线性代数习题解答

武汉工学院教学教研室编

第一章 行列式

§ 1. 行列式的概念

1. 试用行列式解方程组:

(1) $\begin{cases} x\text{tg}\,\alpha + y = \sin(\alpha+\beta) \\ x - y\text{tg}\,\alpha = \cos(\alpha+\beta) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+\omega y+\omega^2 z=\omega \\ x+\omega^2 y+\omega z=\omega^2 \end{cases}$ 其中 ω 是 1 的虚立方根

解: (1) 这时

$$D=\begin{vmatrix} \text{tg}\,\alpha & 1 \\ 1 & -\text{tg}\,\alpha \end{vmatrix} = -\text{tg}^2\,\alpha - 1 = -\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} \sin(\alpha+\beta) & 1 \\ \cos(\alpha+\beta) & -\text{tg}\,\alpha \end{vmatrix} = -\text{tg}\,\alpha\sin(\alpha+\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

$$= -\frac{\sin\alpha(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha} - (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)$$

$$= -\frac{\sin^2\alpha\cos\beta}{\cos\alpha} - \cos\alpha\cos\beta = -\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} \text{tg}\alpha & \sin(\alpha+\beta) \\ 1 & \cos(\alpha+\beta) \end{vmatrix} = \text{tg}\,\alpha\cos(\alpha+\beta) - \text{sis}(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{\sin\alpha(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)}{\cos\alpha} - (\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$= -\frac{\sin^2\alpha\sin\beta}{\cos\alpha} - \cos\alpha\sin\beta = -\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$$

因此

$$x=\frac{D_1}{D}=\frac{-\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha}}{-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\cos\alpha\cos\beta,$$

$$y=\frac{D_2}{D}=\frac{-\dfrac{\sin\beta}{\cos\alpha}}{-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\cos\alpha\sin\beta$$

（2）这时

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}=\omega^2+\omega^2+\omega^2-\omega-\omega^4-\omega=3\omega^2-3\omega$$

$$D_1=\begin{vmatrix}1&1&1\\\omega&\omega&\omega^2\\\omega^2&\omega^2&\omega\end{vmatrix}=0,\qquad D_2=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega^2\\1&\omega^2&\omega\end{vmatrix}=3\omega^2-3\omega,$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&\omega&\omega\\1&\omega^2&\omega^2\end{vmatrix}=0$$

因此

$$x=\frac{D_1}{D}=0,\qquad y=\frac{D_2}{D}=1,\qquad z=\frac{D_3}{D}=0.$$

2. 写出4阶行列式中所有带负号并包含因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

解：在4阶行列式

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{vmatrix}$$

中，含 $a_{11}a_{23}$ 的一般项是 $\pm a_{11}a_{23}a_{3p}a_{4q}$，这里 p，q 是2，4的所有排列：2，4；4，2。因此含 $a_{11}a_{23}$ 的项有两个，即 $\pm a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$，$\pm a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$。而带负号的是 $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$。

3. 用行列式的定义，计算：

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}&a_{15}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}&a_{25}\\a_{31}&a_{32}&0&0&0\\a_{41}&a_{42}&0&0&0\\a_{51}&a_{52}&0&0&0\end{vmatrix}$$

解：由行列式的定义可知，展开式中每项是5个元素的乘积，每行一个，每列一个，因此它可写成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5},$$

其中第一个附标是按自然顺序 1,2,3,4,5 排列，第二个附标 p_1,p_2,p_3,p_4,p_5 是 1，2，3，4，5，的一个排列。在展开式中的任何一项 $\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}$ 中的 p_3,p_4,p_5，至少有一个数取 3、4、5 中的某一个，即任何一项中至少有一个因子是零，因此行列式的值为零。

4. 在一个 n 阶行列式中等于零的元如果比 n^2-n 还多，那末此行列式等于零。为什么？

解： 因为 n 阶行列式的展开式中，每一项都是行列互不相同的 n 个元素的乘积。现在这个 n 阶行列式不为零的元素比 $n^2-(n^2-n)=n$ 还少，这就是说，展开式中每一项都至少含有一个零元素，故此行列式等于零。

5. 行列式中任一项的各元是否都可以用互换两行或两列把它移到新行列式的主对角线上？

解 可以。因为在 n 阶行列式的展开式中，任何一项都是 n 个因子的乘积，它们在不同的行，不同的列。所以，经过行或列的互换，总可以使 n 个因子在新行列式的主对角线上。

6. 假如把行列式中每项的 n 个元移到次对角线上，是否也能找出它的符号规律？

解： 因为二阶及三阶行列式次对角线上的元的乘积 $-a_{12}a_{21}$ 和 $-a_{13}a_{22}a_{31}$ 带负号，而四阶行列式次对角线上的元的乘积 $+a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$ 带正号。所以 n 阶行列式中每项的 n 个元移到次对角线上不能找出一般符号规律。

§ 2. 行列式的基本性质

1. 计算行列式：

$$(1)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad (2)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(3)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (4)\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$(5)\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 3 & 3 & 3 & \cdots & n \end{vmatrix} \qquad (6)\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & b \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

解： （1）把第 1 行的各元乘以 -1 加到第 2 行和第 4 行的各对应元

$$
\text{原行列式}=\begin{vmatrix}1&2&0&1\\0&1&5&-1\\0&1&5&6\\0&0&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&5&-1\\1&5&6\\0&3&3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}1&5&-1\\0&0&7\\0&3&3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&7\\3&3\end{vmatrix}=-21
$$

（2）把第 1 行的各元乘以－1加到第 2 行、第 3 行和第 4 行的对应元上

$$
\text{原行列式}=\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&-2&0&0\\0&0&-2&0\\0&0&0&-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{vmatrix}=-8
$$

（3）把第四行的各元乘以－1加到第 2 行和第 3 行的对应元

$$
\text{原行列式}=\begin{vmatrix}0&1&1&1\\0&-1&0&1\\0&0&-1&1\\1&1&1&0\end{vmatrix}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&2\\0&-1&1\end{vmatrix}
$$

$$
=-\begin{vmatrix}1&2\\-1&1\end{vmatrix}=-3
$$

（4）首先把第 3 列的各元乘以－1 加到第 1 列的对应元素上，再把所得行列式的第 1 行的各元加到第 3 行的对应元上

$$
\text{原行列式}=\begin{vmatrix}-a-b-c&2a&2a\\0&b-c-a&2b\\c+a+b&2c&c-a-b\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}-a-b-c&2a&2a\\0&-a+b-c&2b\\0&2a+2b&a+c-b\end{vmatrix}
$$

$$
=-(a+b+c)\begin{vmatrix}-a+b-c&2b\\2a+2c&a+c-b\end{vmatrix}
$$

$$
=-(a+b+c)\begin{vmatrix}a+b+c&a+b+c\\2a+2c&a+c-b\end{vmatrix}
$$

$$
=-(a+b+c)^2\begin{vmatrix}1&1\\2a+2c&a+c-b\end{vmatrix}=-(a+b+c)^2(a+c-b-2a-2c)
$$

$$
=(a+b+c)^3
$$

(5)把第 3 行的各元乘以 -1 加到其他各行的对应元上，将其结果把第 3 行与第 1 行对调，再对第二次的结果，把第 1 列与第 3 列对调

$$
原式=\begin{vmatrix}
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-3
\end{vmatrix}
$$

$$
=-\begin{vmatrix}
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
-2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-3
\end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix}
3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & \cdots & 3 & 3 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n-4 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-3
\end{vmatrix}=3\cdot 2\cdot (n-3)!=6\cdot (n-3)!
$$

(6)把第 1 行的各元乘以 -1 加到其他各行的对应元上，再将所得的行列式的第 2 列的各元乘以 -1 加到第三列和第 4 列的对应元上，再将第 2 次得到的行列式的第 4 列和第 3 列的元依次加到第 1 列和第 2 列的对应元上

$$
原式=\begin{vmatrix}
a & b & b & b \\
0 & 0 & a-b & 0 \\
0 & a-b & 0 & a-b \\
b-a & 0 & 0 & a-b
\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}
a & b & 0 & 0 \\
0 & a-b & a-b & 0 \\
0 & 0 & b-a & 0 \\
0 & 0 & 0 & a-b
\end{vmatrix}=a(b-a)^3
$$

2。 证明下列两式：

（1）
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix} = a^4$$

（2）
$$\begin{vmatrix} by+az & bz+ax & bx+ay \\ bx+ay & by+az & bz+ax \\ bz+ax & bx+ay & by+az \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix}$$

证：（1）引用性质4三次，我们有

$$原式左边 = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 0 & 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 3a & 7a+3b \end{vmatrix} = a^2\begin{vmatrix} a & 2a+b \\ 0 & a \end{vmatrix}$$

$= a^4 =$ 右边

（2）引用性质2和性质3，

$$原式左边 = \begin{vmatrix} by & bz & bx \\ bx & by & bz \\ bz & bx & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & bz & ay \\ bx & by & ax \\ bz & bx & az \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ax & bx \\ bx & az & bz \\ bz & ay & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} by & ax & ay \\ bx & az & ax \\ bz & ay & az \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} az & bz & bx \\ ay & by & bz \\ ax & bx & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & bz & ay \\ ay & by & ax \\ ax & bx & az \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & ax & bx \\ ay & az & bz \\ ax & ay & by \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} az & ax & ay \\ ay & az & ax \\ ax & ay & az \end{vmatrix}$$

$$= b^3\begin{vmatrix} y & z & x \\ x & y & z \\ z & x & y \end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + a^3\begin{vmatrix} z & x & y \\ y & z & x \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= b^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} + a^3\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{vmatrix} = 右边$$

3． 行列式 A 中每个数 a_{ij} 分别用 $b^{i-j}(b\neq 0)$ 去乘，问得到的行列式是否与 A 一致？

解：
$$\begin{vmatrix} b^{1-1}a_{11} & b^{1-2}a_{12} & \cdots & b^{1-n}a_{1n} \\ b^{2-1}a_{21} & b^{2-2}a_{22} & \cdots & b^{2-n}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{n-1}a_{n-1} & b^{n-2}a_{n2} & \cdots & b^{n-n}a_{nn} \end{vmatrix} = b^{1+2+\cdots+n}\begin{vmatrix} b^{-1}a_{11} & b^{-2}a_{12} & \cdots & b^{-n}a_{1n} \\ b^{-1}a_{21} & b^{-2}a_{22} & \cdots & b^{-n}a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b^{-1}b_{n1} & b^{-2}a_{n2} & \cdots & b^{-n}a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$
= b^{1+2+\cdots+n} b^{-1-2-\cdots-n} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}
$$

所以与A一致，没有改变。

4．证明

$$
\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}
$$

证：三阶行列式的展开式共六项，每项包括三个因式，这三个因式分别是不同的行和列的元，于是

$$
\text{原式左边} = \frac{d}{dt}\Big[a_{11}(t)a_{22}(t)a_{33}(t) + a_{21}(t)a_{32}(t)a_{13}(t) + a_{31}(t)a_{23}(t)a_{12}(t)
$$

$$
- a_{13}(t)a_{22}(t)a_{31}(t) - a_{11}(t)a_{23}(t)a_{32}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)a_{33}(t)\Big]
$$

$$
= a'_{11}(t)a_{22}(t)a_{33}(t) - a'_{12}(t)a_{21}(t)a_{33}(t) - a'_{13}(t)a_{22}(t)a_{31}(t)
$$

$$
+ a'_{21}(t)a_{32}(t)a_{13}(t) + a'_{31}(t)a_{23}(t)a_{12}(t) - a'_{11}(t)a_{23}(t)a_{32}(t)
$$

$$
+ a'_{11}(t)a_{22}(t)a_{33}(t) + a_{21}(t)a'_{32}(t)a_{13}(t) + a_{31}(t)a'_{23}(t)a_{12}(t)
$$

$$
- a_{13}(t)a'_{22}(t)a_{31}(t) - a_{11}(t)a'_{23}(t)a_{32}(t) - a_{12}(t)a'_{21}(t)a_{33}(t)
$$

$$
+ a_{11}(t)a_{22}(t)a'_{33}(t) + a_{21}(t)a_{32}(t)a'_{13}(t) + a_{31}(t)a_{23}(t)a'_{12}(t)
$$

$$
- a_{13}(t)a_{22}(t)a'_{31}(t) - a_{11}(t)a_{23}(t)a'_{32}(t) - a_{12}(t)a_{21}(t)a'_{33}(t)
$$

$$
= a'_{11}(t)\begin{vmatrix} a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} - a'_{12}(t)\begin{vmatrix} a_{21}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) \end{vmatrix} + a'_{13}(t)\begin{vmatrix} a_{21}(t) & a_{22}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) \end{vmatrix}
$$

$$
- a'_{21}(t)\begin{vmatrix} a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + a'_{22}(t)\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{13}(t) \\ a_{31}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} - a'_{23}(t)\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) \end{vmatrix}
$$

$$
+ a'_{31}(t)\begin{vmatrix} a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{22}(t) & a_{23}(t) \end{vmatrix} - a'_{32}(t)\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{23}(t) \end{vmatrix} + a'_{33}(t)\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}
$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

所以　　　　左边 = 右边

上面证明可以简写如下：

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{d}{dt}\sum\pm(a)_{1p_1}(t)a_{2p_2}(t)a_{3p_3}(t)\right)=\sum\pm\left(\frac{d}{dt}(a_{1p_1}(t)a_{2p_2}(t)a_{3p_3}(t)\right)$$

$$=\sum\pm[(a'_{1p_1}(t)a_{2p_2}(t)a_{3p_3}(t))+a_{1p_1}(t)a'_{2p_2}(t)a_{3p_3}(t)+a_{1p_1}a_{2p_2}a'_{3p_3}]$$

$$=\sum\pm a'_{1p_1}(t)a_{2p_2}(t)a_{3p_3}(t)+\sum\pm a_{1p_1}(t)a'_{2p_2}(t)a_{3p_3}(t)+\sum\pm a_{1p_1}a_{2p_2}a'_{3p_3}$$

$$=\begin{vmatrix} a'_{11}(t) & a'_{12}(t) & a'_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a'_{21}(t) & a'_{22}(t) & a'_{23}(t) \\ a_{31}(t) & a_{32}(t) & a_{33}(t) \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & a_{13}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & a_{23}(t) \\ a'_{31}(t) & a'_{32}(t) & a'_{33}(t) \end{vmatrix}$$

本题得正。

§ 3. 行列式的计算

1. 计算行列式：

$$(1)\ \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix}\qquad (2)\ \begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & c & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

$$(3)\ \begin{vmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ 9 & 7 & 8 & 9 & 4 & 3 \\ 7 & 4 & 9 & 7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 8 & 0 & 0 \end{vmatrix}\qquad (4)\ \begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix}$$

解：（1）利用性质 4 把第 1 列的各元乘以 -3加到第3列的对应元上，乘以 -2加到第2列

的对应元上，然后按第 4 行展开。对三阶行列式再利用性质 4 。

$$
原式=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & -7 & -10 & 2 \\ 2 & -1 & -7 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -7 & -10 & 2 \\ -1 & -7 & -1 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -19 \\ 0 & -6 & -4 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} -3 & -19 \\ -6 & -4 \end{vmatrix}=-102
$$

（2） 由定理 1，按最后一行展开

$$
原式 =(-1)^{5+5}v\begin{vmatrix} x & a & b & 0 \\ 0 & y & 0 & 0 \\ 0 & c & z & 0 \\ g & h & k & u \end{vmatrix}=(-1)^{4+4}vu\begin{vmatrix} x & a & b \\ 0 & y & 0 \\ 0 & c & z \end{vmatrix}
$$

$$
=uvx\begin{vmatrix} y & 0 \\ c & z \end{vmatrix}=xyzuv
$$

（3） 由拉普拉斯展开式

$$
原式 =(-1)^{1+2+5+6}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 7 & 4 & 9 & 7 \\ 5 & 3 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 8 \end{vmatrix}=(-1)^{3+4+3+4}(9-8)\begin{vmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}
$$

$$
=1(21-20)(40-36)=4
$$

（4） 定理 1

$$
原式 =(-1)^{n+n}a\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a & 0 \end{vmatrix}
$$

$$=a^n+(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{1+n-1}\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$=a^n+(-1)^{2n+1}a^{n-2}=a^{n-2}(a^2-1)$$

2. 证明 n 阶行列式：

$$\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a \end{vmatrix}=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

证　由定理 1，按最后一行展开

$$原式左 边 =(-1)^{n+1}a_n\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{n+2}a_{n-1}\begin{vmatrix} x & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & x & -1 \end{vmatrix}$$

$$+\cdots+(-1)^{n+n}(x+a_1)\begin{vmatrix} x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{n+1}a_n(-1)^{n-1}+(-1)^{n-2}a_{n-1}(-1)^{n-2}x+\cdots+(x+a_1)x^{n-1}$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

3. 试用拉普拉斯定理计算：

（1）$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 0 & 0 & \omega^2 & 0 \\ a_1 & b_1 & 1 & 1 & c_1 & 1 \\ a_2 & b_2 & 1 & \omega^2 & c_2 & \omega \\ a_3 & b_3 & 1 & \omega & c_3 & \omega_2 \\ 1 & \omega^2 & 0 & 0 & \omega & 0 \end{vmatrix}$ 这里 ω 是 1 的虚立方根

（2）$\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \diagup & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \diagup & & & \ddots & \\ b & & & & & a \end{vmatrix}$ 上 n 行，下 n 行

解：用拉普拉斯定理

$$原式 =(-1)^{1+2+1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega \end{vmatrix}\begin{vmatrix} 1 & 1 & c_1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & c_2 & \omega \\ 1 & \omega & c_3 & \omega^2 \\ 0 & 0 & \omega & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2+1+5}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_1 & 1 & 1 & 1 \\ b_2 & 1 & \omega^2 & \omega \\ b_3 & 1 & \omega & \omega^2 \\ \omega^2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$+(-1)^{1+2+2+5}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \omega & \omega^2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & 1 & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & \omega^2 & \omega \\ a_3 & 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega \end{vmatrix}(-1)^{4+3}\omega\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 \end{vmatrix}(-)^{4+1}\omega^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$$

$$+\omega\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega \end{vmatrix}(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 & \omega \\ 1 & \omega & \omega^2 \end{vmatrix}\left(\omega^2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega^2 \end{vmatrix}-2\omega\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \omega \end{vmatrix}\right)$$

$$=(3\omega-3\omega^2)(\omega-\omega^2-2\omega^2+2\omega)=(3\omega-3\omega^2)^2$$

$$=9\omega^2(1-\omega)^2$$

$$\text{（2） 原式} = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \diagdown & & & \diagup & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \diagup & & & \diagdown & \\ b & & & & & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \}n-1\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \}n-1\text{行} \end{matrix} = (a^2-b^2) \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \diagdown & & & \diagup & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \diagup & & & \diagdown & \\ b & & & & & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \}n-1\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \}n-1\text{行} \end{matrix}$$

$$= (a^2-b^2) \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \diagdown & & & \diagup & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \diagup & & & \diagdown & \\ b & & & & & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \}n-2\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \}n-2\text{行} \end{matrix} = (a^2-b^2)^2 \begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \diagdown & & & \diagup & \\ & & a & b & & \\ & & b & a & & \\ & \diagup & & & \diagdown & \\ b & & & & & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \}n-2\text{行} \\ \\ \\ \\ \\ \}n-2\text{行} \end{matrix}$$

$$= \cdots = (a^2-b^2)^n$$

4． 引用范得蒙行列式计算下列两式：

$$\text{（1）} \begin{vmatrix} a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$\text{（2）} \begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & \cdots & a_1 b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2 b_2^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$$

这里 $a_i \neq 0$，$i = 1, 2, \cdots, n+1$

解：（1）经过行的调换，将原行列式化为范得蒙行列式。

$$\text{原式} = (-1)^{(n-1)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & a-1 & \cdots & a-n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{(n-1)+(n-2)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ a^n & (a-1) & \cdots & (a-n)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a & (a-1)^2 & \cdots & (a-n)^2 \end{vmatrix}$$

$$= \cdots = (-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a & a-1 & \cdots & a-n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a^{n-1} & (a-1)^{n-1} & \cdots & (a-n)^{n-1} \\ a^n & (a-1)^n & \cdots & (a-n)^n \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} [(a+1-i)-(a+1-j)]$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (j-i)$$

（2） 用行列式性质 1

$$\text{原式} = a_1^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & \cdots & a_2 b^{n-1} & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & \cdots & \cdots & b_{n+1}^n \end{vmatrix} = \cdots$$

$$= a_1^n a_2^n \cdots a_{n+1}^n \begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \cdots & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_1}{a_1}\right)^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \cdots & \left(\frac{b_2}{a_2}\right) & \left(\frac{b_2}{a_2}\right)^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \cdots & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^{n-1} & \left(\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}}\right)^n \end{vmatrix}$$

$$= (a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \prod_{1 \leq j < i < n+1} \left(\frac{b_i}{a_i} - \frac{b_j}{a_j}\right)$$

$$= (a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \frac{\prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (a_j b_i - a_i b_j)}{\prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} a_i a_j}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (a_j b_i - a_i b_j)}{(a_{n+1}a_n \cdot a_{n+1}a_{n-1} \cdot \cdots \cdot a_{n+1}a_1)\cdots(a_2 a_1)}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (a_j b_i - a_i b_j)}{(a_{n+1}^n a_n a_{n-1} \cdots a_1)(a_n^{n-1} a_{n-1} \cdots a_1)\cdots(a_2 a_1)}$$

$$= \frac{(a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (a_j b_i - a_i b_j)}{(a_1 a_2 \cdots a_{n+1})^n}$$

$$= \prod_{n+1 \geq i > j \geq 1} (a_j b_i - a_i b_j)$$

5. 用数学归纳法证明：

$$（1）\quad D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}$$

$$（2）\quad D_n=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2\cos\theta & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$$

证：（1）当 $n=1$ 时，左边 $=D_1=a+b$，右边 $=\dfrac{a^2-b^2}{a-b}=a+b$，左边 = 右边，公式成立。当 $n=2$ 时，左边 $=D_2=\begin{vmatrix} a+b & ab \\ 1 & a+b \end{vmatrix}=a^2+ab+b^2$，右边 $=\dfrac{a^3-b^3}{a-b}=a^2+ab+b^2$，公式成立。

假定当 $n=k-1$，和 $n=k-2$ 时公式成立，即

$$D_{k-1}=\frac{a^k-b^k}{a-b},\qquad D_{k-2}=\frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{a-b},$$

成立，则

$$D_k=(a+b)D_{k-1}-ab\begin{vmatrix} 1 & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=(a+b)D_{k-1}-abD_{k-2}$$

$$=\frac{(a+b)(a^k-b^k)}{a-b}-ab\frac{a^{k-1}-b^{k-1}}{a-b}=\frac{a^{k+1}-b^{k+1}}{a-b}$$

故当 $n=k$ 时公式也成立，于是公式得证。

（2） 当 $n=1$ 时，$D_1=2\cos\theta=\dfrac{\sin(1+1)\theta}{\sin\theta}=$右边，公式成立，当 $n=2$ 时，

$$D_2=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & 1 \\ 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}=4\cos^2\theta-1=2\cos^2\theta+\cos 2\theta$$

$$=\frac{\sin 2\theta\ \mathrm{con}\,\theta+\sin\theta\cos 2\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin 3\theta}{\sin\theta}.$$

假定当 $n=k-1$ 和 $n=k-2$ 时，公式成立，即

$$D_{k-1}=\frac{\sin k\theta}{\sin\theta} \quad 和 \quad D_{k-2}=\frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$$

成立，则

$$D_k=2\cos\theta D_{k-1}-\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 2\cos\theta & \cdots & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & 2\cos\theta\end{vmatrix}$$

$$=2\cos\theta\, D_{k-1}-D_{k-2}=2\cos\theta\frac{\sin k\theta}{\sin\theta}-\frac{\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{2\cos\theta\sin k\theta-\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}=\frac{\sin(k+1)\theta+\sin(k-1)\theta-\sin(k-1)\theta}{\sin\theta}$$

$$=\frac{\sin(k+1)\theta}{\sin\theta}$$

故当 $n=k$ 时公式也成立，于是公式得证。

§ 4　克莱姆定理

1．试用克莱姆定理求解下列各线性方程组

（1）$\begin{cases}x_1+x_2+5x_3+7x_4=14\\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0\\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4\\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16\end{cases}$　（2）$\begin{cases}x+y+z=a+b+c\\ ax+by+cz=a^2+b^2+c^2\\ bcx+cay+abz=3abc\end{cases}$

（a、b、c 为互不相等的数）

解：（1）这里

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 5 & 7\\ 3 & 5 & 7 & 1\\ 5 & 7 & 1 & 3\\ 7 & 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 5 & 7\\ 0 & 2 & -8 & -20\\ 0 & 2 & -24 & -32\\ 0 & -6 & -32 & -44\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & -8 & -20\\ 2 & -24 & -32\\ -6 & -32 & -44\end{vmatrix}$$

$$=2\times(-8)\times(-4)\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\ 1 & 3 & 8\\ 3 & 4 & 11\end{vmatrix}=64\begin{vmatrix}1 & 1 & 5\\ 0 & 2 & 3\\ 0 & 7 & 26\end{vmatrix}=64\begin{vmatrix}2 & 3\\ 7 & 26\end{vmatrix}=64\times31$$

$$D_1=\begin{vmatrix}14 & 1 & 5 & 7\\ 0 & 5 & 7 & 1\\ 4 & 7 & 1 & 3\\ 16 & 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}7 & 1 & 5 & 7\\ 0 & 5 & 7 & 1\\ 2 & 7 & 1 & 3\\ 8 & 1 & 3 & 5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}7 & -34 & -44 & 7\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 2 & -8 & -20 & 3\\ 8 & -24 & -32 & 5\end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{2+4}2\begin{vmatrix}7&-34&-44\\2&-8&-20\\8&-24&-32\end{vmatrix}=2\times2\times8\begin{vmatrix}7&-34&-44\\1&-4&-10\\1&-3&-4\end{vmatrix}=64\begin{vmatrix}7&34&22\\1&4&5\\1&3&2\end{vmatrix}$$

$$=64\begin{vmatrix}0&13&8\\0&1&3\\1&3&2\end{vmatrix}=64\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}13&8\\1&3\end{vmatrix}=64\times31$$

$$D_2=\begin{vmatrix}1&14&5&7\\3&0&7&1\\5&4&1&3\\7&16&3&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&7&5&7\\3&0&7&1\\5&2&1&3\\7&8&3&5\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}1&7&5&7\\0&-21&-8&-20\\0&-33&-24&-32\\0&-41&-32&-44\end{vmatrix}$$

$$=2\begin{vmatrix}-21&-8&-20\\-33&-24&-32\\-41&-32&-44\end{vmatrix}=-64\begin{vmatrix}21&1&5\\-30&0&-7\\-43&0&-9\end{vmatrix}=-64\times(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-30&-7\\-43&-9\end{vmatrix}$$

$$=-64\times31$$

$$D_3=\begin{vmatrix}1&1&14&7\\3&5&0&1\\5&7&4&3\\7&1&16&5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-20&-34&14&7\\0&0&0&1\\-4&-8&4&3\\-8&-24&16&5\end{vmatrix}=(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}-20&-34&14\\-4&-8&4\\-8&-24&16\end{vmatrix}$$

$$=8\times4\times2=\times(-1)^2\begin{vmatrix}10&17&7\\1&2&1\\1&3&2\end{vmatrix}=64\begin{vmatrix}0&-13&-13\\0&-1&-1\\1&3&2\end{vmatrix}$$

$$=64\times(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-13&-13\\-1&-1\end{vmatrix}64\times0=0$$

$$D_4=\begin{vmatrix}1&1&5&14\\3&5&7&0\\5&7&1&4\\7&1&3&16\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&5&14\\0&2&-8&-42\\0&2&-24&-66\\0&-6&-32&-82\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&-8&-42\\2&-24&-66\\-6&-32&-82\end{vmatrix}$$

$$=2\times(-8)\times(-2)\begin{vmatrix}1&1&21\\1&3&33\\-3&4&41\end{vmatrix}=32\begin{vmatrix}1&1&21\\0&2&12\\0&7&104\end{vmatrix}=32\begin{vmatrix}2&12\\7&104\end{vmatrix}$$

$$=32\times124.$$

故