SELECTED WORKS OF
CHIEN WEI-ZANG

钱伟长学术论文集

第四卷

1985—2002

上海大学出版社

SELECTED WORKS OF
CHIEN WEI-ZANG

钱伟长学术论文集

第 四 卷

1985—2002

上海大学出版社
·上海·

图书在版编目(CIP)数据

钱伟长学术论文集. 第4卷/钱伟长著. —上海：上海大学出版社，2012.9
ISBN 978-7-5671-0386-3

Ⅰ.①钱…　Ⅱ.①钱…　Ⅲ.①社会科学—文集 ②自然科学—文集　Ⅳ.①Z427

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第203786号

本书由上海文化发展基金会图书专项基金资助

责任编辑　王悦生　傅玉芳　江振新
装帧设计　柯国富
技术编辑　章　斐　金　鑫

钱伟长学术论文集
第四卷
(1985—2002)
上海大学出版社出版发行
(上海市上大路99号　邮政编码200444)
(http://www.shangdapress.com　发行热线021—66135112)
出版人：郭纯生
*
南京展望文化发展有限公司排版
上海书刊印刷有限公司印刷　　各地新华书店经销
开本787×960　1/16　印张30.5　字数598 000
2012年9月第1版　2012年9月第1次印刷
ISBN 978-7-5671-0386-3/Z·033　定价：78.00元

序　一

今年10月9日，是我国著名的科学家、教育家，伟大的爱国主义者钱伟长先生诞辰100周年的纪念日。全国政协、民盟中央以及钱老的家乡江苏省将会以多种形式来纪念钱先生。作为他度过生命中的最后时光的单位，上海大学将重新收集、整理并出版钱老的文选、学术论文集、博士学位论文等书籍，以纪念这位让广大师生尊敬的老校长，的确是一项极有意义、极具价值的工作，也是值得称道的事情。

钱老出生于江苏无锡的一个书香世家，早年随四叔钱穆研习文史，打下了扎实的国学基础。1931年，他以历史和国学的优异成绩考入清华大学文学院。入学后不久，九一八事变爆发。日本人的入侵，民族危机的严重，促使他在一夜之间改变了想法，立志弃文从理，走科学救国之路。在名师众多、学风严谨的清华物理系，钱伟长的学术能力得到很好的锤炼与提升。1940年，钱老负笈海外，赴加拿大多伦多大学留学，师从辛吉教授研究弹性力学，仅用两年时间就通过了博士学位论文答辩。他和导师合作的弹性板壳的内禀理论的论文，发表于世界导弹之父冯·卡门的60岁祝寿文集内，由此奠定了钱老在国际学术界的地位。1943年，钱老进入美国加州理工学院冯·卡门教授主持的喷射推进研究所工作，从事火箭弹道、火箭的气动及传热设计、人造卫星的轨道计算等研究，成为世界火箭、宇航工程的先行者之一。

1946年，钱老放弃在美国的优厚待遇和舒适的工作环境，毅然决然返回国内，在清华园从事教学和科研工作。20世纪的50年代中期，由周恩来总理亲自主持的“十二年科学规划”工作中，钱老、钱学森和钱三强这三位科学家因具有超前的战略眼光，被周总理赞誉为“中国的三钱”。作为享誉中外的著名科学家，钱老在奇异摄动理论、圆环壳的一般解、广义变分原理的研究及应用等方面贡献卓著；还根据国家的需求，研制出超过国际水平的锌-空气电池；研究高速撞击问题并出版专著《穿甲力学》。1984年，他提出汉字宏观字形编码，简称“钱码”，对中文信息处理技

术的发展起到了极大的推动作用。

钱老作为杰出的教育家,他非常注重人的全面成长,既重视科学基础知识的教育,同时又强调人文科学对学生教育的影响。主张大学教育应以打好基础,培养学生的自学能力为主;大学专业不应分得过细,科学教育应与人文教育相结合。1983年,他被任命为上海工业大学校长,在上海又延续了对人才培养的持续探索。上任伊始,他就提出并推进了一系列的教育教学改革措施,提出"拆除四堵墙"(学校和社会之间的墙,教学与科研之间的墙,各学院与各专业之间的墙,教与学之间的墙),强调学科交叉,夯实基础,拓宽专业,注重科学教育与人文教育的相互融合,培养全面发展的人。1994年,新上海大学组建,钱老的教育理念有了更加广阔的实践空间,他提出为学首先要学会做人,重视通识教育,强调道德、艺术和文化的基本素养,应是人人必备的;强调文理渗透,理工科学生要具备人文素质修养,注重科学素质教育与人文素质教育的融合,引导学生在专业学习的同时,奠定人文知识的基础,成为一个全面发展的人。他多次在不同的场合中指出,科学教育与人文教育是人类文明发展的双翼,缺一不可。

我个人与钱老有过共事、交往27个春秋的经历。多少年过去后,我依然清晰地记得我们当初交往和一起工作的点点滴滴。1983年初,他履任上海工业大学校长,随后他到各系科调研时和我有了初次见面,不久我便出国。1984年秋,钱老赴丹麦哥本哈根出席世界力学大会时,我们再次见面,白天我请他去我所在的公司参观考察,晚上彻夜长谈。他热切地敦促我早点回国,希望我能协助他推进上海工业大学的教育改革和提高师资的科研水平。钱老深情地对我说:"国家和学校都需要你,我也需要你回去帮我一起管理学校。"我深感此话的分量,国家正在快速发展,教育科研岗位需要我。于是我尽快结束了在国外的研究工作,提前回国,回到我魂牵梦绕的大学校园。1986年,我从国外回来后不久就被任命为上海工业大学副校长,几个月以后又被任命为常务副校长。在协助钱老管理学校的那几年里,钱老和我经常为了学校建设的方方面面开展持续的调研和座谈交流工作。钱老总是十分关心与教学、科研和服务社会等密切相关的事。从师资队伍的建设、高端人才的引进,到与大型企业的对接、大型项目的承接;从学校图书馆的建设、原版资料的选购,到实验室仪器设备的配置;从教导学生正确的学习方法,到鼓励教师学计算机、学外语,开展国际学术交流;从学校行政管理改革,到育人环境和制度建设,钱老都密切关注。正是有钱老的关注和督促,才有了学校教育理念的不断更新,管理队伍

思想观念的不断进步。

1994年由上海科技大学、上海工业大学、原来的上海大学以及上海科技高等专科学校等四校合并组建新上海大学，德高望重的钱老再次领命就任校长。老骥伏枥，志在千里，在钱校长的带领和广大师生的努力下，1996年新组建的上海大学跻身“211工程”，1998年新校区建成投入使用，一个更加宽广的舞台铺开了，学校的发展与改革跨跃新台阶的序幕再次拉开。这个时期，我已经到上海市政府工作，对钱老为推进学校跃升，审时度势、抓住机遇、顺势而上所起到的奠基性的、他人无法替代的作用是非常清楚的。这些往事给我和学校其他同事都留下了深刻的印象。

钱老曾说，回顾这一辈子，他是一个科学工作者、教育工作者，但更是一个爱国主义者。他一辈子投身祖国的科教事业，并取得了卓越的成就，他始终以国家和民族利益为重的高尚品质，已经很好地诠释了他的话。晚年高龄时，他更是积极地参政议政，与共产党人共商国是，积极地推动祖国的和平统一大业。没有对祖国的真挚感情，哪有他的人生动力和远大目标。每每回忆起这些事，我都深深地为钱老的人格魅力和爱国情怀所感动，也深深地觉得当代学界更应该像老一辈科学家一样，将爱国作为自己追求事业成功的唯一动力。

钱老不仅身体力行爱国，他更是重视通过教育来培养具有爱国精神的一代又一代的莘莘学子。他说上海大学的校训光有“自强不息”四个字还不够，还要加上“先天下之忧而忧，后天下之乐而乐”。“所谓‘忧’，就是要忧国之所忧、忧民之所忧，把个人价值的实现同国家的强盛、民族的发展和人民的利益结合起来”，要把百姓之忧、国家之忧、民族之忧时刻放在心上。今天，上海大学的校训因含有“先天下之忧而忧，后天下之乐而乐”而独具特色，彰显了这位科学大师的胸怀与境界。

纪念钱老百年诞辰，就是要缅怀他的伟大成就，就是要继承和发扬他的爱国精神。上海大学拟出版《钱伟长文选》、《钱伟长学术论文集》和他的博士学位论文《弹性板壳的内禀理论》(英文版)等系列书籍来纪念这位科学巨匠、教育大家，这是方便年青后学很好地阅读大师、传承大师，从而继续钱老未竟的事业。其中，《钱伟长文选》精心收录了钱老从1949年至2008年半个多世纪间有关教育、教学、科研等方面的重要文章和讲话稿，共280篇，按时间顺序分六卷出版。这些文章和讲话稿，涉及哲学、历史学、文学、自然科学、工程技术、区域经济、城市建设、管理学、教育学等，反映了钱老对祖国的科学教育事业的真知灼见和热诚实践，对国家和民族

在社会、经济、科技、文化发展等方面的关注和投入，其中有许多文章是他前瞻性的思考与探索的结晶，文章的字里行间洋溢着他和中国共产党肝胆相照之情，充分体现了他的拳拳爱国之心以及丰富的学识和坦荡的胸怀。《钱伟长学术论文集》共收录 108 篇学术论文，内容包括板壳内禀理论、薄板大挠度问题、环壳理论及其应用、广义变分原理、汉字计算机输入编码等。我想，这些书籍的出版，对于我们进一步了解钱老的学术成就和贡献、了解其爱国奉献的一生是极有帮助的。

是为序。

徐匡迪

2012 年 9 月 1 日

序　　二

值此钱伟长先生一百周年诞辰之际，上海大学出版社出版《钱伟长学术论文集》，是对这位著名科学家的最好的纪念，可以让广大读者直接和完整地阅读并研究他半个多世纪的科研生涯中公开发表的主要论文，了解他的学术贡献和治学理念，领略这位大师的风采，因此是一件极有意义的事情。

为了便于读者阅读、理解这一论文集，仅就我个人的了解和体会，尝试着对本书的内容做一概括介绍。

钱伟长先生的科学研究始于上个世纪的三四十年代，那是航空航海事业突飞猛进的时代，现代化大工业蓬勃发展的时代，自然科学基础研究展现价值的时代，大量复杂的科学技术问题向科学家们提出了严峻的挑战，其中的非线性问题一时成为人们集中关注的焦点。钱伟长先生敏锐地抓住这一关键，以大变形板壳力学问题为突破口，主攻非线性力学，且以此为自己毕生的事业，做出了一系列重要贡献。作为兴趣广泛的科学家，他根据时代发展的需要，还涉猎于一些其他研究领域，也卓有成就。

这里概述钱伟长先生的主要学术贡献。

在20世纪40年代，钱伟长先生在弹性板壳的内禀理论方面做了一系列工作。弹性薄板和薄壳是广泛应用于工程技术中的结构元件，当时已有大量分散的工作，但尚无完整的理论体系和系统的简化近似方法。他与他的导师J. L. Synge教授一起，首次采用张量分析这一有力工具，经过宏微观全面分析，建立了弹性板壳内禀统一理论；他在微观分析中采用了一种全新的拖带坐标系，可用以描述各种不同形状的薄壳和薄板问题，并根据板壳特征尺度与曲率半径之比及其与相对厚度的关系，提出了统一的简化近似方法，对薄板、薄壳进行了详尽细致的分类，导出了一些已知的线性和非线性板壳力学方程，并由此产生了由后人命名的的“钱伟长方程”。这一工作在国际上产生了重要影响，借此奠定了他在力学界的学术地位。

钱伟长先生回国后的头一个十年，对弹性薄板大挠度问题进行了集中研究，这是一个涉及构件大变形的几何非线性问题，受到了 von Kármán 等科学家的密切关注，但当时缺乏准确有效的解法。1947 年，钱伟长独辟蹊径，提出一种系统近似法（后人称为"钱伟长方法"），对圆薄板大挠度问题采用中心挠度作为摄动参数，进行逐次逼近，取得了符合于实验结果的摄动解。接着，在 1948 年，为了解决更大挠度的问题，他把边界层理论的思想引入圆薄板大挠度分析，提出了一种独到的方法（后人称之为合成展开法），这是具有开创性的一种新的奇异摄动法。此后，他率领一批学生进一步完善和发展了相关工作，并因此于 1955 年获得了国家自然科学二等奖。

钱伟长先生另一项重要成就是对广义变分原理的研究。20 世纪 50 年代末，他率领团队开始从事此项研究。1964 年，为了改变寻求变分原理泛函的试凑途径，提出了一种拉格朗日乘子法，从最小位能原理或最小余能原理等约束条件出发，把约束条件用拉格朗日乘子引入泛函，化为无条件的变分驻值原理，经过变分得到待定的拉格朗日乘子用原始变量的表达式，建立广义变分原理的驻值变分泛函，并据此导出了壳体非线性方程。这是领先于国际同行的开创性工作。1978 年之后，他深入研究了广义变分原理在有限元计算中的应用，推动了协调元、杂交元和混合元方法的发展和应用。1982 年，由于他在广义变分原理方面的成就，再度获得国家自然科学二等奖。

1979 年以后，钱伟长先生关注环壳理论及其应用，显示了他建模分析、解析求解的功力和理论联系实际的卓越能力。圆环壳是弹性元件和其他壳体结构中常见的一种形式，在许多仪器仪表工业中有着广泛的应用。圆环壳方程非常复杂，难于求解。钱伟长给出了轴对称圆环壳的复变量方程的特解和一般解，解决了困扰人们几十年的难题，并提出了非线性计算通用程序，可用于仪表元件和波纹管设计。

钱伟长先生在流体力学方面也做出过积极贡献。1947 年，他采用经他拓广的摄动法，改进了 Th. von Kármán 和 N. B. Moore 的超声速锥型流的渐近解；1949 年，他采用渐近展开法，仅用三个简化假设导出了润滑问题的高阶雷诺方程；1984 年，他从流体力学基本方程出发，建立了更为普遍的变分原理，并用它建立的拉格朗日乘子法建立了广义变分原理。

20 世纪 70 年代，钱伟长先生参与了锌-空气高能电池的研制，取得了富有成效的成果。

20世纪80年代，钱伟长先生提出了汉字宏观字形编码(简称“钱码”)，根据汉字使用习惯和识字规律，结合汉字结构特点，给出简洁的输入规则，是早期的最优输入法之一，许多巧妙构思被后来的计算机汉字输入法吸纳。

以上仅归纳了钱伟长先生在漫长的学术生涯中的主要贡献，从这个四卷本论文集中这些贡献得到了较为全面的反映，读者朋友可以细细品味。

细读这本论文集，我们可以体会到钱伟长先生在长期科研实践中形成的治学理念，这就是：高瞻远瞩，锐意创新，求真务实。他一向认为，科学研究要从实际出发，为社会发展和学科发展服务，要高瞻远瞩地根据实际需要来选题；而科学研究必须从基础研究入手，不能就事论事，照抄照搬，必须狠下功夫，大力从事机理性探索，不断提出新概念、新方法，所得到的结果必须接受实践的检验。从文集中的每一篇论文中，我们都可以看到创新精神的光芒。

我相信，不仅力学工作者可以从阅读这本论文集获益，其他领域的读者也可从中得到有益的知识和启示。

郑哲敏

2012年9月6日

目　　录

对合变换和薄板弯曲问题的多变量变分原理

摘要 本文利用拉氏乘子法把薄板弯曲问题的最小位能原理和最小余能原理的变分约束条件解除,从而导出了常见的广义变分原理. 为了降低泛函中变量导数的阶次,我们用对合变换引进新的正则变量. 于是,我们可以进一步利用拉氏乘子法,把这些对合变换当作变分约束而予以消除,从而导出了各种多变量的薄板弯曲广义变分原理. 事实证明,使用上述拉氏乘子法,并不能消除一切变分约束;为此,我们进一步引用高阶拉氏乘子法消除这些剩下来的约束条件,从而导得了薄板弯曲问题的更一般的广义变分原理.

一、引论

利用拉氏乘子法把薄板弯曲问题的最小位能原理和最小余能原理的变分约束条件解除,从而导出了常见的广义变分原理,这是众所周知的. 但是这样求得的泛函中,变量的导数阶次高达二次,对于有限元法计算中选用协调元素时情况较为复杂,计算十分不便. 为此,我们可以使用对合变换引进新的正则变量来降低泛函中变量导数的阶次,从而简化有限元法计算. 这相当于引进了新的变分约束条件,为了解除这些新增的约束条件,我们可以进一步使用拉氏乘子法,把这些对合变换吸收入泛函中去,建立了新的变量更多的泛函.

我们必须指出,用拉氏乘子法把变分问题通过对合变换引进新变量而写成正规形式的方法,长久以来,业已引起很多学者的注意,例如: E. Trefftz (1927, 1928)[1,2],K. O. Friedrich (1929)[3]以及 R. Courant (1937)[4]等对此都有陈述讨论. 如果用这种方法处理薄板弯曲的变分问题,在实质上能更清楚地揭露薄板弯曲问题的多变量变分原理的意义. 凡胡海昌(1981)[5]所叙述的薄板多变量变分问题,都可以用拉氏乘子法通过对合变换引进新变量而导出其有关泛函. 但是,通过拉氏乘子法建立多变量变分泛函和胡海昌直接写出泛函再从变分确定其自然条件的过程,是有根本差别的. 前者可以明确多变量变分所受的必要和充分的变分约束条

原载《应用数学和力学》,1985,6(1): 25 - 40.

件，后者并不清楚所建立的泛函究竟受什么变分约束条件.因此，用拉氏乘子法建立多变量变分原理的泛函，对于薄板弯曲问题而言，还是很重要的.

本文证明，使用上述拉氏乘子法，并不能解除一切变分约束；为此，我们进一步引用钱伟长(1983)[6]所阐明的高阶拉氏乘子法解除这些剩下来的变分约束条件，从而导出了前所未见的薄板弯曲问题的更一般的广义变分原理.

二、对合变换和正则形式

现在让我们用下列简例，说明对合变换(Involutory Transformation)和用拉氏乘子法解除对合变换的约束的方法.

求

$$J(u)=\iint_{\Omega}\frac{1}{2}\{(u_{,1})^2+(u_{,2})^2\}\mathrm{d}\Omega \tag{2.1}$$

为最小值的欧拉方程，其边界条件为

$$u(s)=\bar{u}(s) \tag{2.2}$$

其中，设 $u_{,1}=\dfrac{\partial u}{\partial x_1}$，$u_{,2}=\dfrac{\partial u}{\partial x_2}$ 有分段连续性，并设边界 Γ 除在有限个角点上外，到处有连续变化的切线方向，这是一个在约束条件(2.2)的约束下，求 $J(u)$ 的极值的欧拉方程的变分命题.

我们可以引入对合变换

$$u_{,1}=\frac{\partial u}{\partial x_1}=p,\ u_{,2}=\frac{\partial u}{\partial x_2}=q \tag{2.3}$$

而把 p, q 也看作是独立变量，于是 $J(u)$ 可以写成

$$J'(u,\ p,\ q)=\iint_{\Omega}\frac{1}{2}(p^2+q^2)\mathrm{d}\Omega \tag{2.4}$$

原题化为在(2.2)和(2.3)的约束条件下求 $J'(u,\ p,\ q)$ 为最小值的欧拉方程，现在让我们引用拉氏乘子法，设采用待定拉氏乘子 λ, μ 和 ρ，新的泛函可以写成

$$\begin{aligned}H(u,\ p,\ q,\ \lambda,\ \mu,\ \rho)=&\iint_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}(p^2+q^2)+\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}-p\right)\right.\\&\left.+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-q\right)\right\}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}\rho(s)[u(s)-\bar{u}(s)]\mathrm{d}s\end{aligned} \tag{2.5}$$

这是一个无条件的变分驻值问题.

为了决定这些拉氏乘子，我们把 u, p, q, λ, μ, ρ 当作独立变量，将(2.5)式变

分求驻值的条件,即

$$\delta H=\iint_{\Omega}\left\{p\delta p+q\delta q+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}-p\right)\delta\lambda+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-q\right)\delta\mu+\lambda\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x_1}-\delta p\right)\right.$$
$$\left.+\mu\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x_2}-\delta q\right)\right\}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}\{\delta\rho(s)[u(s)-\bar{u}(s)]+\delta u(s)\cdot\rho(s)\}\mathrm{d}s$$
$$=0 \tag{2.6}$$

通过格林定理,我们有

$$\iint_{\Omega}\left(\lambda\frac{\partial\delta u}{\partial x_1}+\mu\frac{\partial\delta u}{\partial x_2}\right)\mathrm{d}\Omega=-\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)\delta u\,\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}(\lambda n_1+\mu n_2)\delta u\,\mathrm{d}s \tag{2.7}$$

所以,(2.6)式可以写成

$$\delta H=\iint_{\Omega}\left\{(p-\lambda)\delta p+(q-\mu)\delta q+\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}-p\right)\delta\lambda+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-q\right)\delta\mu\right.$$
$$\left.-\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}\right)\delta u\right\}\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma}\{(\lambda n_1+\mu n_2+\rho)\delta u+[u(s)-\bar{u}(s)]\delta\rho\}\mathrm{d}s$$
$$=0 \tag{2.8}$$

所以,在域Ω内

$$p=\lambda,\ q=\mu,\ \frac{\partial u}{\partial x_1}=p,\ \frac{\partial u}{\partial x_2}=q,\ \frac{\partial\lambda}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu}{\partial x_2}=0 \tag{2.9}$$

在边界Γ上,有

$$-\lambda n_1-\mu n_2=\rho,\ u(s)=\bar{u}(s) \tag{2.10}$$

从(2.9)式中消去λ, μ, p, q,得原题的欧拉方程

$$\nabla^2 u=0 \tag{2.11}$$

从(2.10),有

$$\rho(s)=-\lambda n_1-\mu n_2=-\lambda(s)n_1-\mu(s)n_2=-p(s)n_1-q(s)n_2 \tag{2.12}$$

于是,本题的广义变分原理的泛函为

$$H(u,\ p,\ q)=\iint_{\Omega}\left\{\frac{1}{2}(p^2+q^2)+p\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}-p\right)+q\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-q\right)\right\}\mathrm{d}\Omega$$
$$-\int_{\Gamma}[p(s)n_1+q(s)n_2][u(s)-\bar{u}(s)]\mathrm{d}s \tag{2.13}$$

这是 $J(u)$的广义变分原理的泛函,它已没有其他的变分约束条件,$H(u, p, q)$是用对合变换引进的新的正规变量 p, q 表示的.(2.3)是本题的对合变换.

三、薄板弯曲问题的单变量(w)的最小位能原理和有关的广义变分原理

设有一薄板的抗弯刚度为 D,泊松比为 ν,在侧向载荷$\bar{f}(x_1, x_2)$作用下的挠度 $w(x_1, x_2)$由下式决定

$$\nabla^2\nabla^2 w = \frac{\bar{f}}{D} \quad (\text{在}\,\Omega\,\text{中}) \tag{3.1}$$

其中

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} = w_{,\alpha\alpha} \tag{3.2}$$

α(希腊角标)取 1 和 2,$w_{,\alpha\alpha} = \dfrac{\partial^2 w}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha}$,$\alpha$ 为哑标. 这里有各种边界条件:

(a) 等效剪力(或边界剪力) $H_n = Q_n + M_{ns,s}$ 已给或边界位移 w 已给:

$$H_n = \overline{H} \quad (\text{在}\,\Gamma_{\sigma_1}\,\text{上}) \tag{3.3a}$$

$$w = \overline{w} \quad (\text{在}\,\Gamma_{w_1}\,\text{上}) \tag{3.3b}$$

而

$$\Gamma_{\sigma_1} + \Gamma_{w_1} = \Gamma \quad (\text{整个边界}) \tag{3.3c}$$

(b) 边界弯矩 M_n已给,或挠度在边界外法线方向的斜率 $w_{,n}$已给

$$M_n = \overline{M} \quad (\text{在}\,\Gamma_{\sigma_2}\,\text{上}) \tag{3.4a}$$

$$w_{,n} = \overline{w}_{,n} \quad (\text{在}\,\Gamma_{w_2}\,\text{上}) \tag{3.4b}$$

而

$$\Gamma_{\sigma_2} + \Gamma_{w_2} = \Gamma \quad (\text{整个边界}) \tag{3.4c}$$

这里还有边界角点上的角点条件: 垂直板的角点集中力已知或角点的位移已知.

$$P_{k_1} = \overline{P}_{k_1} \quad (\text{在角点}\,k_1 = 1, 2, \cdots, k_\sigma) \tag{3.5a}$$

$$w_{k_2} = \overline{w}_{k_2} \quad (\text{在角点}\,k_2 = 1, 2, \cdots, k_w) \tag{3.5b}$$

而角点总数 k 为

$$k_\sigma + k_w = k \tag{3.5c}$$

单变量(w)的最小位能原理为

在 Γ_{w_1}，Γ_{w_2} 上满足(3.3b)，(3.4b)，在 k_2 上满足(3.5b)的一切 $w(x_1, x_2)$ 中，其使代表系统位能的泛函 $\Pi_P(w)$ 为最小的 $w(x_1, x_2)$，必为(3.1)在一切边界条件和角点条件下的解，即 w 既满足(3.1)式的微分方程，而且也满足外力已给的边界条件(3.3a)，(3.4a)和角点条件(3.5a).

$\Pi_P(w)$可以写成

$$\Pi_P(w) = \iint_{\Omega}\{A(w) - \bar{f}\, w\}\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma_1}} \overline{H}w\,\mathrm{d}s - \int_{\Gamma_{\sigma_2}} \overline{M}w_{,n}\mathrm{d}s - \sum_{k_1=1}^{k_\sigma} \overline{P}k_1 wk_1 \tag{3.6}$$

其中 $A(w)$为薄板的弯曲能变形密度

$$\left.\begin{aligned} A(w) &= \frac{D}{2}\{(w_{,\alpha\alpha})^2 - 2(1-\nu)(w_{,11}w_{,22} - w_{,12}^2)\} \quad (\text{各向同性}) \\ A(w) &= \frac{1}{2}D_{\alpha\beta\gamma\delta}w_{,\alpha\beta}w_{,\gamma\delta} \quad (\text{各向异性}) \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

这个原理可以通过变分证明. 在 $\Pi_P(w)$的变分中，我们有 [7]

$$\begin{aligned}\delta\iint_{\Omega}A(w)\mathrm{d}\Omega = &\iint_{\Omega}D\,\nabla^2\nabla^2 w\delta w\,\mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma}H_n(w)\delta w\,\mathrm{d}s \\ &- \int_{\Gamma}M_n(w)\,\frac{\partial\delta w}{\partial n}\mathrm{d}s + \sum_k P_k(w)\delta w_k \end{aligned}\tag{3.8}$$

其中 $H_n(w)$，$M_n(w)$，$P_k(w)$为 w 和它的导数在边界和角点上的线性函数.

$$M_n(w) = -D\{\nu\nabla^2 w + (1-\nu)w_{,nn}\} \quad (\text{在边界}\ \Gamma\ \text{上}) \tag{3.9a}$$

$$H_n(w) = -D\left\{\frac{\partial}{\partial n}[\nabla^2 w + (1-\nu)w_{,ss}] - (1-\nu)\,\frac{\partial}{\partial s}\,\frac{1}{\rho_s}\,\frac{\partial w}{\partial s}\right\} \quad (\text{在边界}\ \Gamma\ \text{上}) \tag{3.9b}$$

$$P_k(w) = -(1-\nu)D\Delta\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial s} - \frac{1}{\rho_s}\,\frac{\partial w}{\partial s}\right\}_k \quad (\text{在角点}\ k\ \text{上}) \tag{3.9c}$$

其中 ρ_s为边界曲线 Γ 的曲率半径，当边界凸出时，该点的 ρ_s为正，当边界为直边时，$\frac{1}{\rho_s}$为零. $\Delta\left\{\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial s} - \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial w}{\partial s}\right\}_k$代表$\frac{\partial^2 w}{\partial n\partial s} - \frac{1}{\rho_s}\frac{\partial w}{\partial s}$值在角点 k 两侧之间增量.

最小位能原理(单变量 w 的)指出：Γ_{w_1}，Γ_{w_2} 上的条件(3.3b)，(3.4b)和 k_2 上的(3.5b)都是该原理对 w 的约束条件，方程式(3.1)为该原理的欧拉方程，