ.①陈…　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料　Ⅳ.①013

中国版本图书馆CIP数据核字（2013）第060138号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：韩效杰　责任编辑：韩效杰　姜　凤
版式设计：霍永明　责任校对：张　媛
封面设计：路恩中　责任印制：乔　宇
北京机工印刷厂印刷（三河市南杨庄国丰装订厂装订）
2013年5月第1版第1次印刷
184mm×260mm・13.75印张・331千字
标准书号：ISBN 978-7-111-41933-4
定价：29.00元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
社服务中心：（010）88361066	教材网：http：//www.cmpedu.com
销售一部：（010）68326294	机工官网：http：//www.cmpbook.com
销售二部：（010）88379649	机工官博：http：//weibo.com/cmp1952
读者购书热线：（010）88379203	**封面无防伪标均为盗版**

考研数学复习指导系列丛书介绍

为了帮助同学们在考研复习时，在较为紧张的时间安排下，有效加深对概念与理论的理解，熟练掌握常用的解题方法与技巧，针对考研同学的实际需要，我社特组织出版了由北京邮电大学陈启浩教授编写的“考研数学复习指导系列丛书”.

本套丛书分别针对参加数学一、数学二和数学三考试的同学，其中针对数学二考试的包括三本书，分别是：

《2014 考研数学真题篇（数学二）　十年真题精解与热点问题》

《2014 考研数学基础篇　常考知识点解析（数学二）》

《2014 考研数学提高篇　常考问题的快捷解法与综合题解析（数学二）》

本套系列丛书是陈教授在对全国硕士研究生入学统一考试大纲的深入研究和对历届考研真题的精细分析的基础上写成的，也是他长期大学数学教学，特别是近十几年来考研数学辅导的结晶.

本套系列丛书，无论是内容编写还是解题方法都比较精练、新颖，富有启迪性和前瞻性，实用性、针对性也很强，可以明显提高复习的效率. 这套书贴近考纲、考试，更贴近考生，是广大考生值得拥有的一套好书.

机械工业出版社

前　言

参加考研的同学，一定要练习一下近十年的全国硕士研究生入学统一考试的真题．因为这样既可以评估复习的效果，找出不足，尽快补上，也可以获得试题形式、广度和难度等有价值的信息．

为了帮助同学们从考研真题的练习中发现更多不足，掌握更多方法，我们对 2004 年到 2013 年的考试试题，作了精心的解析，编成本套丛书的《2014 考研数学真题篇（数学二）十年真题精解与热点问题》一书．本书由三部分组成：

A. 十年真题（单独成册）

B. 十年真题精解

C. 热点问题

“十年真题精解”是对每一道真题通过“分析”、“精解”和“附注”三部分进行精细、完整的解析，特别在“精解”中大量采用了既普遍实用又富有技巧性的方法给出解答，十分贴近考生，**这是本书的一个亮点，也是本书与其他同类书籍的一个区别**．

“热点问题”是对最近十几年考研真题进行全面分析、研究后，提出的常常出现于试题中的、对考生来说较为困难或容易失分的问题，通过例题进行讲解，十分贴近考试．

希望同学们在使用真题进行练习时，不要轻易翻阅真题解答，只有当百思不得其解时才查阅解答，这样练习才能起到作用．在练习结束之后，针对每一道真题，应回过头来仔细阅读书中有关这道题的分析、精解和附注的内容，进行比对和总结，内化为自己的能力．

希望同学们认真专注地进行复习，取得满意的成绩！

欢迎同学们对本书提出建议和意见，发邮件到 cqhshuxue@ gmail. com，非常感谢！

编　者

目　　录

B　十年真题精解

一、2013 年全国硕士研究生入学统一考试试题精解

一、选择题

(1) **分析** 用常用等价无穷小代替确定正确选项.

精解 由选项中所述知 $\alpha(x)$是 $x\to0$ 时的无穷小，因此，当 $x\to0$ 时

$$\alpha(x)\sim\sin\alpha(x)=\frac{\cos x-1}{x}\sim-\frac{1}{2}x.$$

所以，当 $x\to0$ 时，$\alpha(x)$是与 x 的同阶但不等价的无穷小.

因此本题选(C).

附注 应记住常用的等价无穷小：$x\to0$ 时，

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x,$$

$$e^{x}-1\sim x,\ \ln(1+x)\sim x,\ (1+x)^{\mu}-1\sim\mu x(\mu\neq0),\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^{2}.$$

(2) **分析** 由于$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=2f'(0)$，所以只要算出$f'(0)$即可.

精解 由所给方程知$f(0)=1$. 方程两边对 x 求导得

$$-\sin(xy)(y+xy')-\frac{1}{y}y'+1=0.$$

将 $x=0$，$y=1$ 代入上式得

$$f'(0)=y'(0)=1,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{2}{n}\right)-1\right]=2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{2}{n}\right)-f(0)}{\frac{2}{n}}=2f'(0)=2.$

因此本题选(A).

附注 由导数定义知，所给极限为$2f'(0)$，所以在隐函数求导时，不必算出$f'(x)$的表达式，只需算出$f'(0)$即可. 这样使计算快捷些.

(3) **分析** 利用积分上限函数的性质确定正确选项.

精解 由于$f(x)$在$[0,2\pi]$除第一类间断点 $x=\pi$ 外处处连续，所以$f(x)$在$[0,2\pi]$上可积，从而 $F(x)$在点 $x=\pi$ 处连续.

如果 $F(x)$在点 $x=\pi\in[0,2\pi]$处可导，则 $F'(x)=f(x)$应在点 $x=\pi$ 处连续，这与 $x=\pi$ 是$f(x)$的间断点矛盾，所以 $F(x)$在点 $x=\pi$ 处不可导.

因此本题选(C).

附注 积分上限函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 有如下常用性质：

设$f(x)$在$[a,b]$上可积，则 $F(x)$在$[a,b]$上连续，

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则 $F(x)$在$[a,b]$上可导，且 $F'(x)=f(x)$.

(4) **分析** 由题设知，反常积分 $\int_1^e f(x)\,dx$ 和 $\int_e^{+\infty}f(x)\,dx$ 都收敛，由此可以确定正确的

选项．

精解 由于反常积分 $\int_1^e f(x)\mathrm{d}x=\int_1^e \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\alpha-1<1$，即 $\alpha<2$.

由于反常积分 $\int_e^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x$ 收敛，所以 $\alpha>0$.

综上所述 $0<\alpha<2$.

因此本题选(D).

附注 $\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x$ 收敛时必有 $\alpha>0$ 的证明：

$$\alpha=0\text{ 时，}\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x=\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty}\ln\ln x=+\infty.$$

$$\alpha\neq0\text{ 时，}\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{\alpha}\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln^{\alpha}x}-1\right)=\begin{cases}+\infty, & \alpha<0,\\ \frac{1}{\alpha}, & \alpha>0,\end{cases}$$

所以，$\int_e^{+\infty}\frac{1}{x\ln^{\alpha+1}x}\mathrm{d}x$ 收敛时必有 $\alpha>0$.

(5) **分析** 通过求 $\mathrm{d}z$ 算得 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，由此即可得到正确选项．

精解 由于
$$\begin{aligned}\mathrm{d}z&=f(xy)\mathrm{d}\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\mathrm{d}f(xy)\\&=f(xy)\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}+\frac{y}{x}f'(xy)(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)\\&=\left[-\frac{y}{x^2}f(xy)+\frac{y^2}{x}f'(xy)\right]\mathrm{d}x+\left[\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)\right]\mathrm{d}y\end{aligned}$$

所以，$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{x}\left[-\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)\right]$，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)$.

故 $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}\left[-\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)\right]+\left[\frac{1}{x}f(xy)+yf'(xy)\right]=2yf'(xy)$.

因此本题选(A).

附注 由于要计算 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial z}{\partial y}$，所以从计算 $\mathrm{d}z$ 入手．

(6) **分析** 由于在 D_2 上，$y-x\geqslant0$，所以从考虑 I_2 入手．

精解 由于在 D_2 上，$y-x\geqslant0$，且仅在点(0，0)处取等号，所以

$$I_2=\iint_{D_2}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0.$$

因此本题选(B).

附注 容易得到 $I_4<0$. 下面证明 $I_1=I_3=0$.

由于 D_1、D_3 都关于直线 $y=x$ 对称，在对称点处 $y-x$ 的值互为相反数，所以，

$$I_1=\iint_{D_1}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,\quad I_3=\iint_{D_3}(y-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(7) **分析** 利用两个向量组等价的定义确定正确的选项．

精解　记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)$（其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组），$\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n)$，$\boldsymbol{B}=[b_{ij}]_{n\times n}$，则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 得

$$(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n)\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}=(\boldsymbol{\gamma}_1,\boldsymbol{\gamma}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}_n),$$

即
$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma}_1&=b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{21}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ \boldsymbol{\gamma}_2&=b_{12}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{22}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{n2}\boldsymbol{\alpha}_n,\\ &\vdots\\ \boldsymbol{\gamma}_n&=b_{1n}\boldsymbol{\alpha}_1+b_{2n}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+b_{nn}\boldsymbol{\alpha}_n.\end{aligned}$$

由此可知，$\boldsymbol{C}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示．

由 $\boldsymbol{B}$ 可逆得 $\boldsymbol{CB}^{-1}=\boldsymbol{A}$，因此同样可知 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组可由 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组线性表示．由此得到矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的列向量组与 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组等价．

因此本题选(B)．

附注　两个向量组Ⅰ与Ⅱ等价的定义是：

如果Ⅰ与Ⅱ可相互线性表示，则称Ⅰ与Ⅱ等价．

（8）**分析**　利用两个实对称矩阵相似的充分必要条件是它们有相同的特征多项式，即可得到正确选项．

精解　记 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & b & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{E}$ 为三阶单位矩阵，则 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是三阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-b & -a\\ -1 & -a & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -a & -1\\ -a & \lambda-b & -a\\ -\lambda & 0 & \lambda\end{vmatrix}$$
$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -a & -1\\ -2a & \lambda-b & -a\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda[\lambda^2-(2+b)\lambda+(2b-2a^2)],$$

而 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为 $\lambda(\lambda-2)(\lambda-b)=\lambda[\lambda^2-(2+b)\lambda+2b]$．

显然 $\lambda[\lambda^2-(2+b)\lambda+(2b-2a^2)]=\lambda[\lambda^2-(2+b)\lambda+2b]$ 的充分必要条件是 $2b-2a^2=2b$，即 $a=0$，b 为任意常数．

从而 $\boldsymbol{A}\sim\boldsymbol{B}$ 的充分必要条件是 $a=0$，b 是任意常数．

因此本题选(B)．

附注　以下结论是值得注意的：

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵，则它们相似的必要而非充分条件是具有相同的特征多项式；

设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶实对称矩阵，则它们相似的充分必要条件是具有相同的特征多项式．

二、填空题

(9) **分析** 所给极限是 1^{∞} 型未定式极限，故需先将函数指数化.

精解 $\lim\limits_{x\to0}\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\ln\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]}$, (1)

其中，$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[2-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]}{x}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\left[1+1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]}{x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{\ln(1+x)}{x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

$$\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to0}\frac{1-\dfrac{1}{1+x}}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}. \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)得

$$\lim_{x\to0}\left[2-\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}=e^{\frac{1}{2}}.$$

附注 计算 0^0，1^{∞}，∞^0 型未定式 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}$ 时，一般情况下，总是先将 $[f(x)]^{g(x)}$ 指数化，即

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)},$$

然后计算 $0\cdot\infty$ 型未定式 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\ln f(x)$，如果它的值为 A，则

$$\lim_{x\to x_0}[f(x)]^{g(x)}=e^{A}.$$

以上的 x_0 可为 x_0^-，x_0^+，∞，$-\infty$，$+\infty$.

(10) **分析** 利用反函数导数计算公式计算 $\left.\dfrac{dx}{dy}\right|_{y=0}$.

精解 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0]$. 在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)=\sqrt{1-e^x}>0$，即 $y=f(x)$ 单调增加，所以 $y=0$ 时，$x=-1$，从而

$$\left.\frac{dx}{dy}\right|_{y=0}=\frac{1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=-1}}=\frac{1}{\sqrt{1-e^x}\,\big|_{x=-1}}=\frac{1}{\sqrt{1-e^{-1}}}=\sqrt{\frac{e}{e-1}}.$$

附注 设 $y=f(x)$ 可导，且 $f'(x)\neq0$，则它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 的导数 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{y=f(x)}}$.

(11) **分析** 利用角域 $\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant r(\theta),\ \theta_1<\theta<\theta_2\}$ 的面积 S 的计算公式 $S=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{\theta_1}^{\theta_2}r^2(\theta)d\theta$ 计算.

精解 L 围成的角域为 $\left\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant\cos3\theta,\ -\dfrac{\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right\}$，所以它的面积

$$S=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos^2 3\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1+\cos6\theta)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left(\theta+\frac{1}{6}\sin 6\theta\right)\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\pi}{12}.$$

附注　上述的角域面积计算公式可以推广为：

角域$\{(r,\ \theta)\mid r_1(\theta)\leqslant r\leqslant r_2(\theta),\ \theta_1\leqslant\theta\leqslant\theta_2\}$的面积为

$$S=\frac{1}{2}\int_{\theta_1}^{\theta_2}[r_2^2(\theta)-r_1^2(\theta)]\mathrm{d}\theta.$$

(12) **分析**　求出法线的斜率$-\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{t=1}$即可得到要求的法线方程．

精解　由于$x(1)=\frac{\pi}{4}$，$y(1)=\frac{1}{2}\ln 2$，并且

$$-\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{t=1}=-\left.\frac{(\arctan t)'}{(\ln\sqrt{1+t^2})'}\right|_{t=1}=-\left.\frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t}{1+t^2}}\right|_{t=1}=-1,$$

所以要求的法线方程为

$$y-\frac{1}{2}\ln 2=(-1)\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\text{ 即 }y=-x+\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

附注　曲线在对应$t=1$点处的切线方程为

$$y-\frac{1}{2}\ln 2=1\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right),\text{ 即 }y=x-\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\ln 2.$$

(13) **分析**　先算出所给的常系数非齐次线性微分方程的通解，然后利用初始条件确定对应的特解．

精解　由于y_1，y_2，y_3是所给的二阶常系数非齐次线性微分方程的解，所以$y_1-y_3=\mathrm{e}^{3x}$，$y_2-y_3=\mathrm{e}^{x}$是对应的齐次线性微分方程的两个线性无关的特解，故其通解为$Y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{x}$以及所给的二阶常系数非齐次线性微分方程的通解为

$$y=Y+y_3=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x},\tag{1}$$

且

$$y'=3C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^{x}-(1+2x)\mathrm{e}^{2x}.\tag{2}$$

将$y\mid_{x=0}=0$，$y'\mid_{x=0}=1$代入式(1)、式(2)得

$$\begin{cases}0=C_1+C_2,\\1=3C_1+C_2-1,\end{cases}\text{即 }C_1=1,\ C_2=-1.$$

将它们代入式(1)得所给的二阶常系数非齐次线性微分方程满足$y\mid_{x=0}=0$，$y'\mid_{x=0}=1$的解为$y=\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^{x}-x\mathrm{e}^{2x}$.

附注　顺便算出题中的二阶常系数非齐次线性微分方程．

显然对应的齐次线性微分方程的特征方程有根1，3，所以特征方程为$\lambda^2-4\lambda+3=0$，从而二阶常系数非齐次线性微分方程为

$$y''-4y'+3y=f(x).\tag{3}$$

将$y=-x\mathrm{e}^{2x}$代入得

$$f(x)=x\mathrm{e}^{2x}.$$

所以所求的二阶常系数非齐次线性微分方程为

$$y''-4y'+3y=x\mathrm{e}^{2x}.$$

(14) **分析** 由题设 $A_{ij}+a_{ij}=0(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$知，$\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$，由此可以算出 $|\boldsymbol{A}|$.

精解 由题设 $A_{ij}+a_{ij}=0$，即 $A_{ij}=-a_{ij}(i,\ j=1,\ 2,\ 3)$知

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}-a_{11} & -a_{21} & -a_{31}\\ -a_{12} & -a_{22} & -a_{32}\\ -a_{13} & -a_{23} & -a_{33}\end{pmatrix}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}.$$

从而由 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{3-1}=|\boldsymbol{A}|^2$ 得

$$|-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\boldsymbol{A}|^2,\text{ 即}(-1)^3|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{A}|^2.$$

由此得到 $|\boldsymbol{A}|=0$，或 -1.

若 $|\boldsymbol{A}|=0$，则

$$-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=\boldsymbol{O},$$

则有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$，与题设矛盾.
故 $|\boldsymbol{A}|=-1$.

附注 对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*$ 应记住以下常用性质：

(i) $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}_n$($\boldsymbol{E}_n$ 是 n 阶单位矩阵)；

(ii) $\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{A}^{-1}$(当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时)；

(iii) $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}(n>1)$；

(iv) $(\lambda\boldsymbol{A})^*=\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}^*$($\lambda$ 是常数)；

(v) $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})^*=(\boldsymbol{A}^*)^{\mathrm{T}}$；

(vi) $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^*=\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$($\boldsymbol{B}$ 是 n 阶矩阵).

三、解答题

(15) **分析** 用带佩亚诺型余项的麦克劳林公式寻找 $x\to 0$ 时的 $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 的等价无穷小，即可算得 n 与 a 的值.

精解 由于 $x\to 0$ 时，

$$\begin{aligned}&1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\\&=1-\left[1-\frac{1}{2!}x^2+o(x^3)\right]\left[1-\frac{1}{2!}(2x)^2+o(x^3)\right]\left[1-\frac{1}{2!}(3x)^2+o(x^3)\right]\\&=1-\left[1-\frac{5}{2}x^2+o(x^3)\right]\left[1-\frac{9}{2}x^2+o(x^3)\right]\\&=1-[1-7x^2+o(x^3)]=7x^2+o(x^3)\sim 7x^2,\end{aligned}$$

所以，由题设 $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x\sim ax^n$，即 $7x^2\sim ax^n$ 得 $n=2$，$a=7$.

附注 由于 $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 不易利用常用等价无穷小寻找其在 $x\to 0$ 时的等价无穷小，故利用带佩亚诺型余项的麦克劳林公式寻找 $1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x$ 在 $x\to 0$ 时的等价无穷小，比较快捷.

(16) **分析** 先利用旋转体体积计算公式算出 V_x 与 V_y，然后由题设算出 a 的值.

精解 $D=\{(x,\ y)\mid 0\leqslant y\leqslant x^{\frac{1}{3}},\ 0\leqslant x\leqslant a\}$绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积

$$V_x=\pi\int_0^a(x^{\frac{1}{3}})^2\mathrm{d}x=\frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}},$$

D 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积

$$V_y = 2\pi\int_0^a x \cdot x^{\frac{1}{3}}\mathrm{d}x = \frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}}.$$

于是由题设 $V_y = 10V_x$，即 $\frac{6}{7}\pi a^{\frac{7}{3}} = 10 \cdot \frac{3}{5}\pi a^{\frac{5}{3}}$ 得 $a = 7\sqrt{7}$.

附注　应记住以下公式：

设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leqslant f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x), a \leqslant x \leqslant b\}$，则 D 绕 x 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V_x = \pi\int_a^b [f_2^2(x) - f_1^2(x)]\mathrm{d}x$；

设 $D = \{(x, y) \mid f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x), 0 \leqslant a \leqslant x \leqslant b\}$，则 D 绕 y 轴旋转一周而成的旋转体体积 $V_y = 2\pi\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]\mathrm{d}x$.

本题的有关内容及方法见提高篇 09.

(17) **分析**　先画出 D 的图形，然后用极坐标计算所给的二重积分.

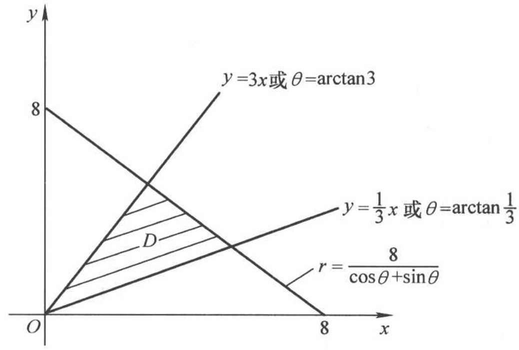

图　B-13-1

精解　D 的图形如图 B-13-1 的阴影部分所示，它是角域一部分，用极坐标表示为

$$D = \left\{(r, \theta) \mid 0 \leqslant r \leqslant \frac{8}{\cos\theta + \sin\theta}, \arctan\frac{1}{3} \leqslant \theta \leqslant \arctan 3\right\},$$

所以，

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan 3}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{8}{\cos\theta+\sin\theta}} r^2\cos^2\theta \cdot r\mathrm{d}r$$

$$= \int_{\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan 3}\frac{1024\cos^2\theta}{(\cos\theta + \sin\theta)^4}\mathrm{d}\theta = \int_{\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan 3}\frac{1024}{(1 + \tan\theta)^4}\mathrm{d}\tan\theta$$

$$= -\frac{1024}{3} \cdot \frac{1}{(1 + \tan\theta)^3}\Bigg|_{\arctan\frac{1}{3}}^{\arctan 3} = \frac{1024}{3}\left(\frac{27}{64} - \frac{1}{64}\right) = \frac{416}{3}.$$

附注　由于 D 是角域的一部分，所以用极坐标计算所给二重积分是比较快捷的.

本题的有关内容与方法见提高篇 12.

(18) **分析**　(Ⅰ)由于 $f(0) = 0$，$f(1) = 1$，所以可用拉格朗日中值定理证明本小题.

(Ⅱ)由(Ⅰ)及 $f'(x)$ 是偶函数知，$f'(\xi) = f'(-\xi) = 1$，于是对辅助函数 $F(x) = \mathrm{e}^x[f(x) - 1]$ 在 $[-1, 1]$ 上应用罗尔定理即可证明本小题.

精解　(Ⅰ)由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上满足拉格朗日中值定理条件，所以存在 $\xi \in (0, 1)$，使得 $f'(\xi)(1 - 0) = f(1) - f(0)$，即

$$f'(\xi) = 1 - f(0). \tag{1}$$

由于 $f(x)$ 是奇函数，所以有 $f(0) = -f(0)$，即 $f(0) = 0$. 将它代入式(1)得证，存在 $\xi \in (0, 1)$，使得 $f'(\xi) = 1$.

(Ⅱ)由 $f(x)$ 是可导的奇函数知 $f'(x)$ $(x \in [-1, 1])$ 是偶函数，所以由(Ⅰ)知存在 $\xi \in (0, 1)$ 和 $-\xi \in (-1, 0)$，使得 $f'(\xi) = f'(-\xi) = 1$.

作辅助函数 $F(x) = \mathrm{e}^x[f'(x) - 1]$，则 $F(x)$ 在 $[-\xi, \xi]$ 上可导，且 $F(-\xi) = F(\xi)(=0)$，所以由罗尔定理知，存在 $\eta \in (-\xi, \xi) \subset (-1, 1)$，使得 $F'(\eta) = 0$，即 $\mathrm{e}^x[f''(x) + f'(x) - 1]\mid_{x=\eta} = 0$. 由此证得存在 $\eta \in (-1, 1)$，使得 $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$.

附注 （Ⅱ）中的辅助函数 $F(x)$ 是按以下方法作出的：

将欲证的等式 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$ 中的 η 改为 x 得

$$f''(x)+f'(x)=1，即[f'(x)-1]'+[f'(x)-1]=0. \tag{2}$$

解此以 $f'(x)-1$ 为未知函数的微分方程(2)得

$$f'(x)-1=Ce^{-\int dx}=Ce^{-x}，即\ e^x[f'(x)-1]=C.$$

故令辅助函数为 $F(x)=e^x[f'(x)-1]$.

本题的证明方法(特别是作辅助函数方法)见提高篇 04.

(19) **分析** 本题是所给曲线 $\overset{\frown}{AB}$：$x^3-xy+y^3=1$（其中 $A=(0,1)$，$B=(1,0)$）到原点距离 $d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ 的最值问题，先计算 $d(x,y)$ 在边界点 A，B 处的值，然后计算 $d(x,y)$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 内部各点 $(x,y)(x>0,y>0)$ 处的值．由此得到所求的最值．

精解 $d|_A=d|_B=1$，

为计算 $d(x,y)$ 在 $\overset{\frown}{AB}$ 内部各点 $(x,y)(x>0,y>0)$ 处的值，用拉格朗日乘数法计算 $d^2(x,y)=x^2+y^2$ 在约束条件 $x^3-xy+y^3-1=0$ 下的可能极值点．为此作拉格朗日函数

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1),$$

则 $F'_x=2x+\lambda(3x^2-y)$，$F'_y=2y+\lambda(-x+3y^2)$．由拉格朗日乘数法得方程组

$$\begin{cases}F'_x=0,\\F'_y=0,\\x^3-xy+y^3=1,\end{cases}\qquad\begin{cases}2x+\lambda(3x^2-y)=0, & (1)\\2y+\lambda(-x+3y^2)=0, & (2)\\x^3-xy+y^3=1. & (3)\end{cases}$$

由于式(1)中的 x 与 y 对换得式(2)，反之也对，所以由式(1)与式(2)得 $x=y$. 将它代入式(3)得 $2x^3-x^2-1=0$，即 $(x-1)(2x^2+x+1)=0$.

于是在 $x^3-xy+y^3=1$ 的约束条件下，$d^2(x,y)$ 的可能极值点为 $(1,1)$，且 $d|_{(1,1)}=\sqrt{2}$.

由此得到曲线 $\overset{\frown}{AB}$ 到原点的最长距离 $=\max\{1,1,\sqrt{2}\}=\sqrt{2}$，最短距离 $=\min\{1,1,\sqrt{2}\}=1$.

附注 题解中有两点值得注意：

（ⅰ）当 x 与 y 对调时，式(1)成为式(2)，式(2)成为式(1)，由此推出 $x=y$. 这样做使得计算变得简单些．

（ⅱ）由题中是计算 $d(x,y)(x\geqslant0,y\geqslant0)$ 的最值，所以应将 $d(x,y)$ 在可能极值点 $(1,1)$ 处的值与边界点 A，B 处的值比较，算出 $d(x,y)$ 的最值．

有关二元函数在约束条件下的极值与最值计算见提高篇 06.

(20) **分析** （Ⅰ）用导数法计算 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值．

（Ⅱ）先用数列极限存在准则Ⅱ确定 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，然后计算其值．

精解 （Ⅰ）$f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，在其上

$$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}\begin{cases}<0,0<x<1,\\=0,x=1,\\>0,x>1,\end{cases}$$

所以 $f(x)$ 的最小值为 $f(1)=1$.

（Ⅱ）由题设知，对 $n=1, 2, \cdots$ 有

$$\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1, \text{ 即}\frac{1}{x_{n+1}}<1-\ln x_n;$$

另由(Ⅰ)知 $\ln x_n+\frac{1}{x_n}\geqslant 1$，即 $\frac{1}{x_n}\geqslant 1-\ln x_n$. 从而 $\frac{1}{x_n}>\frac{1}{x_{n+1}}(n=1, 2, \cdots)$，即 $\{x_n\}$ 单调增加.

再由题设 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1$ 及 $x_{n+1}>0$ 知 $\ln x_n<1$，即 $x_n<\mathrm{e}(n=1, 2, \cdots)$，所以 $\{x_n\}$ 有上界. 因此由数列极限存在准则Ⅱ知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，记其值为 A，则 $A>0$. 对 $\ln x_n+\frac{1}{x_{n+1}}<1(n=1, 2, \cdots)$ 的两边令 $n\to\infty$ 取极限得

$$\ln A+\frac{1}{A}\leqslant 1.$$

另由(Ⅰ)知，对于正数 A 有 $\ln A+\frac{1}{A}\geqslant 1$. 比较上述两式得

$$\ln A+\frac{1}{A}=1.$$

由(Ⅰ)可知，$\ln A+\frac{1}{A}$ 仅在 $A=1$ 时取值为 1，即方程(1)有唯一解 $A=1$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

附注　本题的数列 $\{x_n\}$ 虽不是由递推式定义的，但仍用数列极限存在准则Ⅱ证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，其中 $\{x_n\}$ 的单调性的证明与常见的不一样，应注意.

本题是综合题，有关方法见提高篇 02、06.

(21) **分析**　(Ⅰ)按平面曲线弧长公式计算 L 的弧长.

(Ⅱ)按平面图形形心公式计算其中形心的横坐标.

精解　(Ⅰ)记 $L(1\leqslant x\leqslant \mathrm{e})$ 的弧长为 S，则

$$S=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}\right)^2}\mathrm{d}x$$
$$=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2x}\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\ln x\right)\Big|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{4}\mathrm{e}^2+\frac{1}{4}.$$

(Ⅱ)记 D 的形心横坐标为 $\bar{x}$，则

$$\bar{x}=\frac{\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}, \tag{1}$$

其中，$\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x$

$$=\left[\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x(\ln x-1)\right]\Bigg|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{12}(\mathrm{e}^3-7),$$

$$\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma=\int_1^{\mathrm{e}}\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x}x\mathrm{d}y=\int_1^{\mathrm{e}}x\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x\right)\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{2}x^2\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{2x}\right)dx$$

$$= \frac{1}{8}e^4 - \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{8} - \left(\frac{1}{16}e^4 - \frac{1}{8}e^2 + \frac{1}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{16}(e^4 - 2e^2 - 3).$$

将它们代入式(1)得

$$\bar{x} = \frac{\frac{1}{16}(e^4 - 2e^2 - 3)}{\frac{1}{12}(e^3 - 7)} = \frac{3(e^4 - 2e^2 - 3)}{4(e^3 - 7)}.$$

附注 应记住以下公式.

(i) 平面曲线 L 弧长计算公式:

设 L: $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_1)$，则它的长度 $S = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}dt$;

设 L: $y = f(x)$ $(x_0 \leqslant x \leqslant x_1)$，则它的弧长 $S = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$;

设 L: $r = r(\theta)$ $(\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_1)$，则它的弧长 $S = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sqrt{r^2(\theta) + [r'(\theta)]^2}d\theta$.

(ii) 平面区域 D 的形心计算公式:

设形心为 $(\bar{x}, \bar{y})$，则

$$\bar{x} = \frac{\iint\limits_D x d\sigma}{\iint\limits_D d\sigma}, \bar{y} = \frac{\iint\limits_D y d\sigma}{\iint\limits_D d\sigma}.$$

(22) **分析** 设 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，将它代入 $\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{B}$ 转化成四元线性方程组，由此可确定使该方程组有解算的 a，b 的值，并解该方程组算出所有的 $\boldsymbol{C}$.

精解 设 $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AC} - \boldsymbol{CA} = \boldsymbol{B}$ 成为

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix},$$

即
$$\begin{pmatrix} -x_2 + ax_3 & -ax_1 + x_2 + ax_4 \\ x_1 - x_3 - x_4 & x_2 - ax_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

所以，x_1，x_2，x_3，x_4 满足非齐次线性方程组

$$\begin{cases} -x_2 + ax_3 = 0, & (1) \\ -ax_1 + x_2 + ax_4 = 1, & (2) \\ x_1 - x_3 - x_4 = 1, & (3) \\ x_2 - ax_3 = b. & (4) \end{cases}$$