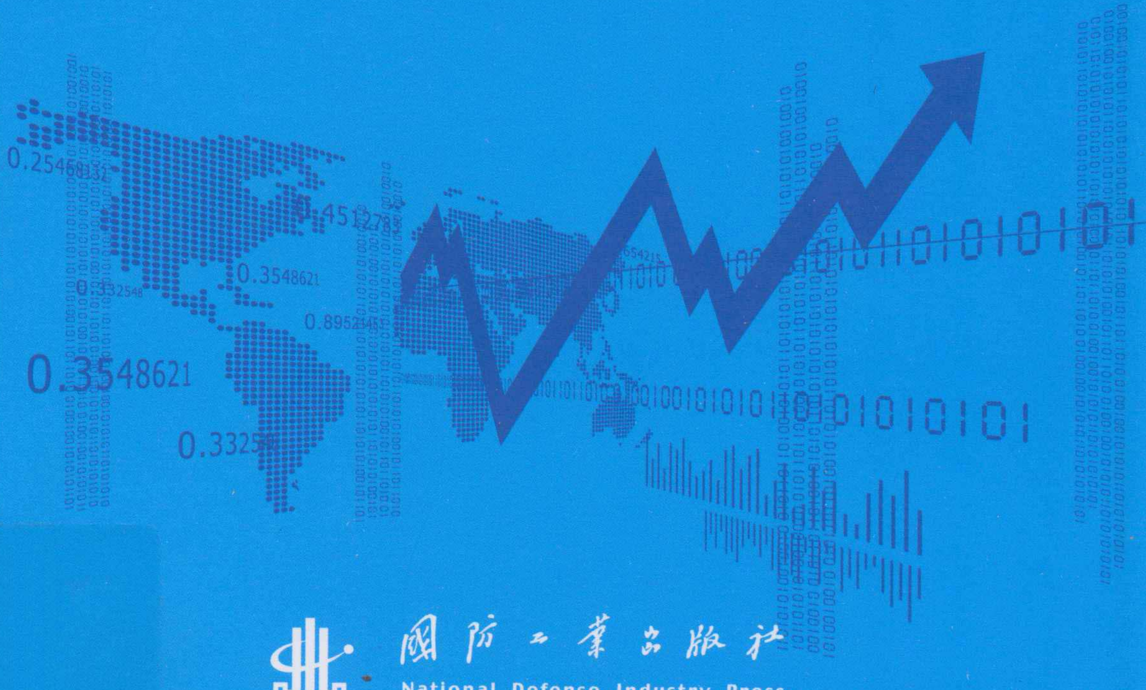
Probability theory and mathematical statistics

概率论与数理统计（第2版）

主编　徐玉民



国防工业出版社
National Defense Industry Press

普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

（第2版）

主　编　徐玉民
副主编　樊剑武　贠小青
主　审　赵来玉

国防工业出版社
·北京·

内 容 简 介

本书是参照教育部对本课程的基本要求编写的高等院校(独立学院)教材.

本书理论严谨,内容编排上突出重点,分散难点,概念的叙述力求清晰易懂,并注意与实际问题相结合.

本书主要内容包括:概率论的基本概念,一维随机变量及其分布,多维随机变量及其分布,随机变量的数字特征,大数定律及中心极限定理,数理统计的基本概念,参数估计,假设检验等八章,各章均配有习题,分基本题及提高题,以适应不同层次学生的要求.

本书适用于独立学院学生使用,也可作为普通高等院校、高职高专学生教学参考,亦可作为教师参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/徐玉民主编. —2 版. —北京:国防工业出版社, 2013.1

ISBN 978-7-118-08678-2

Ⅰ. ①概... Ⅱ. ①徐... Ⅲ. ①概率论 ②数理统计 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 020256 号

※

国防工業出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 **印张** $11\frac{3}{4}$ **字数** 267 千字

2013 年 1 月第 2 版第 1 次印刷 **印数** 1—4000 册 **定价** 28.00 元

国防书店:(010)88540777 发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755 发行业务:(010)88540717

第2版前言

随着高等教育的发展，独立学院的发展也进入了一个新的时期，教育教学方式也与时俱进. 为此，编者按照高等教学本科教学的基本要求，结合几年的教学实践，提出在概率论与数理统计课程教学中，进行适应性教学改革，并根据适应性教学改革的要求和独立学院学生的学习需求和学习能力编写了本书.

本书的编写在第一版的基础上进行如下改进.

（1）内容编写上更加通俗易懂. 基本满足不同学习层次学生的需求，教学内容分为三个层次：基本教学层次、较高教学层次、发展教学层次，其中较高教学层次用“*”予以区分，发展教学层次在习题中（三）体现.

（2）习题编写上更加符合适应性教学的要求. 习题分（一）、（二）、（三）三个部分，第（一）部分可供教师和学生进行随堂练习；第（二）部分可供学生独立完成，不提供参考答案；第（三）部分可供学有余力的学生完成.

本书的编写得到了燕山大学教学改革项目的支持，燕山大学里仁学院的部分教师参与了概率论与数理统计适应性教学改革实践，参加了本书的编写.

参与本书编写的有：杨洋（第一章）、贠小青（第二、三章）、陆瑶（第四章）、张洁（第五章）、秦雅玲（第六、七章）、樊剑武（第八章），徐玉民、樊剑武统稿.

鉴于编者水平有限，书中难免有不足之处，恳请读者和使用教师批评、指正.

编　者

2012年11月

第 1 版 前 言

独立学院的诞生，是中国高等教育的新生事物. 独立学院的发展，是中国高等教育充满活力的体现. 为了更好地探索独立学院应用型本科人才培养的模式，燕山大学里仁学院在“高等数学”适应性教学方式实践的基础上，将适应性教学方式推广到“概率论与数理统计”课程教学. 力图为不同学习要求、不同学习基础的学生提供适应其发展需求的教学内容，因材施教，让学生在学习过程中感受成功，享受学习的快乐.

本书主要是为满足独立学院开展“适应性”教学需要编写而成的. 编写中力求体现“以应用为目标，以必需、够用为度”和适应不同发展目标、不同学习基础学生学习的需要，在保证系统性、科学性的基础上，注意讲清概念，突出方法教学，注重学生基本运算能力、分析问题能力、解决问题能力的培养，重视理论联系实际，内容通俗易懂，努力体现独立学院“适应性”教学特点.

在编写本书时，我们力求在概念与理论、方法与技巧、实践与应用三方面做出较为合理的安排. 在保留概率论与数理统计基本内容的前提下，以随机变量的常用分布为主线阐述知识. 在编写上，遵循从具体到抽象，从特殊到一般的原则. 考虑到独立学院学生的学习基础，略去了一些理论推导，力求做到通俗易懂. 本书可作为独立学院 48 学时课程的教材使用(其中，概率论为 36 学时，数理统计为 12 学时).

本书由徐玉民主编，樊剑武副主编，赵来玉主审，赵晓华、贠小青参与了部分习题的演算. 在编写过程中得到了唐宗贤及国防工业出版社的大力支持，特此表示感谢.

由于编者水平有限，错误和不妥之处在所难免，恳请读者和使用教师批评、指正.

编 者

2007 年 11 月于燕山大学里仁学院

目　录

第1章　概率论的基本概念

在人类的生产实践和科学实验中,人们观察到的现象大体可以分为两类,一类是在一定条件下必然要发生的现象,我们称之为确定性现象或必然现象.另一类是在一定条件下可能发生,也可能不发生的现象,我们称之为偶然性现象或随机现象.

例如,在标准大气压下,水到100℃必然沸腾;同性电荷必互相排斥;平面三角形内角之和为180°等都是必然现象.又例如在一定条件下掷一枚硬币,徽花向上这个结果可能发生也可能不发生,在每次抛掷之前无法准确预测其结果;又如某种股票的价格在下一个交易日可能上升也可能下降等都是随机现象.

在一定条件下虽然随机现象能出现这样的或那样的结果,而且在每次试验之前并不能预测这次试验的确切结果,但是人们发现,在大量的重复试验或观察下,随机现象的发生又明显地呈现出某种规律性.这种规律性称之为统计规律性.

概率论是一门研究和揭示随机现象统计规律性数量关系的数学学科.

1.1　随机事件及其运算

1.1.1　随机试验和样本空间

一般我们把对某种自然现象作一次观察或进行一次科学试验,统称为试验.为了研究随机现象,我们引入随机试验的概念.

定义1.1.1　在对随机现象的研究中,具有以下三个特征的试验称为随机试验,记为E.

(1) 在相同的条件下,试验可以重复地进行(可重复性);

(2) 试验的结果不止一种,而且事先可以确知试验的所有结果(可预知性);

(3) 在进行试验前不能确定出现哪一个结果(不确定性).

例1.1.1　列举随机试验的例子.

E_1:抛一枚硬币,观察出现正面H和反面T的情况;

E_2:将一枚硬币抛掷三次,观察正面H反面T出现的情况;

E_3:掷一颗骰子,观察出现的点数;

E_4:记录某电话交换台在一分钟内收到用户的呼唤次数;

E_5:从一批灯泡中任取一个,测试其寿命.

以上5个试验都具有随机试验的三个特征.本书中以后提到的试验都是指随机试验.

试验E的每一个可能的基本结果,称为E的一个样本点,试验E的所有样本点的集合称为试验E的样本空间,记为S.

例1.1.2　写出例1.1.1中随机试验所对应的样本空间.

$S_1 = \{H,T\}$;

$S_2 = \{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$;

$S_3 = \{1,2,3,4,5,6\}$;

$S_4 = \{0,1,2,3\cdots\}$;

$S_5 = \{t \mid t \geqslant 0\}$, t 表示灯泡寿命.

需要注意的是在一次试验中,样本空间会根据试验的目的而发生改变的,比如在例 1.1.1 中, E_2 的试验目的改为“观察正面 H 出现的次数”,则对应的样本空间应为 $S_2 = \{0,1,2,3\}$.

1.1.2 随机事件

在一次试验中,总有这样或那样的结果出现,但需要明确的是:

(1) 每进行一次试验,必然出现且只能出现样本空间中的一个样本点;

(2) 每次试验的任何结果,都是由样本空间中的一些样本点所组成.

在对随机现象的研究中,人们一般对试验中可能出现的具有某种特征的结果感兴趣,为此我们结合样本空间给出随机事件的概念.

定义 1.1.2 随机试验 E 的样本空间 S 的子集称为 E 的随机事件,简称事件,记为 A, B, C, $\cdots$.

一般来说,试验的任何结果都可称为随机事件,随机事件就是样本空间中一些样本点的集合.

在每次试验中,当且仅当随机事件 A 的一个样本点出现时,我们称之为事件 A 发生. 如果事件 A 发生,则 A 中的某一个且只有一个样本点必出现. 如果 A 所含的某一样本点出现,则说明事件 A 发生.

如果在每次试验中,某事件只含有一个样本点,则称之为基本事件,即由一个样本点组成的单点集.

如果在每次试验中,某事件一定发生,则称之为必然事件,记为 Ω 或 S.

既然必然事件在每次试验中必然发生,那么它一定包含样本空间中的所有样本点,因此样本空间也是必然事件.

如果在每次试验中,某事件一定不发生,则称之为不可能事件,记为 $\varnothing$.

不可能事件在每次试验中一定不发生,那么它肯定不包含样本空间中的任何样本点. 空集 $\varnothing$ 中不包含任何样本点,因此也是不可能事件.

例 1.1.3 E :抛一颗骰子,观察出现的点数;讨论样本空间及事件“掷骰子得偶数点”、“掷骰子得 3 点”、“掷骰子得 8 点”、“掷骰子得点数 1 至 6 点”.

解 根据题意,样本空间为

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

设事件 A 为“掷骰子得偶数点”,符合要求的样本点有 2,4,6,因此

$$A = \{\text{掷骰子点数得偶数点}\} = \{2,4,6\}$$

而且,当骰子点数出现 2 点、4 点、6 点之一时,都表明事件 A 发生,显然 A 是 S 的子集.

设事件 B 为“掷骰子得 3 点”,符合要求的样本点只有 3,因此

$$B = \{掷骰子点数得 3 点\} = \{3\}$$

显然事件 B 是一个基本事件.

由于试验肯定不会出现 8 点,因此“掷骰子得 8 点”为不可能事件,“掷骰子得点数 1 至 6 点”为必然事件.

今后在研究某一随机试验时,弄清楚样本空间是由哪些样本点组成的,以及所讨论的事件是由哪些样本点组成的,是非常重要的. 对于一些样本点很多而不便一一列举的试验,就要运用排列组合知识进行计算.

1.1.3 随机事件间的关系及运算

事件间的关系与集合间的关系很相似. 关于集合运算的某些性质完全适用于事件. 下面根据“事件发生”的含义,给出事件间的关系和运算的含义.

(1) 包含关系:如果事件 A 发生,必然导致事件 B 发生,则称事件 B 包含事件 A ,记作 $A \subset B$.

(2) 相等关系:当且仅当 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

(3) 和(并)事件关系:“事件 A 与事件 B 至少有一个发生”的事件称为 A 与 B 的和(并)事件,记为 $A \cup B$. 同样“事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生”的事件称为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的和(并)事件,记为 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$,也可推广到 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.

(4) 积(交)事件:“事件 A 与 B 同时发生”的事件称 A 与 B 的积(交)事件,记为 $A \cap B$ 或 AB ,它可以推广到 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ 或 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$.

(5) 差事件:“ A 发生而 B 不发生”的事件称为 A 与 B 的差事件,记为 $A - B$.

(6) 互不相容事件:如果事件 A 与 B 不可能同时发生,即 $A \cap B = \varnothing$,则称事件 A 与 B 互不相容,或 A 与 B 互斥.

(7) 对立事件:如果事件 A 与 B 满足:

$$A \cap B = \varnothing, A \cup B = S$$

则称 A 与 B 互为对立事件,或互逆事件. 事件 A 的对立事件,记为 $\overline{A}$.

事件间的关系,可以用图 1.1.1 来直观地表示,图中的方形表示样本空间 S .

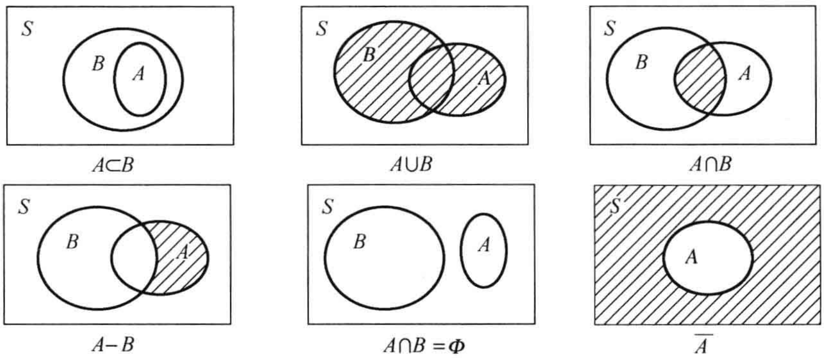


图 1.1.1

事件间的运算有如下运算规律：

(1) 交换律　　$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

(2) 结合律　　$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

(3) 分配律　　$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

(4) 德 · 摩根定理

$$\overline{A_1 \cup A_2} = \overline{A_1} \cap \overline{A_2}, \overline{A_1 \cap A_2} = \overline{A_1} \cup \overline{A_2}$$

一般有 $$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}, \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

例 1.1.4　设 A, B, C 为事件,试用 A, B, C 的关系和运算表示下列各事件.

(1) 仅 A 发生;

(2) A, B, C 都发生;

(3) A, B, C 都不发生;

(4) A, B, C 至少一个发生.

解　(1)"仅 A 发生"表明在一次试验中只有 A 发生而 B, C 不发生,可用差事件关系表示,故 $A - B - C$,同时考虑到若 B, C 不发生,那就是 B, C 的对立事件发生了,故又可表示为 $A\overline{B}\,\overline{C}$.

(2)" A, B, C 都发生"可以用积事件来表示为 ABC.

(3)" A, B, C 都不发生",那是就 A, B, C 的对立事件发生了,故可表示为 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

(4)" A, B, C 至少一个发生"可用和事件来表示为 $A \cup B \cup C$.

1.2　频率与概率

在对随机试验的研究过程中,我们一般会关注这样一个事实,那就是一个事件(不包括必然事件和不可能事件)在一次试验中可能发生也可能不发生,那这个事件在一次试验中发生的可能性有多大呢? 能否从数量的角度来表征一个事件在一次试验中发生的可能性大小? 研究发现,事件发生的频繁程度与事件在一次试验中发生的可能性大小有某种联系,对此我们先引入频率的概念,利用它描述事件发生的频繁程度,进而引出表示事件在一次试验中发生可能性大小的数,即概率.

1.2.1　概率的统计定义

定义 1.2.1　在相同的条件下,将一随机试验进行 n 次重复试验,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 的频数,则称 $f_n(A) = \dfrac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率.

事件 A 的频率不是一个固定数,由于事件在每次试验中可能发生也可能不发生,因而在 n 次试验中事件 A 发生的频率也就随着试验的结果不同而具有波动性.

例 1.2.1　在相同条件下重复地对同一小麦种子做发芽试验,得到如下统计

表1.2.1.

由表可见，在取出的种子中发芽数是随机的. 但随抽查粒数的增多发芽的频率$f_n(A)$呈现出稳定性，逐渐稳定于0.9.

表 1.2.1

抽取粒数 n	5	10	50	100	300	600
发芽粒数 n_A	5	9	44	91	272	542
发芽频率 $f_n(A)$	1	0.9	0.88	0.91	0.907	0.903

例 1.2.2 历史上一些著名的抛硬币试验见表 1.2.2.

表 1.2.2

试验者	抛币次数 n	出现正面次数 n_H	频率 $f_n(H)$
蒲丰	4040	2048	0.5069
法摩根	4092	2048	0.5005
费勒	10000	4979	0.4979
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005

由表可见，随着抛币次数 n 增大，频率$f_n(H)$ 在0.5 附近摆动且逐渐稳定于0.5，这种"频率稳定性"即通常所说的统计规律性.

频率能反映一个事件发生的频繁程度. 频率越大，事件 A 发生的就越频繁，这就意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就越大. 由此我们考虑，能否用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性大小. 通过前面两个例子我们看到频率具有稳定性，同时频率具有以下性质.

(1) 非负性：$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$

(2) 规范性：$f_n(S) = 1$

(3) 可加性：若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是两两互不相容的事件，则有

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_k)$$

这三条性质已为大量实践所证明.

由此可见，当试验次数较大时，频率逐渐稳定于某一个常数，我们用这个常数表示事件发生可能性大小是合适的.

定义 1.2.2 概率的统计定义 在 n 次重复独立试验中，事件 A 发生的频率具有稳定性，即它在某一数 p 附近波动，且当 n 越大时，波动幅度越小，则定义频率的稳定值 p 为事件 A 发生的概率，记 $P(A) = p$.

利用概率的统计定义求事件的概率，需要进行大量的试验，有时是很困难的. 为了理论研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出概率的公理化定义.

1.2.2 概率的公理化定义

定义 1.2.3 概率的公理化定义 设 E 是一个随机试验，S 为它的样本空间，以 E 中所有随机事件组成的集合为定义域，对于任一随机事件 A，规定一个实数 $P(A)$，如果 $P(A)$ 满足下列三个公理：

(1) $P(A) \geqslant 0$ (非负性);

(2) $P(S) = 1$ (规范性);

(3) 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_k \cdots$ 两两互不相容,那么 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$ (可列可加性);

则称 $P(A)$ 为事件 A 的概率.

由概率的公理化定义可以推出概率的一些重要性质.

性质 1 $P(\varnothing) = 0$

证明 记 $A_n = \varnothing, (n = 1,2,3,\cdots)$,则 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n \cdots$ 两两互不相容,且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$, 由定义 1.2.2(3)知 $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$,所以 $P(\varnothing) = \sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing)$,再由概率的非负性 $P(\varnothing) \geqslant 0$ 知 $P(\varnothing) = 0$.

性质 2 概率的有限可加性 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

证明 令 $A_{n+1} = A_{n+2} = \cdots = \varnothing$,应用概率的可列可加性及性质 1 知

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \varnothing \cup \varnothing \cup \cdots)$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

性质 3 设 A,B 是两个事件,若 $A \subset B$,则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$,进而有 $P(B) \geqslant P(A)$.

证明 因为 $A \subset B$,所以 $B = A \cup (B - A)$, $A(B - A) = \varnothing$,由性质 2 得 $P(B) = P(A) + P(B - A)$,所以 $P(B - A) = P(B) - P(A)$

又由概率的非负性 $P(B - A) \geqslant 0$,所以 $P(B) \geqslant P(A)$.

性质 4 对于任何一个事件, $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

证明 因为 $A \subset S$,所以 $0 \leqslant P(A) \leqslant P(S) = 1$.

性质 5 逆事件的概率 对任一事件 A , $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

证明 因为 $A \cup \bar{A} = S$, $A \cap \bar{A} = \varnothing$,所以 $P(A \cup \bar{A}) = P(S) = 1$,即 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,也即

$$P(A) = 1 - P(\bar{A})$$

性质 6 概率的加法公式 对任意的事件 A,B 有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$.

证明 因为 $A \cup B = A \cup (B - AB)$ 且 $A(B - AB) = \varnothing$ 和 $AB \subset B$,所以

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

性质 6 可以推广到多个事件的情形.

例如,有三个事件 A、B、C,有如下公式:

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

一般地,对 n 个事件有如下公式:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1} P(A_1A_2\cdots A_n)$$

例 1.2.3 设 A、B 为两个事件, $P(A) = 0.6$, $P(B) = 0.3$, $P(AB) = 0.1$,求

(1) A 发生但 B 不发生的概率;

(2) A、B 都不发生的概率;

(3) AB 不发生的概率.

解 (1) $P(A\overline{B}) = P(A - B) = P(A - AB) = P(A) - P(AB) = 0.5$;

(2) $P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$
$= 1 - [0.6 + 0.3 - 0.1] = 0.2$;

(3) $P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.1 = 0.9$.

1.3 古典概型与几何概型

1.3.1 古典概型

若一个随机试验具有如下两个特点:

(1) 试验的样本空间仅有有限个样本点(有限性);

(2) 每个样本点发生的可能性都相等(等可能性).

则称此试验为古典概型,又称等可能概型.

等可能概型在概率论发展初期曾是概率论的主要研究对象,所以又称其为古典概型. 17 世纪赌博盛行,如何计算赢率成了不少数学家的课题,逐渐形成了概率的古典定义. 它具有非负性、规范性、互不相容事件的可加性,也给概率的公理化定义提供了依据.

如掷一颗骰子,观察其点数,样本空间为 $S = \{1,2,3,4,5,6\}$,共有 6 个样本点,且每个样本点发生的可能性是相等的,故这是一个古典概型.

一般地,设试验 E 的样本空间 $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$,它共有 n 个样本点,且每个样本点 $\{e_i\}$ ($i = 1,2,\cdots,n$)发生的可能性相等,即 $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \cdots = P(\{e_n\})$.

因为 $S = \{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \cdots \cup \{e_n\}$ $\quad P(S) = P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \cdots + P(\{e_n\})$

所以 $\quad nP(\{e_i\}) = 1 \quad P(\{e_i\}) = \dfrac{1}{n} \ (i = 1,2,\cdots,n)$

若事件 A 包含 k 个样本点, $A = \{e_{n_1}, e_{n_2}, \cdots, e_{n_k}\}$,则

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 中样本点数}}{S\text{ 中样本点数}}$$

定义 1.3.1 概率的古典定义 在古典概型中,随机事件 A 发生的概率定义为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 中样本点数}}{S\text{ 中样本点数}}$$

称古典概型中事件 A 的概率为古典概率.

计算古典概率时，

(1) 要弄清随机试验是什么类型？即判断有限性和等可能性是否满足. 一般情况下，我们所讨论的都是古典概型,可直观判断,无须进一步讨论.

(2) 分析样本空间是怎样构成的,要利用排列、组合等知识求出样本空间的样本点的个数 n ,事件 A 的样本点的个数 k ,然后利用公式 $P(A)=\frac{k}{n}$,计算出 $P(A)$.

例 1.3.1 一袋内装有 8 只球,除颜色不同外,其余完全相同,其中 5 只红球,3 只白球,从袋内任意取球两次,每次随机地取一只,考虑两种取球方式.

(a) 第一次取一只球,观察颜色后放回袋中,将袋中球混合均匀后再任取一球,这种取球方式称为放回抽样.

(b) 第一次取球后不放回,第二次从剩余的球中再任取一球,这种方式称为不放回抽样.

分别就以上两种取球方式计算：

(1) 取到两只球都是红球的概率；

(2) 取到的两只球颜色不同的概率.

解 设 $A=\{$取到的两只球都是红球$\}$, $B=\{$取到的两只球颜色不同$\}$.

(a)放回抽样：

样本空间 S 含有 $n=C_8^1\times C_8^1=8\times 8=64$ 个样本点.

事件 A 含有 $k=C_5^1\times C_5^1=25$ 个样本点,显然样本空间仅有有限个样本点,且每个样本点发生的可能性相等,所以是古典概型,故

$$P(A)=\frac{5\times 5}{8\times 8}=\frac{25}{64}$$

事件 B 要求两次取出的球颜色不同可以分为第一次取红球,第二次取白球,和第一次取白球,第二次取红球,由排列组合知识可知, B 含有 $k=C_5^1\times C_3^1+C_3^1\times C_5^1=30$ 个样本点,故

$$P(B)=\frac{5\times 3+3\times 5}{8\times 8}=\frac{15}{32}$$

(b) 不放回抽样：

第一次可取 8 个球,第二次可取 7 个球,故样本空间 S 含有 $n=C_8^1\times C_7^1=8\times 7=56$ 个样本点,同理可计算出事件 A 和事件 B 所包含的样本点数,故

$$P(A)=\frac{C_5^1\times C_4^1}{8\times 7}=\frac{5}{14},P(B)=\frac{C_5^1\times C_3^1+C_3^1\times C_5^1}{8\times 7}=\frac{15}{28}$$

例 1.3.2 设有 n 个人,每个人都等可能地被分配到 N 个房间中的一个房间去住 $(n\leqslant N)$,假定房间容量足够大,求下列事件的概率：

(1) 指定的 n 间房各有一人；

(2) 恰有 n 间房各有一人；

(3) 某指定房中恰有 m 个人($m\leqslant n$).

解 将 n 个人等可能地分配到 N 间房中去，每一个人分到 N 间房中都有 N 种分法，房间足够大，意味着 n 个人可同时进入同一间房，所以样本空间 S 含有 N^n 个样本点.

(1) 设 $A=\{$指定的 n 间房各有一人$\}$，

由于房间是指定的，房子分法只有一种，将 n 个人分到指定的 n 间房中去，使每间房各有 1 人. 第一个人有 n 种分法，第二个人有 $n-1$ 种分法，第三个人有 $n-2$ 种分法 $\cdots$ ，最后一间给第 n 个人. 所以事件 A 含有 $n!$ 个样本点，所以

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

(2) 设 $B=\{$恰有 n 间房各有一人$\}$.

n 个人分配到 n 间房，且每间房仅有 1 人，故有 $n!$ 种分法，而 n 间房未指定，所以可以从 N 间房中任意选 n 间房，故有 C_N^n 种方法. 所以事件 B 含有 $C_N^n\cdot n!$ 个样本点，所以

$$P(B)=\frac{C_N^n\cdot n!}{N^n}$$

(3) 设 $C=\{$某指定的房中恰有 m 个人住$\}$.

从 n 个人中任选 m 个人分配到指定的某一房间中去，有 C_n^m 种选法. 再把剩下的 $n-m$ 个人分配到 $N-1$ 个房间去的分法有 $(N-1)^{n-m}$ 种，所以事件 C 含有 $C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}$ 个样本点，所以

$$P(C)=\frac{C_n^m\cdot(N-1)^{n-m}}{N^n}$$

例 1.3.3 设有 r 个人，假定每人的生日在一年的 365 天中任一天的概率相等，求

(1) 这 r 个人生日各不相同的概率；

(2) 至少有两个人的生日在同一天的概率.

解 (1) 设 $A=\{r$ 个人的生日全不相同$\}$，考察 r 个人的生日是一年中的哪一天(将 r 个人的生日分配到 365 天中去)，所以样本空间含有 365^r 个样本点，A 含有 A_{365}^r 个样本点，所以

$$P(A)=\frac{A_{365}^r}{365^r}=\frac{365\cdot 364\cdots(365-r+1)}{365^r}=\frac{365!}{365^r\cdot(365-r)!}$$

(2) 设 $B=\{r$ 个人中至少有两个人的生日相同$\}$，则

$$P(B)=P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{365!}{365^r\cdot(365-r)!}$$

经计算可得如下结果：

r	20	23	30	40	50	64	100
$p(B)$	0.411	0.507	0.706	0.891	0.970	0.997	0.9999997

例 1.3.4 从 1 ~ 100 的整数中随机地取一个整数，试求取到的整数能被 5 或 9 整除的概率.

解 设 $A=\{$取到的数能被 5 整除$\}$, $B=\{$取到的数能被 9 整除$\}$.

从 1 ~ 100 中任取一数,样本空间含有 100 个样本点,所求概率为 $P(A\cup B)$,在 1 ~ 100 中能被 5 整除的数有 $\left[\frac{100}{5}\right]=20$ 个,即事件 A 含有 20 个样本点,在 1 ~ 100 中能被 9 整除的数有 $\left[\frac{100}{9}\right]=11$ 个,即事件 B 含有 11 个样本点,在 1 ~ 100 中能被 5 整除,又能被 9 整除的数,就是能被 45 整除的数有 $\left[\frac{100}{45}\right]=2$,即事件 AB 含有 2 个样本点,所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{20}{100}+\frac{11}{100}-\frac{2}{100}=0.29$$

***例 1.3.5** 袋中有 a 个红球, b 个白球,从中任意地连续一个一个地摸出 $k+1$ 个球 $(k+1\leqslant a+b)$,每次摸出的球不放回袋中,试求最后一次摸到红球的概率.

解 E:从 $a+b$ 个球中不放回地一个一个任意地连续摸出 $k+1$ 个球进行排列(与顺序有关)则 S 有 A_{a+b}^{k+1} 个基本事件.

设 $A=\{$从摸出的 $k+1$ 个球的排列中最后一个是红球$\}$.

第一步:从 a 个红球中任取一个红球,排列在最后的位置上有 A_a^1 种取法.

第二步:从剩下的 $a+b-1$ 个球中随机取 k 个任意排列在前面 k 个位置上的方法有 A_{a+b-1}^{k} 种,由乘法原理知, A 含有 $A_a^1\times A_{a+b-1}^{k}$ 个基本事件. 所以

$$P(A)=\frac{A_a^1\times A_{a+b-1}^{k}}{A_{a+b}^{k+1}}=\frac{a\times\dfrac{(a+b-1)!}{(a+b-1-k)!}}{\dfrac{(a+b)!}{(a+b-k-1)!}}=\frac{a}{a+b}$$

所求事件 A 的概率与 k 无关,即每次摸到红球的概率是一样的. 这是抽签问题的模型,即抽签时各人机会均等,不必争先恐后.

***例 1.3.6** 从 6 双不同的鞋子中任取 4 只,求:

(1) 其中恰有一双配对的概率;

(2) 至少有两只鞋子配成一双的概率.

解 (1) 6 双鞋子共有 12 只,任取 4 只,总的取法 $C_{12}^4=495$ 种. 设事件 A 为"其中恰有一双配对",为做到恰有一双配对,先从 6 双鞋中取出一双,其两只全取出. 再从剩下 5 双鞋中取出两双,其每双中取出一只,故恰有一双的取法有 $C_6^1\cdot C_2^2\cdot C_5^2\cdot C_2^1\cdot C_2^1=240$ 种. 所求概率

$$P(A)=\frac{240}{495}=\frac{16}{33}$$

(2) 设事件 B 为"取出的 4 只鞋子中至少有两只鞋子配成一双",则 $\overline{B}$ 为"取出的 4 只鞋子中没有成双的鞋子". $\overline{B}$ 包含的基本事件数为 $C_6^4\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1\cdot C_2^1=240$ 种,则

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{240}{495}=1-\frac{16}{33}=\frac{17}{33}$$

事件 B 的概率也可以这样计算,取出的 4 只鞋子中至少有两只配成一双的取法,可以分